Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Галатенко, Е. Д. Лившиц, Обобщенные приближенные слабые жадные алгоритмы, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 186–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:58:12

УДК 517.518+517.988+519.651

ОБОБЩЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ СЛАБЫЕ ЖАДНЫЕ АЛГОРИТМЫ

В. В. Галатенко, Е. Д. Лившиц

Рассмотрены обобщенные приближенные слабые жадные алгоритмы. Основное отличие этих алгоритмов от предложенных Р. Грибонвалем и М. Нилсеном приближенных слабых жадных алгоритмов заключается в том, что ошибки в вычислении коэффициентов можно задавать не только через их относительные, но и через их абсолютные величины. Приведены условия на параметры обобщенных приближенных слабых жадных алгоритмов, достаточные для сходимости полученных в результате применения этого алгоритма разложений к разлагаемому элементу. Показано, что эти условия нельзя существенно ослабить. Исследованы некоторые вопросы сходимости обобщенных приближенных слабых жадных разложений по ортонормированным системам.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Приближенные слабые жадные алгоритмы (AWGA – Approximate Weak Greedy Algorithms), предложенные Грибонвалем и Нилсеном в работе [1], описывают процесс жадных разложений с ошибками в вычислении коэффициентов, характеризуя ошибку ее относительной величиной. Представляется естественным наравне с относительными ошибками рассматривать также абсолютные ошибки.

Начнем с того, что дадим необходимые определения. Пусть $(H, (\cdot, \cdot))$ – гильбертово пространство над полем действительных чисел, множество D элементов H – *словарь* (dictionary), т.е. для любого элемента $d \in D$ справедливо равенство $\|d\| = 1$ и замыкание линейной оболочки D совпадает с H . Пусть также f – некоторый элемент H , $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$ – последовательность чисел из отрезка $[0, 1]$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$ – последовательность действительных неотрицательных чисел, $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность числовых пар. Определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$, последовательность коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность разлагающих элементов $\{e_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$r_0(f) = f. \quad (1)$$

Далее, если уже определен остаток $r_n(f)$, $n \geq 0$, найдем элемент $e_{n+1}(f) \in D$, удовлетворяющий условию

$$|(r_n(f), e_{n+1}(f))| \geq t_{n+1} \sup_{e \in D} |(r_n(f), e)| - q_{n+1}. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00062, и программы “Ведущие научные школы РФ”, грант № НШ-1657.2003.1.

(Если элементов, удовлетворяющих этому условию, несколько, в качестве $e_{n+1}(f)$ выберем любой из них. Если элементов, удовлетворяющих этому условию, не существует, будем говорить, что осуществить разложение не удалось. Отметим, что последний случай возможен, только если $t_{n+1} = 1$ и $q_{n+1} = 0$.) Положим

$$\hat{f}_{n+1} = (r_n(f), e_{n+1}(f))(1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1}, \quad (3)$$

$$r_{n+1}(f) = r_n(f) - \hat{f}_{n+1}e_{n+1}(f) = f - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{f}_k e_k(f). \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Описанный выше процесс будем называть *обобщенным приближенным слабым жадным алгоритмом* (gAWGA – generalized Approximate Weak Greedy Algorithm). Если разложение удалось осуществить, формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n(f)$ будем называть *gAWGA-разложением* элемента f по словарю D с ослабляющими последовательностями $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательностью ошибок $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Последовательность ошибок $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ допускает следующую естественную интерпретацию: если $|\varepsilon_n|$ мал, то ξ_n можно рассматривать как число, характеризующее абсолютную величину ошибки в вычислении коэффициента $\hat{f}_n$; если $|\xi_n|$ мал, то ε_n можно рассматривать как число, характеризующее относительную величину ошибки в вычислении коэффициента $\hat{f}_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Различным парам (ε_n, ξ_n) может соответствовать одна и та же ошибка в вычислении коэффициента $\hat{f}_n$. В то же время, любая ошибка в вычислении $\hat{f}_n$ может быть выражена посредством пары вида $(0, \xi_n)$. Однако используемые для записи вычислительных ошибок обозначения представляются удобными для практических применений, так как при реализации вычислений в некоторых случаях проще получать оценки на относительные величины ошибок, а в некоторых – на абсолютные.

Если $q_n = \xi_n = 0$ для всех натуральных n , то gAWGA совпадает с AWGA. Если для всех натуральных n выполняются равенства $q_n = \xi_n = 0$, $\varepsilon_n = 0$, то gAWGA совпадает со слабым жадным алгоритмом (WGA – Weak Greedy Algorithm; см. [2]). Если $q_n = \xi_n = \varepsilon_n = 0$ и $t_n = 1$ для всех натуральных n , то gAWGA совпадает с чистым жадным алгоритмом (PGA – Pure Greedy Algorithm), известным так же как Projection Pursuit Regression и Matching Pursuit (см. [3], [4]).

