Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Гришин, Простейшая тауберова теорема, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 221–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm258>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 03:46:14

УДК 517

ПРОСТЕЙШАЯ ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА

А. Ф. Гришин

Рассматривается задача: из асимптотических свойств интеграла $\int_0^r u(t) dt$ вывести асимптотические свойства функции u . Как известно, это можно сделать при дополнительных ограничениях на функцию $u(t)$. В статье получена теорема, в которой эти ограничения слабее, чем в других известных вариантах таких теорем.

Библиография: 12 названий.

Нами рассматривается следующая задача: из асимптотических свойств $\int_0^r u(t) dt$ вывести асимптотические свойства функции u . В статье широко используется понятие уточненного порядка. Дифференцируемая функция $\rho(r)$ на полуоси $(0, \infty)$ называется *уточненным порядком в смысле Валирона*, если выполняются следующие два условия:

- 1) существует конечный предел $\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r)$;
- 2) $\lim_{r \rightarrow +\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$.

Функция $r^{\rho(r)}$ в дальнейшем обозначается $V(r)$. Свойства уточненного порядка изложены, в частности, в книге [1]. Некоторые дальнейшие результаты можно найти в [2]. Одним из важных свойств уточненного порядка является следующее:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = t^\rho, \quad t > 0. \quad (1)$$

Если равенство (1) выполняется для некоторой функции f (вместо V), то функция f называется *правильно меняющейся в смысле Караматы*. Понятие уточненного порядка ввел Валирон [3], класс правильно меняющихся функций ввел Карамата [4]. Теория правильно меняющихся функций изложена в книгах [5]–[7]. В этих книгах, в частности, доказывается, что каждая правильно меняющаяся функция f имеет вид $f(r) = a(r)V(r)$, где $\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 1$, а $\rho(r)$ – некоторый уточненный порядок. Уточненный порядок мы будем использовать для исследования свойств функций в окрестности бесконечности. Поэтому условие интегрируемости $V(r)$ на любом сегменте $[0, a]$ никак не ограничивает общность рассуждений. Это условие мы в дальнейшем будем считать выполненным. Для формулировки теоремы нам нужны еще два определения.

Как известно, измеримое множество E на полуоси $(0, \infty)$ называется *множеством линейной плотности нуль*, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1(E \cap [0, r])}{r} = 0,$$

где m_1 – мера Лебега.

Исследования автора частично поддержаны фондом INTAS, грант INTAS 99-00089.

Пусть $u(r)$ – функция на полуоси $[0, \infty)$. Тогда верхний предел со звездой определяется так:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty}^* u(r) = \inf_E \overline{\lim}_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E}} u(r),$$

где инфимум берется по всем множествам E линейной плотности нуль. Отметим, что инфимум достигается на некотором множестве E_0 [8].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(r)$ – локально интегрируемая функция на полуоси $[0, \infty)$, $\rho(r)$ – уточненный порядок, $\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) > -1$, и пусть предел

$$h = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty}^* \frac{u(r)}{V(r)}$$

есть конечное число. Пусть, кроме того, выполняются следующие три условия:

1) для любого множества E линейной плотности нуль

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{rV(r)} \int_0^r \chi_E(t) |u(t)| dt = 0,$$

где χ_E – характеристическая функция множества E ;

2) существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} = 0,$$

где

$$\sigma(\alpha) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{rV(r)} \int_r^{(1+\alpha)r} |u(t) - hV(t)| dt;$$

3) существует конечный предел

$$H = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rV(r)} \int_0^r u(t) dt.$$

Тогда существует множество F линейной плотности нуль такое, что

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin F}} \frac{u(r)}{V(r)} = h. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем равенство $h = (\rho + 1)H$. Пусть α – некоторое строго положительное число и $r_n = r_n(\alpha)$ – такая последовательность, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty, \\ \sigma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n V(r_n)} \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} |u(t) - hV(t)| dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} u(t) dt &= h \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} V(t) dt + \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} (u(t) - hV(t)) dt, \\ h \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} V(t) dt - \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} |u(t) - hV(t)| dt & \\ &\leq \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} u(t) dt \leq h \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} V(t) dt + \int_{r_n}^{(1+\alpha)r_n} |u(t) - hV(t)| dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Известно (например, [1, гл. 1, § 12]), что при $\rho > -1$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{rV(r)} \int_0^r V(t) dt = \frac{1}{\rho + 1}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rV(r)} \int_r^{(1+\alpha)r} V(t) dt = \frac{1}{\rho + 1} ((1 + \alpha)^{\rho+1} - 1). \quad (5)$$

