Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Поляков, Об R -универсальных функциях, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 259–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:53:09

УДК 510.6

ОБ R -УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

Е. А. Поляков

Доказано, что тип ρ -сходства R -универсальной функции ($R \neq \emptyset, \mathbb{N}$) состоит из одного типа изоморфизма, но более чем из одного типа ρ -рекурсивного изоморфизма.

Библиография: 3 названия.

Как обычно, $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел $\{0, 1, 2, \dots\}$. Если $A \subseteq \mathbb{N}$, то $\bar{A} = \mathbb{N} \setminus A$. Под функцией, если не оговорено противное, будем понимать одноместную частично рекурсивную функцию (ЧРФ). Обозначать ЧРФ будем греческими буквами: $\alpha, \beta, \dots$, а рекурсивные функции – латинскими: $f, g, h, \dots$. Пусть $\delta\alpha, \rho\alpha, \tau\alpha$ обозначают соответственно область определения, область значений, график функции α ; $\alpha^a = \{x \mid \alpha(x) = a\}$ – a -уровень функции α ; φ_x – ЧРФ с гёделевым номером x . Будем писать $\alpha(x)$, если значение $\alpha(x)$ определено, и $\alpha(x) \uparrow$ в противном случае. Через $|A|$ обозначим мощность множества A .

На множестве всех одноместных ЧРФ определим пять отношений эквивалентности: сходство, ρ -сходство, изоморфизм, рекурсивный изоморфизм и ρ -рекурсивный изоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ЧРФ α *сходна* с β (обозначение: $\alpha \sim \beta$), если существуют рекурсивные перестановки f и g такие, что $\alpha = f\beta g$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ЧРФ α ρ -*сходна* с β (обозначение: $\alpha \sim_\rho \beta$), если существуют рекурсивные перестановки f с условием $f(\rho\alpha) = \rho\alpha$ и g такие, что $\alpha = f\beta g$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. ЧРФ α *изоморфна* β (обозначение: $\alpha \approx \beta$), если существует рекурсивная перестановка f такая, что $\alpha = \beta f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. ЧРФ α *рекурсивно изоморфна* β (обозначение: $\alpha \equiv \beta$), если существует рекурсивная перестановка f такая, что $\alpha = f^{-1}\beta f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. ЧРФ α ρ -*рекурсивно изоморфна* β (обозначение: $\alpha \equiv_\rho \beta$), если существует рекурсивная перестановка f с условием $f(\rho\alpha) = \rho\alpha$ такая, что $\alpha = f^{-1}\beta f$.

Очевидно,

$$\alpha \approx \beta \implies \alpha \sim_\rho \beta \implies \alpha \sim \beta, \quad \alpha \equiv_\rho \beta \implies \alpha \equiv \beta, \quad \alpha \equiv_\rho \beta \implies \alpha \sim_\rho \beta,$$

для любых ЧРФ α, β . Классы эквивалентных элементов будем называть соответственно *типами* сходства, ρ -сходства, изоморфизма, рекурсивного изоморфизма и ρ -рекурсивного изоморфизма.

Если α, β – ЧРФ, то говорим, что α *m-сводим* к β (обозначение: $\alpha \leq_m \beta$), если существует рекурсивная функция f такая, что $\alpha = \beta f$.

ЧРФ ψ назовем *универсальной (m-полной)*, если для любой ЧРФ α имеет место $\alpha \leq_m \psi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. ЧРФ α назовем *R-универсальной*, если R – рекурсивно перечислимое (РП) множество, $\rho\alpha = R$ и для любой ЧРФ β $\rho\beta \subseteq R \implies \beta \leq_m \alpha$.

Настоящая работа посвящена изучению свойств *R-универсальных функций*. Отметим несколько из полученных результатов:

- 1) свойство функции быть *R-универсальной* инвариантно относительно ρ -сходства;
- 2) если $R \neq \emptyset, N$, то тип ρ -сходства *R-универсальной функции* состоит более, чем из одного типа ρ -рекурсивного изоморфизма;
- 3) если $|R| \geq 2$, то *R-универсальная функция* не имеет рекурсивных доопределений.