Сходимость к разлагаемому элементу PGA-разложений, а также WGA-разложений с $t_n \geq t$, $0 < t < 1$, была установлена в работах Джонса [5], [6] и в работе Рейте и Уолтера [7]. Первое условие на последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\liminf_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, достаточное для сходимости WGA-разложений, было получено Темляковым в статье [2]. Им было показано, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (t_n/n)$ расходится, то для любого гильбертова пространства H и любого словаря $D \subset H$ WGA-разложение любого элемента $f \in H$ с ослабляющей последовательностью $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f . Первое нетривиальное условие на $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимое для сходимости всех WGA-разложений с такой ослабляющей последовательностью, было получено Лившицем и Темляковым в работе [8]. Позднее Темляков получил условие на $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимое и достаточное для того, чтобы для любого гильбертова H , любого словаря $D \subset H$ и любого элемента $f \in H$ WGA-разложение элемента f с ослабляющей последовательностью $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходилось к f (см. [9]). Сходимость AWGA-разложений изучалась Грибонвалом и Нилсеном в статье [1]. В этой работе ими, в частности, было показано, что если для некоторого $\delta > 0$

$\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset [-1, 1 - \delta]$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n(1 - \varepsilon_n^2)}{n}$$

расходится, то AWGA-разложение сходится к разлагаемому элементу. Этот результат был немного улучшен в статье [10], в которой была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 [10]. Пусть для некоторого $\delta > 0$ $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset [-1, 1 - \delta]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n(1 - \varepsilon_n^2)^{1/2}}{n} = \infty.$$

Тогда для любого гильбертова пространства H , любого словаря $D \subset H$ и любого элемента $f \in H$ AWGA-разложение f по системе D с ослабляющей последовательностью $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ и относительными ошибками $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к f .

В настоящей работе доказывается аналогичный результат для gAWGA-разложений. Кроме того, изучаются вопросы возможности ослабления полученных условий, а также исследуется сходимость gAWGA-разложений по ортонормированным системам с параметрами $q_n = \varepsilon_n = 0$, $t_n \geq t$, где $t \in (0, 1]$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

2. Достаточные условия сходимости gAWGA-разложений. В этом пункте формулируется и доказывается обобщение теоремы 1, а также показывается, что входящие в данное обобщение условия на последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ не могут быть значительно ослаблены. При этом рассматриваются гильбертовы пространства не только над полем действительных, но и над полем комплексных чисел (определение gAWGA-разложений в гильбертовых пространствах над $\mathbb{C}$ в точности такое же, как и в гильбертовых пространствах над $\mathbb{R}$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторых чисел $\delta \in (0, 1)$ и $C > 0$ выполняются следующие условия:

$$|\varepsilon_n + \delta| < 1 - \delta, \quad |\operatorname{Im} \varepsilon_n| \leq C(\operatorname{Re} \varepsilon_n + 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Пусть также

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n(1 - |\varepsilon_n|^2)^{1/2}}{n} = \infty, \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n|^2}{1 - |\varepsilon_n|^2} < \infty, \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(1 - |\varepsilon_n|^2) < \infty. \quad (8)$$

Тогда для любого гильбертова пространства H , любого словаря $D \subset H$ и любого элемента $f \in H$ gAWGA-разложение f по D с ослабляющими последовательностями $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ и ошибками $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное гильбертово пространство H , произвольный словарь $D \subset H$ и произвольный элемент $f \in H$. Для упрощения формул разлагающие элементы и остатки gAWGA-разложения элемента f по словарю D с ослабляющими последовательностями $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ и ошибками $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ будем обозначать через e_n и r_n соответственно.

Можно считать, что

$$q_n \leq t_n \sup_{e \in D} |(r_{n-1}(f), e)|$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если это неравенство для некоторых n не выполняется, то заменим $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ на

$$\left\{ \min \left\{ q_n, t_n \sup_{e \in D} |(r_{n-1}(f), e)| \right\} \right\}_{n=1}^\infty.$$

Это изменение не влияет на выбор разлагающих элементов и, таким образом, не меняет разложение.

При доказательстве теоремы 2 используется техника, разработанная Темляковым (см. [2]). Эта техника была также использована в работах [1], [10]. Начнем доказательство с некоторых лемм.

ЛЕММА 1. Для всех целых неотрицательных чисел n справедливо следующее равенство:

$$\|r_{n+1}\|^2 = \|r_n\|^2 - (1 - |\varepsilon_{n+1}|^2) \left| (r_n, e_{n+1}) - \frac{\overline{\varepsilon_{n+1}} \xi_{n+1}}{1 - |\varepsilon_{n+1}|^2} \right|^2 + \frac{|\xi_{n+1}|^2}{1 - |\varepsilon_{n+1}|^2}$$

(черта означает комплексное сопряжение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (3) и (4) следует, что для всех $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ выполняется равенство

$$r_{n+1} = r_n - ((r_n, e_{n+1})(1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1})e_{n+1}.$$

Вычислив скалярные квадраты левой и правой частей этого равенства, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \|r_{n+1}\|^2 &= \|r_n\|^2 - (1 - |\varepsilon_{n+1}|^2) |(r_n, e_{n+1})|^2 \\ &\quad + (r_n, e_{n+1}) \varepsilon_{n+1} \overline{\xi_{n+1}} + \overline{(r_n, e_{n+1})} \varepsilon_{n+1} \xi_{n+1} + |\xi_{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы остается преобразовать последнее соотношение, учитывая, что справедливо неравенство $|\varepsilon_{n+1}| < 1$ и, значит, выражение $1 - |\varepsilon_{n+1}|^2$ не равно нулю.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех целых неотрицательных n справедливо тождество

$$\|f\|^2 - \|r_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \left((1 - |\varepsilon_k|^2) \left| (r_{k-1}, e_k) - \frac{\overline{\varepsilon_k} \xi_k}{1 - |\varepsilon_k|^2} \right|^2 - \frac{|\xi_k|^2}{1 - |\varepsilon_k|^2} \right)$$