Разделим все части неравенства (3) на $r_n V(r_n)$ и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Используя (5), мы получим

$$\frac{h}{\rho + 1} ((1 + \alpha)^{\rho+1} - 1) - \sigma(\alpha) \leq H((1 + \alpha)^{\rho+1} - 1) \leq \frac{h}{\rho + 1} ((1 + \alpha)^{\rho+1} - 1) + \sigma(\alpha). \quad (6)$$

Далее разделим все части неравенства (6) на α и перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow +0$. Мы получим нужное нам равенство. Дальнейшее доказательство лишь необходимыми деталями отличается от одного рассуждения Левина [1, гл. 3, § 2]. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $h = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon = \{t \in [0, \infty) : u(t) \leq -\varepsilon V(t)\}$. Покажем, что $l(E_\varepsilon) = 0$, где

$$l(E_\varepsilon) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1(E_\varepsilon \cap [0, r])}{r}.$$

Пусть A – такое множество линейной плотности нуль на полуоси $[0, \infty)$, что

$$\overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \notin A}} \frac{u(t)}{V(t)} = \overline{\lim}^*_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{V(t)} = h = 0.$$

Пусть ε_1 – произвольное строго положительное число и $R = R(\varepsilon_1)$ – такое число, что при $t \geq R$, $t \notin A$, выполняется неравенство $u(t) \leq \varepsilon_1 V(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^r u(t) dt &\leq \int_0^r \chi_A(t) |u(t)| dt - \varepsilon \int_0^r \chi_{E_\varepsilon}(t) V(t) dt + \varepsilon_1 \int_0^r V(t) dt + \int_0^R |u(t)| dt \\ &\leq \int_0^r \chi_A(t) |u(t)| dt + \int_0^R |u(t)| dt + \varepsilon_1 \int_0^r V(t) dt \\ &\quad - \varepsilon \min_{t \in [r/2, r]} V(t) m_1(E_\varepsilon \cap [r/2, r]). \end{aligned} \quad (7)$$

Из равенства (4), того известного [1, гл. 1, § 12] факта, что предел (1) является равномерным на любом сегменте $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, и неравенства (7) вытекает, что

$$\varepsilon \tau \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1(E_\varepsilon \cap [r/2, r])}{r} \leq \frac{\varepsilon_1}{\rho + 1},$$

где $\tau = \min(1, 2^{-\rho})$. Теперь уже нетрудно доказать нужное равенство $l(E_\varepsilon) = 0$. Далее определяем такую величину:

$$h_1 = \lim^*_{r \rightarrow +\infty} \frac{u(r)}{V(r)} = \sup_E \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E}} \frac{u(r)}{V(r)},$$

где супремум берется по всем множествам E линейной плотности нуль. Легко видеть, что из равенства $l(E_\varepsilon) = 0$ следует равенство $h_1 = 0$. Пусть B – множество линейной плотности нуль на полуоси $[0, \infty)$ такое, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty}^* \frac{u(r)}{V(r)} = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin B}} \frac{u(r)}{V(r)}.$$

Тогда в качестве множества, о котором говорится в утверждении теоремы, можно взять $F = A \cup B$. Теорема доказана.

