Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Мальдони, В. А. Скворцов, Несобственный интеграл Римана и интеграл Хенстока в $\mathbb{R}^n$, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 251–258

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:56:15

УДК 517.382+517.518.126

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА И ИНТЕГРАЛ ХЕНСТОКА В $\mathbb{R}^n$

П. Мальдони, В. А. Скворцов

Изучается интеграл Хенстока в $\mathbb{R}^n$ и его связь с n -мерным несобственным интегралом Римана. Получено условие интегрируемости по Хенстоку функции на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ типа теоремы Хаке.

Библиография: 5 названий.

В данной заметке мы рассматриваем аналог теоремы Хаке для интеграла Хенстока в $\mathbb{R}^n$ и применяем ее для установления взаимосвязи между этим интегралом и несобственным n -мерным интегралом Римана. Для интеграла Хенстока в $\mathbb{R}$ теорема Хаке известна в следующем варианте (см. [1, теоремы 16.5 и 16.7]).

ТЕОРЕМА А. *Функция f интегрируема по Хенстоку на всей действительной прямой $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда f интегрируема по Хенстоку на каждом компактном интервале $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и существует конечный предел*

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f = A.$$

Частным случаем этой теоремы является следующий хорошо известный факт.

ТЕОРЕМА В. *Если функция f интегрируема на $\mathbb{R}$ в несобственном смысле по Риману, то она интегрируема и по Хенстоку на $\mathbb{R}$, причем значения интегралов совпадают.*

Теорема А показывает также, что интеграл Хенстока и несобственный интеграл Хенстока на $\mathbb{R}$ эквивалентны (в отличие от интеграла Лебега на $\mathbb{R}$).

Общая идея определения несобственного интеграла как предела интегралов по расширяющейся совокупности множеств $\{A_\alpha\}$ может быть реализована в многомерном случае различными способами в зависимости от того, какое семейство $\{A_\alpha\}$ выбрано

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00206, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ 1657.2003.1, Британского Совета и Комитета научных исследований (KBN, Польша).

в качестве обобщения компактных интервалов, фигурирующих в одномерной конструкции. Наиболее естественным было бы заменить одномерные интервалы n -мерными, т.е. определить несобственный интеграл Римана в $\mathbb{R}^n$ как предел

$$\lim_{a_1, \dots, a_n \rightarrow -\infty} \lim_{b_1, \dots, b_n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f. \quad (1)$$

К сожалению при таком определении несобственного интеграла в $\mathbb{R}^n$ теорема В не переносится на n -мерный случай при $n > 1$ (см. ниже пример 1). Другой (наиболее распространенный) способ определения несобственного интеграла Римана в $\mathbb{R}^n$ (см. [2] или [3]) предполагает использование в качестве $\{A_\alpha\}$ семейства областей столь общего вида, что в результате получается абсолютно сходящийся несобственный интеграл, который, тем самым, не является прямым обобщением одномерного несобственного интеграла. При таком определении соответствующая версия теоремы В будет, конечно, верна, но это будет теорема об абсолютных интегралах и, следовательно, ее нельзя будет рассматривать в качестве обобщения теоремы В, касающейся неабсолютных интегралов. Таким образом, семейство n -мерных компактных интервалов оказывается слишком узким, а семейство всех компактных областей – слишком широким, чтобы получить несобственный интеграл, для которого справедливо соответствующее n -мерное обобщение теоремы В.

Здесь мы получим такое обобщение теоремы В в качестве следствия из доказанной ниже теоремы 1, представляющей собой вариант теоремы Хаке для интеграла Хенстока в $\mathbb{R}^n$. По поводу теоремы Хаке для компактных областей см. [4].

Приведем необходимые обозначения и определения. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ и $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Мы будем рассматривать на $\mathbb{R}$ интервалы I вида

$$(-\infty, a], \quad \text{или} \quad [u, v], \quad \text{или} \quad [b, \infty).$$

Для каждого из таких интервалов пару точка–интервал (x, I) назовем *ассоциированной*, если

$$x = -\infty, \quad \text{или} \quad x \in [u, v], \quad \text{или} \quad x = \infty,$$

