Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Симоненко, Предельные теоремы типа Сегё для операторов обобщенной дискретной свертки, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 265–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:33:25

УДК 517.9

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТИПА СЕГЁ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВЕРТКИ

И. Б. Симоненко

Изучено асимптотическое поведение усредненного f -следа усеченного оператора обобщенной многомерной дискретной свертки при расширении области усечения. По определению усредненный f -след конечномерного оператора A равен $n^{-1} \times \sum_{k=1}^n f(\lambda_k)$, где n – размерность пространства, в котором действует оператор A , λ_k , $k = 1, \dots, n$, – полный набор собственных чисел оператора A с учетом их кратности; обобщенная дискретная свертка – это оператор из замыкания алгебры, порожденной операторами дискретной свертки и операторами умножения на функции, допускающие непрерывное продолжение на бесконечно удаленную сферу.

Библиография: 15 названий.

Интерес автора к данной проблеме возник под влиянием известной работы Сегё [1], где рассмотрены одномерные дискретные свертки (по этому поводу см. также [2, гл. 5] и [3, с. 167–172]). Наиболее близкими к настоящей работе являются статьи [4], [5]. В [4] изучено асимптотическое поведение определителей усеченных многомерных дискретных сверток с положительными символами. В работе [5], недавно выполненной автором, так же, как и в настоящей статье, изучены операторы обобщенной многомерной дискретной свертки, т.е. операторы из алгебры, порожденной многомерными дискретными свертками и операторами умножения на функции, допускающие непрерывное продолжение на бесконечно удаленную сферу. Однако в работе [5] на функцию f (см. теоремы 1.2 и 1.4 настоящей работы) наложены более сильные ограничения, что связано со следующим обстоятельством. В [5] сначала рассматривается случай, когда f – полином, а затем функции f , которые можно аппроксимировать полиномами в области, где концентрируется спектр усечений. В настоящей работе сначала рассматривается случай, когда $f(z) = (z - z_0)^{-1}$, а затем функции f , которые можно аппроксимировать в той же области, но рациональными функциями. В связи с этим в данной работе большую роль играет возможность почти явно построить оператор, обратный к усеченному, и провести его локальный анализ. Это удастся сделать, пользуясь методами, развитыми в работах [6]–[8].

1. Основные результаты. Пусть $\mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{N}$ – множества целых, комплексных и натуральных чисел соответственно; $n \in \mathbb{N}$; множество $\Xi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}^n$ снабжено дискретной мерой, принимающей значение 1 на каждом одноэлементном множестве; $l_2 = L_2(\Xi)$; $S = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$; $\Theta = S^n$ – тор, снабженный инвариантной относительно естественной групповой операции мерой mes_Θ , удовлетворяющей условию $\text{mes}_\Theta(\Theta) = 1$;

$L_2 = L_2(\Theta)$; $F: l_2 \rightarrow L_2$ – оператор Лорана–Фурье, т.е. оператор, определяемый равенством

$$(Fg)(\theta) = \sum_{\xi \in \Xi} g(\xi) \theta^\xi,$$

где $\theta^\xi = (\theta_1, \dots, \theta_n)^{(\xi_1, \dots, \xi_n)} = \theta_1^{\xi_1} \dots \theta_n^{\xi_n}$.

Обозначим через $\mathfrak{C}$ подалгебру алгебры $\text{End}(l_2)$, состоящую из таких операторов C , что FCF^{-1} – оператор умножения на некоторую функцию m из $\mathbb{C}(\Theta)$; такую функцию m обозначим через $\mu(C)$. Здесь и далее, $\text{End}(B)$ и $\mathbb{C}(X)$, где B – банахово, а X – компактное топологическое пространство, – банаховы алгебры соответственно линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве B , и комплекснозначных непрерывных функций, определенных на X .

Пусть $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел; $\Omega = \mathbb{R}^n$ – n -мерное нормированное арифметическое пространство; $\Omega_1 = \{x \mid x \in \Omega, \|x\| = 1\}$; $\mathfrak{M}_1$ – алгебра определенных на Ξ функций m , допускающих продолжение на бесконечно удаленную сферу, т.е. таких, что для каждой точки $x_0 \in \Omega_1$ существует конечный предел $\lim m(x)$, когда $x/\|x\| \rightarrow x_0$ и $\|x\| \rightarrow +\infty$; $\mathfrak{M} \subset \text{End}(l_2)$ – алгебра операторов умножения на функции, принадлежащие $\mathfrak{M}_1$.