Мы хотим сформулировать и доказать более стандартный вариант теоремы 1. Для этого нужна некоторая подготовительная работа. Функция $u(r)$ называется *медленно меняющейся относительно уточненного порядка* $\rho(r)$, если

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow +0}} \frac{u(r + \alpha r) - u(r)}{V(r)} = 0.$$

Функция $u(r)$ называется *медленно убывающей относительно уточненного порядка* $\rho(r)$, если

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow +0}} \frac{u(r + \alpha r) - u(r)}{V(r)} \geq 0,$$

и *медленно возрастающей относительно уточненного порядка* $\rho(r)$, если

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow +0}} \frac{u(r + \alpha r) - u(r)}{V(r)} \leq 0.$$

Ясно, что медленно меняющиеся – это те и только те функции, которые являются одновременно медленно убывающими и медленно возрастающими. Ясно также, что возрастающая функция является медленно убывающей относительно любого уточненного порядка. Классы медленно меняющихся и медленно убывающих функций ввел в рассмотрение Шмидт [9], который рассматривал случай $\rho(r) \equiv 0$. Эти классы играют важную роль при доказательстве тауберовых теорем, а в [10, с. 55], где также рассматривается только случай $\rho(r) \equiv 0$, понятие медленно меняющейся функции (там такая функция называется медленно колеблющейся) считают одним из центральных понятий тауберовой теории. Рассмотрим некоторые свойства медленно монотонных функций.

ЛЕММА 1. *Если $u(r)$, $r \in [0, \infty)$, является медленно убывающей или медленно возрастающей относительно уточненного порядка $\rho(r)$ функцией, то*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty}^* \frac{u(r)}{V(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{u(r)}{V(r)}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – медленно убывающая функция, и пусть E – множество линейной плотности нуль такое, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty}^* \frac{u(r)}{V(r)} = \overline{\lim}_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin E}} \frac{u(r)}{V(r)}.$$

Далее пусть $r_n, r_n \rightarrow \infty$, – такая последовательность, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{u(r)}{V(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r_n)}{V(r_n)}.$$

Тогда существует последовательность r'_n со следующими свойствами:

$$r'_n \geq r_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r'_n}{r_n} = 1, \quad r'_n \notin E.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{u(r)}{V(r)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r_n)}{V(r_n)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r'_n)}{V(r'_n)} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r_n) - u(r'_n)}{V(r_n)} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r'_n)}{V(r'_n)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r'_n) - u(r_n)}{V(r_n)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как функция u медленно убывающая, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r'_n) - u(r_n)}{V(r_n)} \geq 0.$$

Мы уже отмечали, что соотношение (1) выполняется равномерно, например, на сегменте $[1/2, 3/2]$. Это дает $\lim_{n \rightarrow \infty} V(r'_n)/V(r_n) = 1$. Теперь из (9) следует, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{V(r)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r'_n)}{V(r'_n)} \leq \overline{\lim}_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E}} \frac{u(r)}{V(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty}^* \frac{u(r)}{V(r)}.$$

Из этого неравенства легко следует равенство (8).

Рассмотрим иной случай. Пусть $u(r)$ – медленно возрастающая функция, а множество E и последовательность r_n те же, что и раньше. Тогда существует последовательность r''_n со свойствами: $r''_n \leq r_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r''_n/r_n = 1$, $r''_n \notin E$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{V(r)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r_n)}{V(r_n)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r''_n)}{V(r''_n)} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r_n) - u(r''_n)}{V(r_n)} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r''_n)}{V(r''_n)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r''_n)}{V(r''_n)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty}^* \frac{u(r)}{V(r)}. \end{aligned}$$

Как мы уже отмечали, из этого неравенства следует равенство (8). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок, функция $u(r)$ медленно убывает относительно уточненного порядка $\rho(r)$ и локально интегрируема на полуоси $[0, \infty)$. Пусть, кроме того, функция

$$I(r) = \frac{1}{rV(r)} \int_0^r u(t) dt$$

ограничена на полуоси $(0, \infty)$. Тогда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|u(r)|}{V(r)} < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$h = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r_n)}{V(r_n)} = +\infty,$$

а $r_n, r_n \rightarrow +\infty$, – такая последовательность, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r_n)}{V(r_n)} = +\infty. \quad (10)$$