соответственно. В каждом из этих случаев назовем точку x *отмеченной точкой* интервала I . В суммах Римана значения функции будут браться в отмеченных точках x , а интервалы I будут образовывать разбиение области интегрирования. Функцию $\delta: E \mapsto \mathbb{R}_+$ назовем *масштабной функцией на множестве* $E \subseteq \mathbb{R}$. При данной масштабной функции δ ассоциированную пару (x, I) назовем *согласованной с δ* при выполнении следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \text{если } I = (-\infty, a], \quad & \text{то } a < -\frac{1}{\delta(x)} \quad \text{и} \quad x = -\infty; \\ \text{если } I = [u, v], \quad & \text{то } v - u < \delta(x) \quad \text{и} \quad u \leq x \leq v; \\ \text{если } I = [b, \infty), \quad & \text{то } b > \frac{1}{\delta(x)} \quad \text{и} \quad x = \infty. \end{aligned}$$

Интервал или конечное объединение интервалов будем называть *элементарным множеством* (или *фигурой*). В частности, вся действительная прямая $\mathbb{R}$ является элементарным множеством. Конечное семейство $\mathcal{P}$ ассоциированных пар (x, I) с отмеченными точками из некоторого множества X назовем *отмеченным разбиением на X* , если интервалы $\{I\}$ не перекрываются. Отмеченное разбиение $\mathcal{P} = \{(x, I)\}$ на элементарном множестве E назовем *разбиением множества E* , если $\bigcup \{I : (x, I) \in \mathcal{P}\} = E$. Скажем, что отмеченное разбиение $\mathcal{P}$ *согласовано с δ* (или является δ -*разбиением*), если каждая пара $(x, I) \in \mathcal{P}$ согласована с δ .

Для рассмотрения интеграла в $\mathbb{R}^n$ введенные выше обозначения следует соответствующим образом обобщить. Пространство $\overline{\mathbb{R}}^n$ — это $\overline{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{R}}$; точка x в $\overline{\mathbb{R}}^n$ — это $(x_1, \dots, x_n)$, где $x_j \in \overline{\mathbb{R}}$; интервал I в $\mathbb{R}^n$ определяется как $I_1 \times \cdots \times I_n$, где I_j при каждом j является интервалом в $\mathbb{R}$ в описанном выше смысле. Точка x и интервал I образуют ассоциированную пару в $\mathbb{R}^n$, если каждая пара (x_j, I_j) является ассоциированной в $\mathbb{R}$. При этом x является отмеченной точкой. Элементарным множеством E в $\mathbb{R}^n$ является интервал или конечное объединение интервалов. При заданной масштабной функции $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ассоциированная пара (x, I) согласована с δ в $\mathbb{R}^n$, если каждая пара (x_j, I_j) согласована с δ в $\mathbb{R}$. Определения отмеченного разбиения на множестве, разбиения множества и δ -разбиения дословно повторяют соответствующие одномерные определения. Если F — элементарное множество, то ∂F обозначает его границу, а $\mathring{F}$ — множество его внутренних точек.

Пусть h обозначает действительно- или комплекснозначную функцию, определенную на множестве ассоциированных пар (x, I) . В частности $h(x, I)$ может иметь вид $f(x)|I|$, где f — функция точки; или же h может быть функцией интервала, не зависящей от отмеченной точки x . При фиксированном отмеченном разбиении $\mathcal{P} = \{(x, I)\}$ элементарного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ введем следующее обозначение для сумм Римана, соответствующих этому разбиению:

$$S(h, \mathcal{P}) = \sum \{h(x, I) : (x, I) \in \mathcal{P}, x \notin \overline{\mathbb{R}}^n \setminus \mathbb{R}^n\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция h *интегрируема по Хенстоку* (или *H -интегрируема*) на E со значением интеграла $\int_E h = A$, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует масштабная функция δ на E такая, что для любого δ -разбиения $\mathcal{P}$ множества E выполняется неравенство

$$|S(h, \mathcal{P}) - A| < \varepsilon.$$

Заметим, что мы не включили в сумму Римана слагаемые, соответствующие парам (x, I) , у которых $x \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Это равносильно соглашению, что $h(x, I) = 0$ для таких пар. Очевидно, что в случае компактного элементарного множества E каждая интегрируемая по Риману функция является также H -интегрируемой на E и значения интегралов совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. При фиксированной масштабной функции δ , заданной на $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus \mathbb{R}^n$, элементарное множество O назовем δ -*окаймлением*, если $O = \bigcup_{j=1}^k I_j$, где $\{(x_j, I_j)\}_{j=1}^k$ представляет собой отмеченное δ -разбиение на $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus \mathbb{R}^n$ и при этом дополнение $E_O := \mathbb{R}^n \setminus O$ является ограниченным элементарным множеством.