(сумму из нуля слагаемых считаем равной нулю), и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |\varepsilon_k|^2) \left| (r_{k-1}, e_k) - \frac{\overline{\varepsilon_k} \xi_k}{1 - |\varepsilon_k|^2} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{1 - |\varepsilon_k|^2} + \|f\|^2 < \infty. \quad (9)$$

ЛЕММА 2. Последовательность квадратов норм $\{\|r_n\|^2\}_{n=1}^\infty$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что для всех целых неотрицательных m и n , $m < n$, справедливо равенство

$$\|r_n\|^2 - \|r_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \left((1 - |\varepsilon_k|^2) \left| (r_{k-1}, e_k) - \frac{\overline{\varepsilon_k} \xi_k}{1 - |\varepsilon_k|^2} \right|^2 - \frac{|\xi_k|^2}{1 - |\varepsilon_k|^2} \right).$$

Используя это равенство, а также неравенства (7) и (9), получаем, что $\{\|r_n\|^2\}_{n=1}^\infty$ является последовательностью Коши и, значит, является сходящейся последовательностью.

ЛЕММА 3. Существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, что последовательность $\{r_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство (9), а также учитывая, что согласно условиям (5) и (7)

$$\left\{ \frac{\overline{\varepsilon_k} \xi_k}{\sqrt{1 - |\varepsilon_k|^2}} \right\}_{k=1}^\infty \in \ell^2,$$

получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |\varepsilon_k|^2) |(r_{k-1}, e_k)|^2 < \infty. \quad (10)$$

Из соотношений (2) и (10) следует, что

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |\varepsilon_k|^2) \left(t_k \sup_{e \in D} |(r_{k-1}, e)| - q_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^\infty (1 - |\varepsilon_k|^2) |(r_{k-1}, e_k)|^2 < \infty.$$

Используя последнее неравенство и условие (8), получаем

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |\varepsilon_k|^2) t_k^2 \sup_{e \in D} |(r_{k-1}, e)|^2 < \infty.$$

Но из условия (6) и неравенства Коши–Буняковского–Шварца следует, что

$$\sum_{k=1}^\infty t_k^2 (1 - |\varepsilon_k|^2) = \infty.$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{r_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющая условию

$$\sup_{e \in D} |(r_{n_k}, e)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Из этого утверждения и равенства $\overline{\text{span}} D = H$ непосредственно вытекает утверждение леммы.

Следующая лемма была доказана Конягиным и Темляковым (см. [2, лемма 2.3]).

ЛЕММА 4 (С.В. Конягин, В.Н. Темляков). Пусть последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$\tau_k \geq 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{k} = \infty.$$

Пусть также последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. Тогда имеет место равенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_n|}{\tau_n} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| = 0$$

(если $\tau_n = 0$ для некоторых n , считаем, что для этих n выражение $(|\alpha_n|/\tau_n) \times \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$ равно бесконечности).

Отметим, что в статье [2] эта лемма была доказана только для случая $\tau_k > 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, но в случае $\tau_k \geq 0$ проходит то же доказательство с незначительными изменениями.

ЛЕММА 5. Существуют такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что неравенства

$$C_1|1 + \varepsilon_n| \leq 1 - |\varepsilon_n|^2 \leq C_2|1 + \varepsilon_n|$$

справедливы для всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выведем искомое утверждение из условия (5). В случае поля действительных чисел это тривиально: условие (5) дает, что для некоторого $\delta \in (0, 1)$ справедливо неравенство $-1 < \varepsilon_n < 1 - 2\delta$, откуда немедленно следует оценка

$$2\delta(1 + \varepsilon_n) < 1 - \varepsilon_n^2 < 2(1 + \varepsilon_n),$$

т.е. в качестве C_1 можно брать число 2δ , а в качестве C_2 – двойку.

Комплексный случай несколько сложнее. Пусть

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z + \delta| < 1 - \delta, |\operatorname{Im} z| \leq C(\operatorname{Re} z + 1)\}$$

(числа δ и C здесь те же, что и в условии (5)). Рассмотрим на множестве K функцию

$$\varphi(z) = \frac{1 - |z|^2}{|1 + z|}.$$

Достаточно доказать, что существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что для всех $z \in K$ справедлива оценка $C_1 \leq \varphi(z) \leq C_2$.