Определим, наконец, алгебру $\mathfrak{G}$. Эта алгебра является замыканием в $\text{End}(l_2)$ алгебры, порожденной алгебрами $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{M}$. Известно (см. [9], [10]), что существует и притом только один непрерывный гомоморфизм $\sigma: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{C}(\Theta \times \Omega_1)$, удовлетворяющий следующему условию: для каждого $C \in \mathfrak{C}$, $m \in \mathfrak{M}_1$, $\theta \in \Theta$, $\omega \in \Omega_1$ имеет место равенство

$$[\sigma(CM)](\theta, \omega) = [(\mu(C))(\theta)]m_\infty(\omega),$$

где M – оператор умножения на функцию m ; m_∞ – функция, определенная на Ω_1 следующим образом:

$$m_\infty(\omega) = \lim_{\xi/\|\xi\| \rightarrow \omega, \|\xi\| \rightarrow +\infty} m(\xi).$$

Пусть всюду далее $A \in \mathfrak{G}$, $\nu = \sigma(A)$; D – ограниченное измеримое по Жордану (см. в [11] статью “Жордана мера”) подмножество пространства Ω ; V – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$; $V(D) > 0$; $x_0 \in \Omega$; $\vartheta_\alpha: \Omega \rightarrow \Omega$, $\alpha > 0$, – отображение, определяемое равенством $\vartheta_\alpha(x) = x_0 + \alpha(x - x_0)$; $\Xi_\alpha = \Xi \cap \vartheta_\alpha(D)$, $\alpha > 0$; $L_2(X)$, $X \subset \Xi$, – подпространство пространства l_2 , состоящее из тех функций, которые обращаются в нуль вне X ; $j_X: L_2(X) \subset l_2$, $P_X: l_2 \rightarrow L_2(X)$ – операторы вложения и умножения на характеристическую функцию множества X соответственно; $l_2^\alpha = L_2(\Xi_\alpha)$; $A_\alpha \in \text{End}(l_2^\alpha)$ – оператор, заданный соотношением $A_\alpha = P_{\Xi_\alpha} A j_{\Xi_\alpha}$; $K(u) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \vartheta_\alpha(u + x_0)$, $u \subset \Omega_1$; $L = \bigcap_{l \in \mathfrak{A}} l$, где $\mathfrak{A}$ – множество тех замкнутых подмножеств l множества Ω_1 , для которых $K(l) \supset D$; G_ω , $\omega \in \Omega_1$, – выпуклая оболочка множества $\{z \mid z = \nu(\theta, \omega), \theta \in \Theta\}$; $\Gamma = \bigcup_{\omega \in L} G_\omega$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть x_0 не принадлежит замыканию множества D ; G – открытое подмножество пространства $\mathbb{C}$, содержащее в себе Γ . Тогда существует такое $\alpha_0 > 0$, что для каждого $\alpha > \alpha_0$ все собственные числа оператора A_α находятся в G .

Нам понадобятся еще следующие обозначения. Пусть $\text{Def}(f)$ – область определения отображения f ; $\mathbb{R}^+$ – множество положительных вещественных чисел; $\text{Numb}(X)$ – количество элементов во множестве X ; $n_\alpha = \text{Numb}(\Xi_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$; $\Phi_{f,G}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, когда

f – комплекснозначная функция и $G \subset \text{Def}(f) \subset \mathbb{C}$ – функция, определяемая формулой

$$\Phi_{f,G}(\alpha) = n_\alpha^{-1} \sum_{j \in N} f(\zeta_j),$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_{n_\alpha}$ – полный набор собственных чисел оператора A_α с учетом их кратности; N – множество тех $j \in \{1, \dots, n_\alpha\}$, для которых $\zeta_j \in G$; $\Phi_f = \Phi_{f, \text{Def}(f)}$; V_1 – мера, определенная на измеримых по Лебегу подмножествах сферы Ω_1 равенством

$$V_1(u) = V[K(u) \cap D]/V(D).$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполняются условия теоремы 1.1, f – аналитическая функция комплексного переменного, определенная в G . Тогда

$$\Phi_f(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} I_f \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Theta \times L} f(\nu) d(\text{mes}_\Theta \times V_1).$$

И, наконец, последние обозначения которые понадобятся нам в данном пункте: $\Gamma_0 = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{H \in \mathfrak{H}} H$, где $\mathfrak{H}$ – множество тех компонент связности множества $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{\omega \in \Omega_1} G_\omega$, которые содержат по крайней мере одну точку, не принадлежащую спектру оператора A .