ТЕОРЕМА 1. Функция h является H -интегрируемой на $\mathbb{R}^n$ и ее интеграл равен числу A тогда и только тогда, когда каждому $\varepsilon > 0$ соответствует масштабная функция δ на $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \mathbb{R}^n$ такая, что для любого δ -окаймления O , функция h H -интегрируема на $E_O = \mathbb{R}^n \setminus O$ и

$$\left| \int_{E_O} h - A \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h интегрируема на $\mathbb{R}^n$ с H -интегралом $A = \int_{\mathbb{R}^n} h$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в соответствии с определением H -интеграла существует масштабная функция δ такая, что для любого δ -разбиения $\mathcal{P}$ множества $\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|S(h, \mathcal{P}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Зафиксируем произвольное δ -окаймление O и рассмотрим его дополнение $E_O = \mathbb{R}^n \setminus O$. Тогда h H -интегрируема на E_O (см. теорему 5.1 в [5]), и поэтому существует масштабная функция δ_0 на E_O такая, что для любого δ_0 -разбиения $\mathcal{E}$ множества E_O ,

$$\left| S(h, \mathcal{E}) - \int_{E_O} h \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Мы можем предположить, что $\delta_0 \leq \delta$, так что, объединив разбиение, образующее окаймление O , с δ_0 -разбиением множества E_O , мы получим δ -разбиение всего пространства $\mathbb{R}^n$, и для этого разбиения выполняется (3). При этом $S(h, \mathcal{P}) = S(h, \mathcal{E})$. Суммируя (3) и (4), получаем (2).

Обратно, пусть существует число A такое, что любому $\varepsilon > 0$ соответствует функция $\delta': \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что для любого δ' -окаймления O функция h является H -интегрируемой на $E_O = \mathbb{R}^n \setminus O$ и выполнено неравенство

$$\left| \int_{E_O} h - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Легко понять, что тогда h является H -интегрируемой на каждом ограниченном элементарном множестве E . Обозначим

$$E_k = [-k, k] \times \cdots \times [-k, k] \quad \text{и} \quad F_k = \overset{\circ}{E}_k \setminus \overset{\circ}{E}_{k-1},$$

(пусть при этом $E_0 = \emptyset$). Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \mathbb{R}^n, \quad F_k \cap F_m = \emptyset, \quad k \neq m,$$

и h H -интегрируема на каждом E_k . Пусть масштабная функция δ_k на E_k такова, что для любого δ_k -разбиения $\mathcal{P}_k$ множества E_k выполняется неравенство

$$\left| S(h, \mathcal{P}_k) - \int_{E_k} h \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \quad (6)$$

По лемме Сакса–Хенстока (см. теорему 5.3 в [5]) вместо разбиения $\mathcal{P}_k$ в (6) может участвовать любое его подразбиение, а вместо E_k – сумма интервалов из этого подразбиения. Определим теперь масштабную функцию δ на $\mathbb{R}^n$, положив

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta'(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n, \\ \min\{\delta_k(x), \rho(x, \partial E_k)\}, & \text{если } x \in F_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Возьмем любое δ -разбиение $\mathcal{P}$ пространства $\mathbb{R}^n$ и рассмотрим соответствующую сумму Римана $S(h, \mathcal{P})$. Пусть $\mathcal{P}_O \subset \mathcal{P}$ является подразбиением, образованным всеми элементами $\mathcal{P}$, отмеченными в $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$, пусть O – соответствующее δ -окаймление и $E_O = \mathbb{R}^n \setminus O$. Из определения δ следует, что если $x \in F_k$, то ассоциированный с x интервал I в паре $(x, I) \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_O$ содержится целиком в E_k . Сгруппируем теперь слагаемые в $S(h, \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_O)$, объединяя члены, соответствующие парам (x, I) , отмеченным в одном и том же множестве F_k . Эти пары образуют подразбиение π_k δ -разбиения $\mathcal{P}_k$, для которого выполнено неравенство (6), если в нем вместо $\mathcal{P}_k$ подставить π_k , а E_k заменить фигурой G_k , образованной всеми интервалами из подразбиения π_k . Заметим, что $G_k \subset E_k$ и $\bigcup_k G_k = E_O$. Мы получим

$$S(h, \mathcal{P}) = S(h, \mathcal{P}_O) + \sum_{k=1}^{\infty} S(h, \pi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} S(h, \pi_k) \quad \text{и} \quad \int_{E_O} h = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{G_k} h.$$