Зафиксируем произвольное число $z \in K$ и запишем его в виде $z = -1 + x + iy$. Тогда значение функции φ в точке z запишется следующим образом:

$$\varphi(z) = \frac{2x - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\frac{2x - x^2 - C^2 x^2}{\sqrt{x^2 + C^2 x^2}} \leq \varphi(z) \leq \frac{2x}{\sqrt{x^2}}.$$

Из этих оценок следует, что существует такое число $\gamma > 0$, что для любого $z \in K \cap \{|1 + z| < \gamma\}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} \leq \varphi(z) \leq 2.$$

Остается заметить, что на замыкании множества $K_1 = K \cap \{|1 + z| \geq \gamma\}$ функция $\varphi(z)$ является непрерывной функцией, принимающей лишь положительные значения. Отсюда в силу компактности замыкания K_1 следует, что существуют такие положительные числа c_1 и c_2 , что для всех $z \in K_1$ справедливо соотношение $c_1 \leq \varphi(z) \leq c_2$. Таким образом, утверждение леммы выполняется с константами

$$C_1 = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}}, c_1 \right\}, \quad C_2 = \max \{2, c_2\}.$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Необходимо показать, что $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для этого, учитывая леммы 2, 3 и тождество

$$\|r_n - r_m\|^2 = \|r_n\|^2 - \|r_m\|^2 - (r_n - r_m, r_m) - (r_m, r_n - r_m),$$

достаточно доказать следующее утверждение:

$$\forall \tilde{\delta} > 0, \quad \forall M \in \mathbb{N} \quad \exists m > M : \quad \forall n < m \quad |(r_n - r_m, r_m)| < \tilde{\delta}. \quad (11)$$

Используя равенство $r_m - r_n = \sum_{k=n+1}^m \hat{f}_k e_k$, формулы (2)–(4), а также неравенство $x \leq (2x)^{1/2}$, $0 \leq x \leq 2$, получаем оценку

$$\begin{aligned} |(r_n - r_m, r_m)| &\leq \sum_{k=n+1}^m |\hat{f}_k| |(r_m, e_k)| \leq \sup_{e \in D} |(r_m, e)| \sum_{k=n+1}^m |\hat{f}_k| \\ &\leq \frac{|(r_m, e_{m+1})| + q_{m+1}}{t_{m+1}} \sum_{k=1}^{m+1} |(1 + \varepsilon_k)(r_{k-1}, e_k) + \xi_k| \\ &\leq 2^{1/2} \frac{|(r_m, e_{m+1})| |1 + \varepsilon_{m+1}|^{1/2} + q_{m+1} |1 + \varepsilon_{m+1}|^{1/2} + |\xi_{m+1}|}{t_{m+1} |1 + \varepsilon_{m+1}|^{1/2}} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{m+1} (|1 + \varepsilon_k|^{1/2} |(r_{k-1}, e_k)| + |\xi_k| + q_k |1 + \varepsilon_k|^{1/2}). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы остается применить лемму 4, положив

$$\tau_k = t_k |1 + \varepsilon_k|^{1/2}, \quad \alpha_k = |1 + \varepsilon_k|^{1/2} |(r_{k-1}, e_k)| + |\xi_k| + q_k |1 + \varepsilon_k|^{1/2}$$

(тот факт, что такие последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условиям леммы 4, следует из условий (6)–(8), соотношения (10) и леммы 5).

Условия (5) и (6) теоремы 2 появились в работах [1] и [10], где и обсуждались некоторые вопросы, связанные с возможностью ослабления этих условий. Что касается новых условий, т.е. условий (7) и (8), то ниже будет показано, что существенно их ослабить нельзя. Точнее, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Существуют гильбертово пространство H , словарь $D \subset H$, элемент $f \in H$ и последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что для некоторого положительного числа C справедливы неравенства

$$|\xi_n| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и gAWGA-разложение элемента f по словарю D с ослабляющими последовательностями $t_n = 1$, $q_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и ошибками $\{(0, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к f .

ТЕОРЕМА 4. Существуют гильбертово пространство H , словарь $D \subset H$, элемент $f \in H$ и последовательность $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что для некоторого положительного числа C справедливы неравенства

$$q_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и gAWGA-разложение элемента f по словарю D с ослабляющими последовательностями $t_n = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ошибками $\varepsilon_n = \xi_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, не сходится к f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим бесконечномерное действительное сепарабельное гильбертово пространство H . Пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H , N – некоторое натуральное число, $N \geq 2$. Для $n \geq N$ рассмотрим векторы

$$f_n = \left(\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n h_k \quad (12)$$

и положим

$$c_n = \|f_{n-1} - f_n\|, \quad g_n = \frac{1}{c_n}(f_{n-1} - f_n).$$

Из определения c_n и g_n непосредственно следует, что $\|g_n\| = 1$ и справедливо равенство

$$f_n = f_{n-1} - c_n g_n.$$

Введем следующее обозначение. Для последовательности $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ будем писать

$$y_n \simeq bn^{\alpha} + cn^{\alpha-1/2}, \quad b \neq 0,$$

если для некоторого действительного числа d

$$y_n = bn^{\alpha} \left(1 + \frac{c/b}{n^{1/2}} + \frac{d}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

В частности, мы будем писать

$$y_n \simeq bn^{\alpha}, \quad b \neq 0,$$

если для некоторого действительного числа d

$$y_n = bn^\alpha \left(1 + \frac{d}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя равенство (12), для $n \geq N + 1$ получаем, что

$$f_{n-1} - f_n = \left(\frac{1}{(n-1)^{1/2}} - \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^{n-1} h_k - \left(\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n} \right) h_n.$$