Хорошо известно (см. [1]), что любые две *R-универсальные функции* изоморфны. С точностью до изоморфизма для произвольного РП множества R *R-универсальной функцией* будет

$$\psi_R(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } \psi(x) \in R; \\ \uparrow & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где ψ – универсальная функция. Действительно, если α – ЧРФ и $\rho\alpha \subseteq R$, то $\alpha(x) = \psi f(x)$ для некоторой рекурсивной функции f . Имеем $\alpha_R(x) = (\psi f)_R(x)$, откуда $\alpha(x) = \psi_R f(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) Если γ – *R-универсальная функция* и g – рекурсивная функция с $\rho g = N$, то γg *R-универсальна*.

б) Пусть f – рекурсивная перестановка, R – РП множество и $f(R) = R'$. Тогда ЧРФ α – *R-универсальна* в том и только том случае, когда $f\alpha$ *R'-универсальна*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть α – ЧРФ и $\rho\alpha \subseteq R$. Тогда $\alpha = \gamma f$ для некоторой рекурсивной функции f . Определим рекурсивную функцию $h(x) = \mu y (g(y) = f(x))$. Имеем $\alpha(x) = \gamma g h(x)$. Так как $\rho\gamma = R$, то $\rho(\gamma g) \subseteq R$. Пусть $r \in R$. Для некоторого числа a $\gamma(a) = r$. Так как $\rho g = N$, то $g(b) = a$ для некоторого b . Отсюда $\gamma g(b) = r$ и $r \in \rho(\gamma g)$. Значит, $R = \rho(\gamma g)$.

б) Необходимость. Пусть $\beta(x)$ – ЧРФ и $\rho\beta \subseteq R'$. Тогда $\rho(f^{-1}\beta) \subseteq R$ и $f^{-1}\beta = \alpha g$ для некоторой рекурсивной функции g , откуда $\beta = f\alpha g$. Очевидно, что $\rho(f\alpha) = R'$.

Достаточность очевидна.

Из предложения 1 вытекает, что свойство ЧРФ быть *R-универсальной* инвариантно относительно ρ -сходства. Используя изоморфизм *R-универсальных функций*, видим, что тип ρ -сходства *R-универсальной функции* состоит из одного типа изоморфизма. В [2] ЧРФ, тип ρ -сходства которых состоит из одного типа изоморфизма, названы *F_R-функциями*; значит, *R-универсальные функции* будут *F_R-функциями*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если α *R-универсальна*, β – ЧРФ, $\rho\beta \subseteq R$, $\delta\beta \subseteq R$, то $\beta\alpha$ *$\rho\beta$ -универсальна*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\rho(\beta\alpha) = \rho\beta$. Пусть $\gamma - \text{ЧРФ}$ и $\rho\gamma \subseteq \rho\beta$. Определим функцию γ_1 . По данному n находим $\gamma(n)$. Если $\gamma(n) \uparrow$, то и $\gamma_1(n) \uparrow$. А если $\gamma(n) = r \in R$, то переисчисляя $\delta\beta$, ищем k такое, что $\beta(k) = r$. Первое из таких найденных k берем в качестве $\gamma_1(n)$. В силу тезиса Чёрча $\gamma_1 - \text{ЧРФ}$; $\rho\gamma_1 \subseteq R$, $\gamma_1 = \alpha f$ для некоторой рекурсивной функции f , откуда $\beta\gamma_1 = \beta\alpha f$ или $\gamma = \beta\alpha f$.