В обоих случаях суммы фактически содержат лишь конечное число членов. Суммируя неравенства (5) и (6), с учетом упомянутой выше замены мы приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} |S(h, \mathcal{P}) - A| &= \left| \sum_k S(h, \pi_k) - \sum_k \int_{G_k} h \right| + \left| \int_{E_O} h - A \right| \\ &\leq \sum_k \left| S(h, \pi_k) - \int_{G_k} h \right| + \left| \int_{E_O} h - A \right| \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым, теорема доказана.

Непосредственным следствием доказанной теоремы является

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на каждом компактном элементарном множестве в $\mathbb{R}^n$, то f H -интегрируема на $\mathbb{R}^n$ и интеграл равен A тогда и только тогда, когда каждому $\varepsilon > 0$ соответствует масштабная функция δ на $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ такая, что для любого δ -окаймления O выполняется неравенство

$$\left| (R) \int_{\mathbb{R}^n \setminus O} f - A \right| < \varepsilon.$$

Ниже мы приведем пример, показывающий, что в теореме 2 в части достаточности переход к пределу относительно масштабных функций нельзя заменить пределом, фигурирующим в (1). Но стоит заметить, что в случае, когда h абсолютно H -интегрируема, предел в (1) восстанавливает значение H -интеграла. А именно, из теоремы 1 (см. также теоремы 5.4 и 5.11 из [5]) вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если $|h|$ является H -интегрируемой на $\mathbb{R}^n$, то H -интеграл от h по $\mathbb{R}^n$ равен A тогда и только тогда, когда

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} h \rightarrow A \quad \text{при} \quad a_i \rightarrow -\infty, \quad b_i \rightarrow \infty, \quad 1 \leq i \leq n.$$

ПРИМЕР 1. Мы построим пример функции в $\mathbb{R}^2$, которая интегрируема по Риману на каждом компактном интервале, для которой существует предел выражения (1), но которая не является H -интегрируемой на $\mathbb{R}^2$.

Используя двоичные интервалы $I_j^k = [j/2^k, (j+1)/2^k)$, построим для каждого $k \geq 0$ и $0 \leq j \leq 2^{2k} - 1$ двумерные интервалы:

$$\begin{aligned} J_{1,2j}^k &= \left[k, k + \frac{1}{2} \right) \times I_{2j}^{2k+1}, & J_{1,2j+1}^k &= \left[k, k + \frac{1}{2} \right) \times I_{2j+1}^{2k+1}, \\ J_{2,2j}^k &= \left[k + \frac{1}{2}, k + 1 \right) \times I_{2j}^{2k+1}, & J_{2,2j+1}^k &= \left[k + \frac{1}{2}, k + 1 \right) \times I_{2j+1}^{2k+1}. \end{aligned}$$

Функцию f определим на $\mathbb{R}^2$, положив $f(x, y) = 0$, если $(x, y) \notin [0, \infty) \times [0, 1)$ и

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{k+2}, & \text{если } x \in J_{1,2j}^k \cup J_{2,2j+1}^k, \\ -2^{k+2}, & \text{если } x \in J_{1,2j+1}^k \cup J_{2,2j}^k. \end{cases}$$

Непосредственно из определения

$$\int_{J_{p,q}^k} f = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & \text{если } p = 1, q = 2j \text{ или } p = 2, q = 2j + 1, \\ -\frac{1}{2^k}, & \text{если } p = 1, q = 2j + 1 \text{ или } p = 2, q = 2j. \end{cases}$$