Отсюда следует, что

$$c_n^2 = (n-1) \left(\frac{1}{(n-1)^{1/2}} - \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{(1 + 1/\sqrt{n})^2}{n} \simeq \frac{1}{n} + \frac{2}{n^{3/2}}$$

и, значит,

$$c_n \simeq \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n}. \quad (13)$$

Векторы g_n , $n \geq N + 1$, могут быть представлены следующим образом:

$$g_n = \alpha_n \sum_{k=1}^{n-1} h_k + \beta_n h_n,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{c_n} (f_{n-1} - f_n, h_{n-1}) \\ &= \left(\frac{1}{(n-1)^{1/2}} - \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n} + \frac{d_1}{n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1/2}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2} + \frac{d_2}{n^{5/2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \left(\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n} + \frac{d_1}{n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1/2}{n} \right) \frac{1 + 2/n^{1/2} + 2d_2/n + O(1/n^{3/2})}{1 + 1/n^{1/2} + d_1/n + O(1/n^{3/2})} \simeq \frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (f_{n-1}, g_n) &= (n-1) \left(\frac{1}{(n-1)^{1/2}} + \frac{1}{n-1} \right) \alpha_n \\ &= (n^{1/2} + 1 + ((n-1)^{1/2} - n^{1/2})) \alpha_n \simeq \frac{1/2}{n^{1/2}} + \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для $n \geq N + 1$ определим числа

$$\xi_{n-N} := -(f_n, g_n) = -(f_{n-1} - c_n g_n, g_n) = c_n - (f_{n-1}, g_n). \quad (15)$$

Учитывая соотношения (13) и (14), получаем, что

$$\xi_{n-N} = c_n - (f_{n-1}, g_n) \simeq \frac{1/2}{n^{1/2}}. \quad (16)$$

Выберем число N настолько большим, что для всех натуральных чисел m, n таких, что $N < n < m$, выполняются неравенства

$$\alpha_n > \alpha_m > 0, \quad (17)$$

$$\xi_{n-N} < \frac{1/2}{n^{1/2}} + \frac{1/2}{n}, \quad (18)$$

$$\frac{1/2}{(n-1)^{1/2}} + \frac{1/2}{n-1} < (f_{n-1}, g_n). \quad (19)$$

Далее выберем такую произвольную нормированную систему $\{g_l\}_{l=1}^N \in H$, что

$$\begin{aligned} \text{span}_{l=1}^N \{g_l\} &= \text{span}_{l=1}^N \{h_l\}, \\ |(g_l, f_N)| &< \frac{1/4}{N^{1/2}}, \quad l = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что система $D = \{g_k\}_{k=1}^\infty$ является словарем.

Докажем, что gAWGA-разложение элемента $f := f_N$ по словарю D с ослабляющими последовательностями $t_n = 1, q_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$, и ошибками $\{(0, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ расходится. Пусть $\{r_n(f)\}_{n=0}^\infty$ и $\{e_n(f)\}_{n=1}^\infty$ — соответственно последовательность остатков и последовательность разлагающих элементов рассматриваемого gAWGA-разложения. Покажем, что для каждого $j \geq 0$ выполняются следующие соотношения:

$$r_j(f) = f_{N+j}, \quad \max_{1 \leq l \leq N+j} |(f_{N+j}, g_l)| \leq \frac{1/2}{(N+j)^{1/2}} + \frac{1/2}{N+j}. \quad (21)$$

Доказательство проведем индукцией по j . При $j = 0$ искомое утверждение непосредственно вытекает из неравенств (20). Предположим, что искомое утверждение справедливо для $j = k$, и покажем, что оно верно для $j = k + 1$.

Представим число k в виде $k = n - N - 1, n \geq N + 1$. Используя неравенства (17), (19), получим, что для всех натуральных $m, m > n$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} |(r_k(f), g_m)| &= |(f_{n-1}, g_m)| = \left(\frac{1}{(n-1)^{1/2}} + \frac{1}{n-1} \right) (n-1) \alpha_m \\ &< \left(\frac{1}{(n-1)^{1/2}} + \frac{1}{n-1} \right) (n-1) \alpha_n = |(f_{n-1}, g_n)| = |(r_k(f), g_n)|, \end{aligned}$$

и согласно соотношению (21) для всех натуральных $l, l < k + N = n - 1$, имеет место оценка

$$|(r_k(f), g_l)| = |(f_{N+k}, g_l)| \leq \frac{1/2}{(n-1)^{1/2}} + \frac{1/2}{n-1} < |(f_{n-1}, g_n)| = |(r_k(f), g_n)|.$$

Следовательно,

$$e_{k+1}(f) = g_n,$$

и согласно формулам (3), (4), (15) и равенству $\varepsilon_{k+1} = 0$

$$\begin{aligned} r_{k+1}(f) &= r_k(f) - ((r_k(f), e_{k+1}(f)) + \xi_{k+1})e_{k+1}(f) \\ &= f_{n-1} - ((f_{n-1}, g_n) + \xi_{n-N})g_n = f_{n-1} - c_n g_n = f_n. \end{aligned}$$

Используя неравенство (18), получим соотношение

$$|(f_n, g_n)| = |(f_{n-1} - ((f_{n-1}, g_n) + \xi_{n-N})g_n, g_n)| = \xi_{n-N} < \frac{1/2}{n^{1/2}} + \frac{1/2}{n}.$$