Точка $x = a$ называется *неподвижной точкой* функции α , если $\alpha(a) = a$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если R – простое или ко-конечное множество, то R -универсальная функция имеет креативное множество неподвижных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим универсальную функцию ψ и R -универсальную ψ_R . Пусть I, I_R – множества неподвижных точек у функций ψ и ψ_R соответственно. Очевидно, что $I \cap R = I_R$. Деккер показал [3], что пересечение креативного и простого множеств является креативным множеством. Значит, I_R – креативное множество. Пусть $\alpha(x)$ – R -универсальная функция. Тогда $\alpha(x) = \psi_R h(x)$, где h – рекурсивная перестановка. Но $\alpha(x) = (\psi h)_R(x)$, где ψh – универсальная функция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если R – РП множество, не являющееся ни ко-конечным, ни простым, то существует R -универсальная функция, не имеющая неподвижных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – бесконечное РП подмножество $\overline{R}$. Оно содержит креативное множество B (см. [3, упр. 7–47]). Пусть f – рекурсивная перестановка такая, что $f(B) = \delta\psi$, где ψ – универсальная функция, откуда $f(\overline{B}) = \overline{\delta\psi}$. Тогда $\psi' = \psi f$ – универсальная функция и $R \subseteq \overline{\delta\psi'}$. Рассмотрим R -универсальную функцию $\psi'_R(x)$; она не имеет неподвижных точек. Действительно, если бы $\psi'_R(a) = a$, то $\psi'(a) \downarrow$ и $\psi'(a) = a \in R$. Противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть R – бесконечное РП множество, не являющееся ни простым, ни ко-конечным. Тогда для каждого натурального числа $n \geq 1$ существует R -универсальная функция, имеющая в точности n неподвижных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – R -универсальная функция, не имеющая неподвижных точек. Выберем различные числа $a_1, \dots, a_n \in R$. Некоторые из них могут принадлежать $\delta\alpha$. Пусть $a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \in \delta\alpha$. Выберем $c_1, \dots, c_n$ так, чтобы

$$\alpha(c_i) = a_i, \quad \{a_1, \dots, a_n\} \cap \{c_1, \dots, c_n\} = \emptyset, \quad i = 1, \dots, n, \\ \alpha(a_{i_j}) \neq c_{i_j}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Определим рекурсивную перестановку

$$f(x) = \begin{cases} c_i, & \text{если } x = a_i; \\ a_i, & \text{если } x = c_i; \\ x, & \text{если } x \neq a_i, c_i. \end{cases}$$

Функция $\beta(x) = \alpha f(x)$ будет R -универсальной, имеющей в точности n неподвижных точек. Действительно,

$$\beta(a_i) = \alpha f(a_i) = \alpha(c_i) = a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим $\beta(c_i) = \alpha f(c_i) = \alpha(a_i)$; если $\alpha(a_i) \downarrow$, то $\alpha(a_i) \neq c_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если R – конечное множество и $|R| = n \geq 1$, то для каждого $1 \leq k \leq n$ существует R -универсальная функция, имеющая в точности k неподвижных точек. Доказательство аналогично доказательству предложения 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для каждого бесконечного РП множества R существует R -универсальная функция, имеющая бесконечное множество неподвижных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – R -универсальная функция и R – бесконечное РП множество. Построим бесконечные рекурсивные множества $A = \{a_0 < a_1 < \dots\}$ и $B = \{b_0 < b_1 < b_2 < \dots\}$ такие, что

$$A \cup B = \{a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots\}, \quad A \subseteq R, \quad B \subseteq \delta\alpha, \quad \alpha(b_i) = a_i$$

для всех $i \in N$. Определим рекурсивную перестановку следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} b_i, & \text{если } x = a_i; \\ a_i, & \text{если } x = b_i; \\ x, & \text{если } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Положим $\beta(x) = \alpha g(x)$. Функция β является R -универсальной и имеет бесконечное множество неподвижных точек. Действительно, $\beta(a_i) = \alpha g(a_i) = \alpha(b_i) = a_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. График непустой R -универсальной функции креативен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – R -универсальная функция, $a \in R$. Определим ЧРФ следующим образом:

$$\alpha(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x \in K; \\ \uparrow, & \text{если } x \notin K, \end{cases}$$

где K – какое-нибудь креативное множество. Тогда $\alpha(x) = \gamma f(x)$ для некоторой рекурсивной функции f . Имеем

$$x \in K \iff \alpha(x) = a \iff \gamma f(x) = a \iff \langle f(x), a \rangle \in \tau\gamma,$$

откуда $K \leq_m \tau\gamma$. Мы отождествляем пару чисел (x, y) с ее канторовским номером $\langle x, y \rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно доказать, что если график ЧРФ γ креативен, то и $\delta\gamma$ креативна.