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть x_0 – внутренняя точка множества D ; G – открытое подмножество $\mathbb{C}$, содержащее в себе Γ_0 . Тогда существуют такие $\alpha_0 > 0$ и $M > 0$, что для каждого $\alpha > \alpha_0$ число точек спектра оператора A_α , расположенных вне G , с учетом их кратности не превосходит M .

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть выполняются условия теоремы 1.3, f – аналитическая функция комплексного переменного, определенная в G , G_1 – открытое подмножество комплексной плоскости, содержащее в себе Γ_0 , и замыкание G_1 вложено в G . Тогда

$$\Phi_{f,G_1}(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} I_f^0 = \int_{\Theta \times \Omega_1} f(\nu) d(\text{mes}_\Theta \times V_1).$$

Доказательство сформулированных теорем содержится в следующих трех пунктах.

2. Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\bar{A}_\omega$, $\omega \in \Omega_1$, – оператор из $\mathfrak{E}$, удовлетворяющий условию: для всех $\theta \in \Theta$ выполнено равенство $[\mu(\bar{A}_\omega)](\theta) = \nu(\theta, \omega)$; E_X – единичный оператор в алгебре $\text{End}(L_2(X))$; $j_{X,Y}: L_2(X) \subset L_2(Y)$, $P_{Y,X}: L_2(Y) \rightarrow L_2(X)$, $X \subset Y \subset \Xi$, – операторы вложения и умножения на характеристическую функцию множества X соответственно; ι_B , когда B – оператор из $\text{End}[L_2(X)]$, $X \subset \Xi$, – функция, определенная на $\mathbb{R}^+$ соотношением

$$\iota_B(d) = \sup_{(X_1, X_2) \in \mathfrak{A}} \|P_{X, X_1} B j_{X_2, X}\|_{\text{Hom}(L_2(X_2), L_2(X_1))},$$

где $\mathfrak{A}$ – множество таких пар (X_1, X_2) , что $X_1 \subset \Xi$, $X_2 \subset \Xi$ и

$$\inf_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} \|x_1 - x_2\| \geq d.$$

Здесь и далее, $\text{Hom}(B_1, B_2)$, где B_1, B_2 – B -пространства, – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2 .

ЛЕММА 2.1. Пусть L_1 – замкнутое подмножество пространства Ω_1 ; $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\omega \in L_1} G_\omega$; $B_{X,\omega} = P_X \bar{A}_\omega j_X - \lambda E_X$, $X \subset \Xi$, $\omega \in L_1$, – семейство операторов. Тогда

- 1) все операторы этого семейства обратимы;
- 2) существует такое $C > 0$, что для каждой $X \subset \Xi$, $\omega \in L_1$ имеет место оценка $\|B_{X,\omega}^{-1}\|_{\text{End } L_2(X)} \leq C$;
- 3) функция φ , определенная на $\mathbb{R}^+$ равенством

$$\varphi(d) = \sup_{X \subset \Xi, \omega \in L_1} [l_{B_{X,\omega}^{-1}}](d),$$

стремится к нулю при d , стремящемся к $+\infty$.

Это утверждение доказано в [6, с. 92] и [8, с. 121, следствие].

Введем обозначение $O(u, r)$, $u \subset \Omega_1$, $r > 0$:

$$O(u, r) = \left\{ x \mid x \in \Omega, \frac{1}{\|x - x_0\|} (x - x_0) \in u, \|x - x_0\| > r \right\}.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $\xi \in \Omega_1$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность u точки ξ в пространстве Ω_1 и такое $r > 0$, что

$$\|(A - \bar{A}_\xi)j_U \cap \Xi\|_{\text{Hom}(l_2(U \cap \Xi), l_2)} < \varepsilon,$$

где $U = O(u, r)$.

Это предложение содержится в [9].