Наконец, из предположения индукции следует, что для всех натуральных l , $l < n$, выполняется оценка

$$\begin{aligned} |(f_n, g_l)| &= |(f_{n-1}, g_l)| \frac{(f_n, h_{n-1})}{(f_{n-1}, h_{n-1})} = |(f_{n-1}, g_l)| \frac{1/n^{1/2} + 1/n}{1/(n-1)^{1/2} + 1/(n-1)} \\ &\leq \left(\frac{1/2}{(n-1)^{1/2}} + \frac{1/2}{n-1} \right) \frac{1/n^{1/2} + 1/n}{1/(n-1)^{1/2} + 1/(n-1)} = \frac{1/2}{n^{1/2}} + \frac{1/2}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (21) доказаны. Для завершения доказательства теоремы 3 остается заметить, что последовательность $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$, а, значит, и последовательность остатков $\{r_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$, расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Положим $t_n = 1/\ln^2 n$, $n \in \mathbb{N}$. Теорема 1 из работы [8] утверждает, что существуют такие действительное гильбертово пространство H , словарь $D \subset H$ и последовательности $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} \subset H$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$, что для всех целых неотрицательных n справедливы соотношения

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - (r_n, e_{n+1})e_{n+1}, \\ |(r_n, e_{n+1})| &\geq t_{n+1} \sup_{e \in D} |(r_n, e)| \end{aligned} \quad (22)$$

и, кроме того,

$$r_n \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Из неравенств (22) получаем, что для всех целых неотрицательных n выполняется оценка

$$\sup_{e \in D} |(r_n, e)| \leq |(r_n, e_{n+1})| \frac{1}{t_{n+1}}. \quad (24)$$

Для всех $n \geq 0$ положим

$$q_{n+1} = |(r_n, e_{n+1})| \left(\frac{1}{t_{n+1}} - 1 \right). \quad (25)$$

Используя оценку (24) и равенство (25), перепишем соотношение (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} |(r_n, e_{n+1})| &\geq t_{n+1} \sup_{e \in D} |(r_n, e)| = \sup_{e \in D} |(r_n, e)| - (1 - t_{n+1}) \sup_{e \in D} |(r_n, e)| \\ &\geq \sup_{e \in D} |(r_n, e)| - (1 - t_{n+1}) |(r_n, e_{n+1})| \frac{1}{t_{n+1}} = \sup_{e \in D} |(r_n, e)| - q_{n+1}. \end{aligned}$$

Заметим, что этот процесс может быть рассмотрен как gAWGA-разложение элемента $f := r_0$ по словарю D с ослабляющими последовательностями $t_n = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ и нулевыми ошибками. Согласно соотношению (23) это разложение не сходится к разлагаемому элементу. Для завершения доказательства теоремы остается оценить q_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Из доказательства теоремы 1 работы [8] легко может быть получено следующее утверждение: существует такое действительное число C , $C > 0$, что для всех целых неотрицательных n справедливо неравенство

$$|(r_n, e_{n+1})| < C \frac{t_{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

Используя равенство (25), получаем, что для всех натуральных n справедлива оценка

$$q_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

3. gAWGA-разложения по ортонормированным системам. В этом пункте изучаются некоторые вопросы сходимости gAWGA-разложений с параметрами $q_n = 0$, $t_n = t > 0$ и $\varepsilon_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, по ортонормированным базисам. Оказывается, в этом случае ситуации $t = 1$ и $t < 1$ являются принципиально разными. Точнее, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть D – ортонормированный базис, $\xi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $t_n = 1$ и $q_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для всех элементов $f \in H$ gAWGA-разложение f по словарю D с ослабляющими последовательностями $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ и ошибками $\{(0, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к f .

ТЕОРЕМА 6. Для всех $t \in (0, 1)$ существуют гильбертово пространство H , ортонормированный базис $D \subset H$, элемент $f \in H$ и последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ такие, что $\xi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но gAWGA-разложение f по словарю D с ослабляющими последовательностями $t_n = t$, $q_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и ошибками $\{(0, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5 начнем со следующей леммы.

ЛЕММА 6. Пусть D_1 – произвольный словарь, $t_n = 1$, $q_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная ограниченная числовая последовательность. Тогда для любого элемента $f \in H$, любого целого неотрицательного числа l и любого целого неотрицательного числа m остатки gAWGA-разложения f по словарю D_1 с ослабляющими последовательностями $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ и ошибками $\{(0, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяют соотношению

$$\|r_{l+m}(f)\|^2 \leq \|r_l(f)\|^2 + |\xi_{l+m}|^2.$$

В частности, для любого натурального числа m выполняется неравенство

$$\|r_m(f)\|^2 \leq \|f\|^2 + |\xi_m|^2 \leq \|f\|^2 + \sup_{k=1,2,3,\dots} |\xi_k|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного натурального числа k из соотношений (2) и (3) и равенств $t_{k+1} = 1$, $q_{k+1} = 0$, $\varepsilon_k = 0$ имеем