ЛЕММА. Пусть α – ЧРФ. Тогда свойство $\delta\alpha \subseteq \rho\alpha$ инвариантно относительно рекурсивного изоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\delta\alpha \subseteq \rho\alpha \iff \forall x (\alpha(x) \downarrow \implies \exists y (\alpha(y) = x)).$$

Пусть f – произвольная рекурсивная перестановка и

$$f^{-1}\alpha f(x) \downarrow \implies \alpha(f(x)) \downarrow \implies \exists y (\alpha(y) = f(x)).$$

Получаем $f^{-1}\alpha f(z) = x$ при $z = f^{-1}(y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если $R \neq \emptyset$, N , то тип ρ -сходства R -универсальной функции состоит более, чем из одного типа ρ -рекурсивного изоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – R -универсальная функция. Рассмотрим сначала случай, когда R просто или ко-конечно и $R \neq \mathbb{N}$. Так как $A = \delta\gamma$ креативное, то и $A \cap \rho\gamma = B$ креативное. Существует рекурсивная перестановка f такая, что $f(B) = A$. Определим $\gamma' = \gamma f$; γ' – R -универсальная функция и $\delta\gamma' \subseteq \rho\gamma'$. Так как $R \neq \mathbb{N}$, существует $a \notin R$. Возьмем число b такое, что $\gamma(b) \downarrow$ и $a \neq b$. Определим рекурсивную перестановку

$$g(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x = b; \\ b, & \text{если } x = a; \\ x, & \text{если } x \neq a, b, \end{cases}$$

и положим $\gamma''(x) = \gamma g(x)$. Тогда γ'' – R -универсальная функция, для которой $\gamma''(a) \downarrow$, но $a \notin \rho\gamma''$. В силу леммы γ' не может быть ρ -рекурсивно изоморфна γ'' .

В случае, когда R – бесконечное множество, не являющееся ни простым, ни ко-конечным, тип ρ -сходства функции γ распадается на бесконечное множество типов ρ -рекурсивного изоморфизма. В случае непустого конечного R утверждение следует из предложения 4 и замечания после предложения 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если $|R| \geq 2$, то R -универсальная функция не имеет рекурсивных доопределений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что функция $\gamma(x) = \varphi(x)$ является универсальной. Очевидно, $\rho\gamma = N$. Пусть β – ЧРФ; $\beta = \gamma\alpha$ для некоторой ЧРФ α . По s - t - n -теореме $\gamma\alpha(x) = \gamma'(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для некоторой рекурсивной функции s . Имеем $\beta(x) = \gamma\alpha(x) = \gamma S(x)$, откуда $\beta \leq_m \gamma$. В силу предложения 2 функция $\psi(x) = \overline{\text{Sg}} \varphi_x(x)$ $\{0, 1\}$ -универсальна, где

$$\overline{\text{Sg}} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Функция ψ не имеет рекурсивных доопределений. Предположим, что ψ имеет рекурсивное доопределение f . Тогда $f = \varphi_a$ для некоторого числа a и, значит, $\varphi_a(a) \downarrow$. Имеем $\varphi_a(a) = \overline{\text{Sg}} \varphi_a(a)$, что невозможно. Пусть η – ЧРФ, g и f – рекурсивные перестановки. Нетрудно видеть, что η имеет рекурсивное доопределение тогда и только тогда, когда $f\eta g$ имеет рекурсивное доопределение. Пусть a, b – два различных числа. Построим $\{a, b\}$ -универсальную функцию, не имеющую рекурсивных доопределений. Рассмотрим сначала случай, когда $1 < a < b$. Определим рекурсивную перестановку

$$h(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x = 0; \\ b, & \text{если } x = 1; \\ 0, & \text{если } x = a; \\ 1, & \text{если } x = b; \\ x, & \text{если } x \neq 0, 1, a, b. \end{cases}$$

Функция $h\psi$ будет искомой. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть, наконец, κ – произвольная R -универсальная функция, у которой $|R| \geq 2$. Выберем различные числа $a, b \in R$ и определим $\{a, b\}$ -универсальную функцию следующим образом:

$$\kappa'(x) = \begin{cases} \kappa(x), & \text{если } \kappa(x) \in \{a, b\}; \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если бы κ имела рекурсивное доопределение, то и κ' имела бы рекурсивное доопределение, что не так.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
- [2] Поляков Е. А., Перов А. Е. F_ρ -функции // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 4. С. 559–563.
- [3] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

Шуйский государственный педагогический университет

Поступило
20.02.2004