Пусть ε – произвольное строго положительное число. Поскольку u – медленно убывающая функция, то существуют числа $R > 0$ и $\delta \in (0, 1/2]$ такие, что при $r \geq R$, $\alpha \in (0, \delta]$ будет выполняться неравенство $u(r + \alpha r) - u(r) \geq -\varepsilon V(r)$. Не ограничивая общности, можно считать, что выполняются неравенства $r_n \geq R$, $n = 1, 2, \dots$. Далее, используя ограниченность $I(r)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{(1+\delta)r_n} u(t) dt &= \int_0^{r_n} u(t) dt + \int_{r_n}^{(1+\delta)r_n} u(t) dt \geq \int_{r_n}^{(1+\delta)r_n} u(t) dt - Mr_n V(r_n) \\ &= \delta r_n u(r_n) + \int_{r_n}^{(1+\delta)r_n} (u(t) - u(r_n)) dt - Mr_n V(r_n) \\ &\geq \delta r_n u(r_n) - \varepsilon \delta r_n V(r_n) - Mr_n V(r_n). \end{aligned}$$

Это неравенство вместе с (10) противоречит ограниченности функции $I(r)$. Таким образом $h < +\infty$.

Далее предположим, что

$$\underline{h} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{u(r)}{V(r)} = -\infty.$$

Пусть теперь r_n – такая последовательность, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(r_n)}{V(r_n)} = -\infty. \quad (11)$$

Пусть величины ε, R, δ такие же, как и раньше. Не ограничивая общности, можно считать, что $(1 - \delta)r_n \geq R$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{r_n} u(t) dt &= \int_0^{(1-\delta)r_n} u(t) dt + \int_{(1-\delta)r_n}^{r_n} u(t) dt \\ &\leq \int_{(1-\delta)r_n}^{r_n} u(t) dt + M(1 - \delta)r_n V((1 - \delta)r_n) \\ &= \delta r_n u(r_n) - \int_{(1-\delta)r_n}^{r_n} (u(r_n) - u(t)) dt + M(1 - \delta)r_n V((1 - \delta)r_n). \end{aligned}$$

В силу выбора чисел ε , R , δ при $t \in [(1 - \delta)r_n, r_n]$ выполняется неравенство

$$u(r_n) - u(t) \geq -\varepsilon V(t).$$

Поэтому

$$\int_0^{r_n} u(t) dt \leq \delta r_n u(r_n) + \varepsilon \int_{(1-\delta)r_n}^{r_n} V(t) dt + M(1 - \delta)r_n V((1 - \delta)r_n).$$

Это неравенство вместе с (11) противоречит ограниченности функции $I(r)$. Тем самым, доказано $-\infty < \underline{h} \leq h < \infty$. Из этого легко следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $u(r)$, $r \in [0, \infty)$, — медленно убывающая функция относительно уточненного порядка $\rho(r)$ и

$$h = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{V(r)} \in (-\infty, \infty).$$

Тогда если

$$\sigma(\alpha) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{rV(r)} \int_r^{(1+\alpha)r} |u(t) - hV(t)| dt,$$

то $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \sigma(\alpha)/\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем пользоваться обозначением $a_+ = \max(a, 0)$. Пусть ε — строго положительное число. Из определений величины h и медленно убывающей функции следует, что существуют числа $R > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $r \geq R$, $t \in [r, (1 + \alpha)r]$, $\alpha \in [0, \delta]$, будут выполняться неравенства

$$u(t) \leq (h + \varepsilon)V(t), \quad u(t) - u(r) \geq -\varepsilon V(r).$$

Считая, что величины r и α удовлетворяют написанным выше условиям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_r^{(1+\alpha)r} |u(t) - hV(t)| dt \\ &= \int_r^{(1+\alpha)r} (hV(t) - u(t)) dt + 2 \int_r^{(1+\alpha)r} (u(t) - hV(t))_+ dt \\ &\leq 2\varepsilon \int_r^{(1+\alpha)r} V(t) dt + h \int_r^{(1+\alpha)r} (V(t) - V(r)) dt + \alpha r (hV(r) - u(r)) \\ &\quad + \int_r^{(1+\alpha)r} (u(r) - u(t)) dt \\ &\leq 2\varepsilon \int_r^{(1+\alpha)r} V(t) dt + h \int_r^{(1+\alpha)r} (V(t) - V(r)) dt \\ &\quad + \alpha r V(r) \left(h - \frac{u(r)}{V(r)} \right) + \varepsilon \alpha r V(r). \end{aligned}$$

Из этого неравенства легко следует утверждение леммы.