Напомним определение кратности пересечения. Пусть $\mathfrak{X} = \{X_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – семейство множеств. Обозначим через $r(x)$ число тех $\alpha \in \mathfrak{A}$, для которых $x \in X_\alpha$; через X объединение $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$. Кратностью пересечения семейства $\mathfrak{X}$ называется $\sup_{x \in X} r(x)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $X = (X_1, \dots, X_N)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ – семейства подмножеств множества Ξ ; $r, 1$ – кратности пересечения семейств X, Y соответственно; $(A_1, \dots, A_N)$ – семейство операторов из $\text{End}(l_2)$; $c = \max_{i=1}^N \|A_i\|_{\text{End}(l_2)}$. Тогда имеет место оценка

$$\left\| \sum_{i=1}^N j_{Y_i} P_{Y_i} A_i j_{X_i} P_{X_i} \right\|_{\text{End}(l_2)} \leq rc.$$

Эта лемма содержится в [12, с. 27, лемма 2.1].

Последующая лемма используется при доказательстве как теоремы 1.1, так и теоремы 1.2. Ее формулировку и доказательство можно было бы существенно облегчить, если бы нам предстояло доказать лишь первую из них.

Для формулировки этой леммы нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{J}_1$ – кольцо измеримых по Жордану подмножеств сферы Ω_1 , т.е. таких подмножеств u сферы Ω_1 , для которых пересечение $K(u)$ с любым ограниченным измеримым по Жордану подмножеством пространства Ω также измеримо по Жордану; $\text{close}_X(Y)$, где X – топологическое пространство, а $Y \subset X$, – замыкание Y в X ; ϕ – модуль непрерывности функции ν (предполагается, что пространство $\Theta \times \Omega_1 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n$ снабжено естественной метрикой); $\text{Diam}(X)$, где X – метрическое пространство, – диаметр множества X ; $I_\alpha = E_{\Xi_\alpha}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $N \in \mathbb{N}$, $r > 0$, набор (u_i, f_i, ξ_i) , $i = 1, \dots, N$, и $\alpha_0 > 0$ такие, что

- 1) $\{u_i\}, \{f_i\}$, $i = 1, \dots, N$, – семейства подмножеств пространства Ω_1 , принадлежащих $\mathbb{J}_1$; причем каждое из этих семейств образует покрытие L ; их кратности пересечения не превосходят n и 1 соответственно;
- 2) для каждого $i \in \{1, \dots, N\}$ множество u_i – открытое подмножество пространства Ω_1 и имеет место вложение $\text{close}_{\Omega_1}(f_i) \subset u_i$;
- 3) $\xi_i \in L$ и

$$\phi(\delta) < \varepsilon, \quad \text{где} \quad \delta = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} \text{Diam}(\{\xi_i\} \cup u_i); \quad (2.1)$$

- 4) для каждого $i \in \{1, \dots, N\}$

$$N(V_1(u_i) - V_1(f_i)) < \varepsilon; \quad (2.2)$$

- 5) для каждого $\alpha > \alpha_0$ имеет место оценка

$$\|J - I_\alpha\|_{\text{End}(l_2^2)} < \varepsilon, \quad (2.3)$$

где

$$J = B(A_\alpha - \lambda I_\alpha); \quad (2.4)$$

$$B = \sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} P_{\Xi_\alpha, U_i \cap \Xi_\alpha}; \quad (2.5)$$

$$U_i = O(u_i, r), \quad F_i = O(f_i, r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Построение объектов, существование которых утверждается в лемме, проведем в несколько приемов.

I. Число c_1 . Положим

$$c_1 = \sup_{X \subset \Xi, \xi \in L} \|(P_X \bar{A}_\xi j_X - \lambda E_X)^{-1}\|_{\text{End}(L_2(X))}. \quad (2.6)$$

На основании леммы 2.1 можно гарантировать, что $c_1 < +\infty$.

II. Числа δ, N, r ; наборы $(u_1, \dots, u_N)$, $(f_1, \dots, f_N)$, $(\xi_1, \dots, \xi_N)$, $(U_1, \dots, U_N)$, $(F_1, \dots, F_N)$. Пусть δ – положительное число, удовлетворяющее условию $\phi(\delta) < \varepsilon$. В силу леммы 2.2 для каждого $\xi \in L$ существуют такие открытое подмножество v_ξ сферы Ω_1 и $r_\xi > 0$, что

- a) $\xi \in v_\xi$;
- b) $\text{Diam}(v_\xi) < \delta$;
- c) $\|(A - \bar{A}_\xi) j_{O(v_\xi, r_\xi) \cap \Xi}\|_{\text{Hom}(L_2(O(v_\xi, r_\xi) \cap \Xi), l_2)} < (2nc_1)^{-1} \varepsilon$.