$$|(r_k, e_{k+1})| = \sup_{e \in D} |(r_k, e)| \geq |(r_k, e_k)| = |\xi_k|.$$

Отсюда согласно следствию 1 из леммы 1 и равенствам $\varepsilon_k = 0$, $k = l+1, l+2, \dots, l+m$, получаем, что для всех целых неотрицательных l и всех натуральных m справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|r_{l+m}(f)\|^2 &= \|r_l(f)\|^2 - \sum_{k=l+1}^{l+m} (|(r_{k-1}, e_k)|^2 - |\xi_k|^2) \\ &= \|r_l(f)\|^2 - |(r_l, e_{l+1})|^2 + |\xi_{l+m}|^2 - \sum_{k=l+1}^{l+m-1} (|(r_k, e_{k+1})|^2 - |\xi_k|^2) \\ &\leq \|r_l(f)\|^2 - |\xi_{l+m}|^2. \end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 5. Пусть $D = \{h_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H . Зафиксируем произвольный элемент $f \in H$ и произвольное положительное число ε . Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{ |(f, h_k)| \}_{k=1}^\infty$ не возрастает.

Найдем натуральное число K такое, что

$$K|(f, h_K)|^2 + \sum_{k=K+1}^\infty |(f, h_k)|^2 < \varepsilon \quad (26)$$

(отсюда, в частности, следует, что $|(f, h_K)|^2 < \varepsilon/K$). Далее найдем натуральное число N_1 такое, что для любого $n \geq N_1$ выполняется неравенство $|\xi_n|^2 < \varepsilon/K$.

Положим $N = N_1 + K$. Покажем, что для любого натурального n такого, что $n > N$, выполняется неравенство $\|r_n\|^2 < 2\varepsilon$. Предположим сначала, что $\{e_k(f)\}_{k=1}^n \subset \{h_k\}_{k=1}^K$. В этом случае при всех $k = 1, 2, 3, \dots, K$ будет справедлива оценка

$$|(r_n, h_k)| < \frac{\varepsilon}{K}. \quad (27)$$

Действительно, если $e_{j+1}(f) = h_k$, $1 \leq k \leq K$, то

$$|(r_{j+1}, h_k)| = |\xi_{j+1}|.$$

Отсюда и из выбора чисел N_1 и N вытекает, что, начиная с номера $j = N_1$, количество индексов k из множества $\{1, 2, \dots, K\}$, для которых оценка (27) неверна, при переходе от остатка r_j к остатку r_{j+1} будет уменьшаться на единицу, пока не достигнет нуля. Отсюда в силу соотношения (26) получаем, что

$$\begin{aligned} \|r_n\|^2 &= \sum_{k=1}^\infty |(r_n, h_k)|^2 \leq K \frac{\varepsilon}{K} + \sum_{k=K+1}^\infty |(f, h_k)|^2 \\ &\leq K \frac{\varepsilon}{K} + K|(f, h_K)|^2 + \sum_{k=K+1}^\infty |(f, h_k)|^2 < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $\{e_k(f)\}_{k=1}^n \not\subset \{h_n\}_{n=1}^K$. Пусть l – первый из индексов, удовлетворяющий условию $e_{l+1}(f) \notin \{h_n\}_{n=1}^K$. Тогда имеет место соотношение

$$(r_l, h_k) = (f, h_k), \quad k \geq K + 1. \quad (28)$$

Из формулы (2), равенств $t_k = 1$, $q_k = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, соотношения (28), а также монотонности последовательности $\{|(f, h_k)|\}_{k=1}^\infty$ получаем, что при всех $k = 1, 2, 3, \dots, K$ справедлива оценка

$$|(r_l, h_k)| \leq |(r_l, e_{l+1}(f))| = |(f, e_{l+1}(f))| \leq |(f, h_K)|.$$

Отсюда с учетом соотношений (26) и (28) следует, что

$$\|r_l\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(r_l, h_k)|^2 \leq K |(f, h_K)|^2 + \sum_{k=K+1}^{\infty} |(f, h_k)|^2 < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства, выбора числа N_1 и леммы 6 получаем, что

$$\|r_n\|^2 \leq \|r_l\|^2 + |\xi_n|^2 < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{K} < 2\varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что для всех натуральных n , $n > N$, справедливо неравенство $\|r_n\|^2 < 2\varepsilon$. Следовательно, $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда сразу вытекает утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть H – произвольное сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $D = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольный ортонормированный базис в H . Рассмотрим элемент $f \in H$, имеющий следующие координаты относительно базиса D :

[illegible]

Будем строить последовательность абсолютных ошибок $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и одновременно смотреть на остатки gAWGA-разложений элемента f по словарю D .

Выберем в качестве $e_1(f)$ элемент h_1 и положим $\xi_1 = -1/(2t)$. В таком случае в качестве $e_2(f)$ можно выбрать элемент h_2 . Положим $\xi_2 = -1/(2t)$, тогда

[illegible]

Далее возьмем $e_3(f) = h_1$, $\xi_3 = -1/(2t^2)$, $e_4(f) = h_2$, $\xi_4 = -1/(2t^2)$. Остаток $r_4(f)$ будет иметь координаты

[illegible]

Продолжим аналогичным образом изменять первые две координаты остатков до тех пор, пока эти координаты не станут больше единицы. Пусть n_1 – это то самое число, для которого

[illegible]