Теперь мы сможем легко доказать более стандартный аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho(r)$ – некоторый уточненный порядок,

$$\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) > -1,$$

пусть $u(r)$ – локально интегрируемая и медленно убывающая относительно уточненного порядка $\rho(r)$ функция на полуоси $[0, \infty)$. Тогда из существования конечного предела

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{rV(r)} \int_0^r u(t) dt \quad (12)$$

следует существование предела $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r)/V(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть предел (12) существует. Обозначим

$$h = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{u(r)}{V(r)}.$$

По лемме 2 число h конечное. По лемме 1 оно совпадает с $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty}^* u(r)/V(r)$. Из леммы 2 также следует, что в некоторой окрестности $+\infty$ и для некоторого M выполняется неравенство $|u(t)| \leq MV(t)$. Из этого следует справедливость условия 1) из теоремы 1 для функции $u(t)$. Из леммы 3 следует справедливость условия 2) из теоремы 1. Таким образом, функция $u(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. По теореме 1 существует множество F линейной плотности нуль такое, что

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin F}} \frac{u(r)}{V(r)} = h.$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty}^* \frac{-u(r)}{V(r)} = -h.$$

Если к функции $-u$ применить лемму 1, то получим

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{-u(r)}{V(r)} = -h.$$

Это доказывает теорему.

Скажем несколько слов о предшествующих результатах. В книге [11, гл. 13, § 5] Феллер доказывает лемму, которая отличается от теоремы 2 тем, что условие медленного убывания заменено на более сильное условие возрастания. Приводимая в книге Харди [12] теорема 112 эквивалентна лемме из [11], правда, в [12] рассматривается случай $\rho(r) \equiv \rho > 0$. При этом Харди ссылается на статью Литтлвуда 1910 года. Рассмотрим еще теорему 68 из [12]. Это теорема о рядах. Харди также формулирует интегральный аналог этой теоремы. Он совпадает с теоремой 2, если в теореме 2 взять $\rho(r) \equiv 0$. Из известных теорем наиболее близкой к теореме 1 является следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(r)$ – локально интегрируемая функция на полуоси $[0, \infty)$, $\rho(r)$ – уточненный порядок, $\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) > -1$, причем

$$h = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{u(r)}{V(r)} \in (-\infty, \infty).$$

Тогда из равенства

$$(\rho + 1) \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{rV(r)} \int_0^r u(t) dt = h \quad (13)$$

следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{u(r)}{V(r)} = h.$$

Эта теорема лишь обозначениями отличается от теоремы 2.9.1 из [7]. Авторы книги [7] ссылаются на Левина [1, гл. 3, § 2], который рассматривает функции специального вида, однако, это несущественно. По сравнению с теоремой 1 в теореме 3 требуется выполнение достаточно жесткого ограничения (13). Часть приводимых нами ссылок взята из книг [12], [6], [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [2] Гришин А. Ф., Малютина Т. И. Об уточненном порядке // Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск, 1998. С. 10–24.
- [3] Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul, et en particulier les fonctions à correspondance régulière // Ann. Faculté Sci. Univ. Toulouse. 1913. № 5. P. 117–257.
- [4] Karamata J. Sur un mode de croissance régulière des fonctions // Mathematica (Clyj). 1930. № 4. P. 38–53.
- [5] de Haan L. On Regular Variations and Its Applications to the Weak Convergence of Sample Extremes. Amsterdam: Math. Centre Tract. 32, 1970.
- [6] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [7] Bingham N. H., Goldie C. H., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [8] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и некоторые его приложения к теории целых функций // Матем. сб. 1964. Т. 65. № 107. С. 414–453.
- [9] Schmidt R. Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen // Mat. Z. 1925. № 22. P. 89–152.
- [10] Постников А. Г. Тауберова теория и ее приложения. М.: Наука, 1979.
- [11] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
- [12] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.

Харьковский государственный университет

Поступило
19.02.2001
Исправленный вариант
25.07.2002