Очевидно, что функция f интегрируема по Риману на любом компактном интервале. Легко проверить, используя расстановку знаков в шахматном порядке в приведенном выше определении функции, что

$$\int_0^a dx \int_b^c f(x, y) dy = 0$$

при любых $a \geq 1, b \leq 0, c \geq 1$; и поэтому несобственный интеграл Римана (в смысле определения (1)) существует и равен нулю. Отметим также, что для любого натурального k и для любых действительных b и $c, b \leq c$,

$$\int_0^k dx \int_b^c f(x, y) dy = 0. \quad (7)$$

С другой стороны, для любого натурального k и для любого $j = 0, 1, 2, \dots, 2^{2k} - 1$,

$$\int_0^{k+1/2} dx \int_{I_{2j}^{2k+1}} f(x, y) dy = \frac{1}{2^k}. \quad (8)$$

Каждый интервал I_i^k содержит 2^k интервалов

$$I_{2^k i}^{2^{k+1}}, \quad 2^k i \leq j \leq 2^k i + 2^k - 1.$$

Отсюда и из (8) для любого натурального k и любого $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ получаем

$$\sum_{j=2^k i}^{2^k i + 2^k - 1} \int_0^{k+1/2} dx \int_{I_{2^k j}^{2^{k+1}}} f(x, y) dy = 1. \quad (9)$$

Покажем теперь, что f не интегрируема по Хенстоку на $\mathbb{R}^2$. Воспользуемся теоремой 1. Предположим, что f интегрируема и возьмем масштабную функцию δ на $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus \mathbb{R}^n$, соответствующую $\varepsilon = 1/2$, так, что для любого δ -окаймления O выполняется неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus O} f - \int_{\mathbb{R}^2} f \right| < \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Чтобы прийти к противоречию, сравним два δ -окаймления, построенных следующим образом. Положим

$$T_n = \left\{ y \in (0, 1) : \delta((\infty, y)) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

По теореме Бэра о категориях найдем такой интервал $I \subset (0, 1)$, что при некотором n множество T_n плотно в I . Выберем $k > n$ так, чтобы $I_{j_0}^k \subset I$ при некотором j_0 . Тогда интервалы

$$\left[k + \frac{1}{2}, \infty \right) \times I_{2^k j}^{2^{k+1}}, \quad I_{2^k j}^{2^{k+1}} \subset I_{j_0}^k,$$

ассоциированные с точками (∞, y_{2j}) при $y_{2j} \in I_{2^k j}^{2^{k+1}} \cap T_n$ образуют согласованные с δ пары, поскольку

$$k + \frac{1}{2} > n \geq \frac{1}{\delta((\infty, y_{2j}))} \quad \text{и} \quad |I_{2^k j}^{2^{k+1}}| = \frac{1}{2^{2k+1}} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} \leq \delta((\infty, y_{2j})).$$

Эти интервалы мы включим в окаймление O . Кроме того, в это же окаймление мы включим интервалы, выбранные следующим образом. Для отмеченных точек вида (∞, y) в качестве ассоциированных с ними интервалов возьмем интервалы $[m, \infty) \times [b, c]$ при некотором $m > 1/\delta((\infty, y))$. Для отмеченных точек вида $(-\infty, y)$, (x, ∞) и $(x, -\infty)$ ассоциированные с ними интервалы можно выбрать произвольно, лишь бы они не пересекались с носителем функции f , т.е. с множеством $[0, \infty] \times [0, 1]$. Для этого окаймления O в силу (7) и (9) выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus O} f(x, y) dx dy = 1. \quad (11)$$

Другое δ -окаймление O' для того же δ получим, заменив каждый интервал $[k+1/2, \infty) \times I_{2j}^{2k+1}$ в O меньшим интервалом $[k+1, \infty) \times I_{2j}^{2k+1}$ и сохраняя все остальные интервалы, составляющие O . Тогда с учетом (7) получим

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus O'} f(x, y) dy = 0. \quad (12)$$

Поскольку масштабная функция δ была выбрана для $\varepsilon = 1/2$, то соотношения (11) и (12) приводят к тому, что неравенство (10) не может выполняться для окаймлений O и O' одновременно. Полученное противоречие показывает, что f не интегрируема по Хенстоку на $\mathbb{R}^2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bartle R. A Modern Theory of Integration. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001.
- [2] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.—СПб.: Физматлит, 2002.
- [3] Зорич В. А. Математический анализ. Т. 2. М.: МЦНМО, 2002.
- [4] Faure C.-A., Mawhin J. The Hake's property for some integrals over multidimensional intervals // Real Analysis Exchange. 1994/5. V. 20. № 2. P. 622–630.
- [5] Henstock R. Lectures on the Theory of Integration. Singapore: World Scientific, 1988.

(П. Мальдони) Magee College, University of Ulster, Великобритания

Поступило

(В. А. Скворцов) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

12.05.2004

E-mail: P.Muldowney@ulster.ac.uk, vaskvor2000@yahoo.com,