$a > 1$, но $at \leq 1$. Далее, возьмем в качестве e_{n_1+1} элемент h_1 , положим $\xi_{n_1+1} = 0$, возьмем в качестве e_{n_1+2} элемент h_2 и положим $\xi_{n_1+2} = 0$. Имеем

$$r_{n_1+2} = \left(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots\right).$$

Далее будем изменять третью, четвертую, пятую и шестую координаты остатков. Возьмем в качестве e_{n_1+3} элемент h_3 и положим $\xi_{n_1+3} = -1/(4t)$, аналогично положим $e_{n_1+4} = h_4$, $\xi_{n_1+4} = -1/(4t)$, $e_{n_1+5} = h_5$, $\xi_{n_1+5} = -1/(4t)$, $e_{n_1+6} = h_3$, $\xi_{n_1+6} = -1/(4t)$. Остаток $r_{n_1+6}(f)$ имеет координаты

$$r_{n_1+6}(f) = \left(0, 0, \frac{1}{4t}, \frac{1}{4t}, \frac{1}{4t}, \frac{1}{4t}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots\right).$$

Следующие четыре шага сделаем следующим образом: $e_{n_1+7} = h_3$, $\xi_{n_1+7} = -1/(4t^2)$, $e_{n_1+8} = h_4$, $\xi_{n_1+8} = -1/(4t^2)$, $e_{n_1+9} = h_5$, $\xi_{n_1+9} = -1/(4t^2)$, $e_{n_1+10} = h_3$, $\xi_{n_1+10} = -1/(4t^2)$. После этих шагов остаток примет вид

$$r_{n_1+10}(f) = \left(0, 0, \frac{1}{4t^2}, \frac{1}{4t^2}, \frac{1}{4t^2}, \frac{1}{4t^2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots\right).$$

Продолжим аналогичным образом изменять координаты остатков с третьей по шестую до тех пор, пока эти координаты не станут больше $1/2$. Пусть n_2 – то самое число, для которого

$$r_{n_1} = \left(0, 0, b, b, b, b, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots\right),$$

$b > 1/2$, но $bt \leq 1/2$. Далее положим $e_{n_2+1} = h_3$, $\xi_{n_2+1} = 0$, $e_{n_2+2} = h_4$, $\xi_{n_2+2} = 0$, $e_{n_2+3} = h_5$, $\xi_{n_2+3} = 0$, $e_{n_2+4} = h_6$, $\xi_{n_2+4} = 0$ и перейдем к следующему блоку. Используя ту же технику, будем изменять следующие восемь координат остатков (с седьмой по четырнадцатую) до тех пор, пока эти координаты не станут больше $1/3$. Обозначим номер последнего сделанного шага через n_3 . Далее сделаем восемь шагов с нулевыми ошибками и перейдем к четвертому блоку координат (координаты с пятнадцатой по тридцатую), затем к пятому (координаты с номерами 31–62) и так далее (будем увеличивать координаты m -го блока до тех пор, пока эти координаты не станут больше $1/m$, а затем обнулим координаты этого блока). Пусть n_m – номер последнего шага при увеличении абсолютных величин координат m -го блока.

Построение закончено. Остается показать, что $\xi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и что последовательность остатков $\{r_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится. Первое утверждение следует из того, что наибольшая ошибка при изменении m -го координатного блока не превосходит $1/(mt)$, второе утверждение следует из неравенства

$$\|r_{n_m}(f)\|^2 > \frac{2^m}{m^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следующее утверждение дополняет теорему 6.

В условиях теоремы 6 существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $r_{n_k}(f) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, или, эквивалентно,

$$\sum_{j=1}^{n_k} \hat{f}_j e_j \rightarrow f, \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теоремах 2 и 5 предполагается, что рассматриваемые gAWGA-разложения осуществимы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gribonval R., Nielsen M. Approximate weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 2001. V. 14. № 4. P. 361–378.
- [2] Temlyakov V. N. Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 2000. V. 12. № 2–3. P. 213–227.
- [3] Friedman J. H., Stuevzle W. Projection pursuit regression // J. Amer. Statist. Assoc. 1981. V. 76. P. 817–823.
- [4] Mallat S., Zhang Z. Matching pursuit with time-frequency dictionaries // IEEE Trans. Signal Process. 1993. V. 41. № 12. P. 3397–3415.
- [5] Jones L. K. On a conjecture of Huber concerning the convergence of PP-regression // Ann. Statist. 1987. V. 15. P. 880–882.
- [6] Jones L. A simple lemma on greedy approximation in Hilbert space and convergence rates for projection pursuit regression and network training // Ann. Statist. 1992. V. 20. P. 608–613.
- [7] Rejtő L., Walter G. G. Remarks on projection pursuit regression and density estimation // Stochastic Anal. Appl. 1992. V. 10. P. 213–222.
- [8] Лившиц Е. Д., Темляков В. Н. О сходимости слабого гриди-алгоритма // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 236–247.
- [9] Temlyakov V. N. A criterion for convergence of weak greedy algorithms // Preprint at <http://www.math.sc.edu/~imip/00.html>.
- [10] Galatenko V. V., Livshitz E. D. On the convergence of approximate weak greedy algorithms // East J. Approx. 2003. V. 9. № 1. P. 43–49.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vvgalatenko@yahoo.com, livshitz@rambler.ru

Поступило
08.04.2004