Пусть $v \stackrel{\text{def}}{=} \{v_\xi\}, \{r_\xi\}, \xi \in L$, – такие семейства.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ и наборы $u \stackrel{\text{def}}{=} \{u_i\}, \{f_i\}, i = 1, \dots, N$, удовлетворяют условиям 1), 2), 4) и следующему дополнительному требованию: u вписано в v , т.е. для каждого $i \in \{1, \dots, N\}$ существует такое $\xi \in L$, что $u_i \subset v_\xi$. Пусть $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ – набор, удовлетворяющий условию $u_i \subset v_{\xi_i}; r = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} r_{\xi_i}; U_i = O(u_i, r), F_i = O(f_i, r)$. При этом, разумеется, выполняется и условие 3).

III. Число α_1 . Пусть $\alpha_1 > 0$ – такое число, что для каждого $\alpha > \alpha_1$

$$D_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \vartheta_\alpha(D) \subset \bigcup_{i=1}^N F_i.$$

IV. Числа d_0, α_2 . Введем функцию ι' , определенную на $\mathbb{R}^+$ равенством

$$\iota'(y) = \sup_{\alpha > 0, i \in \{1, \dots, N\}} \iota_{B_{\alpha, i}}(y),$$

где

$$B_{\alpha, i} = j_{U_i \cap \Xi_\alpha} [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (A - \lambda E_\Xi).$$

Функция ι' убывает и на основании леммы 2.1 настоящей работы и леммы 1 из [8] $\iota'(y) \rightarrow 0$, когда $y \rightarrow +\infty$. Пусть $d_0 \in \mathbb{R}^+, \alpha_2 > 0$ – такие числа, что $\iota'(d_0) < (2N)^{-1}\varepsilon$ и для каждых $\alpha > \alpha_2$ и $i \in \{1, \dots, N\}$ имеет место оценка

$$\inf_{x \in (\Omega \setminus U_i) \cap D_\alpha, y \in F_i \cap D_\alpha} \|x - y\| > d_0.$$

V. Оценка (2.3). Положим $\alpha_0 = \max(\alpha_1, \alpha_2)$ и покажем, что при $\alpha > \alpha_0$ имеет место оценка (2.3).

Итак, пусть $\alpha > \alpha_0$. Пусть J, B – операторы, определяемые формулами (2.4), (2.5),

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} \\ &\quad \times P_{\Xi_\alpha, U_i \cap \Xi_\alpha} P_{\Xi_\alpha} (A - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha} j_{\Xi_\alpha}, \\ J_2 &= \sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} \\ &\quad \times P_{\Xi_\alpha, U_i \cap \Xi_\alpha} P_{\Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha} j_{\Xi_\alpha}. \end{aligned}$$

Положим

$$a_1 = \|J - J_1\|_{\text{End}(l_2^\alpha)}, \quad a_2 = \|J_1 - J_2\|_{\text{End}(l_2^\alpha)}, \quad a_3 = \|J_2 - I_\alpha\|_{\text{End}(l_2^\alpha)}.$$

Покажем, что $a_1, a_2 < \varepsilon/2, a_3 = 0$.

Сначала оцениваем a_3 .

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} \\ &\quad \times P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha} j_{\Xi_\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha} j_{\Xi_\alpha} = \sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{F_i \cap \Xi_\alpha} j_{\Xi_\alpha} \\
&= \sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{\Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} P_{\Xi_\alpha} j_{\Xi_\alpha}
\end{aligned}$$

и $\alpha > \alpha_1$, получаем

$$\sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{\Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} = I_\alpha,$$

откуда и вытекает равенство $a_3 = 0$.

Оценка $a_2 < \varepsilon/2$ вытекает из леммы 2.3.

Оценим a_1 . В соответствии с определением J, J_1 имеем

$$\begin{aligned}
J - J_1 &= \sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} \\
&\quad \times P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (A - \lambda E_\Xi) j_{(\Omega \setminus U_i) \cap \Xi_\alpha} P_{(\Omega \setminus U_i) \cap \Xi_\alpha} j_{\Xi_\alpha}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\alpha > \alpha_2$, получаем оценку $a_1 < \varepsilon/2$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Тогда существуют такие $\alpha_0 > 0$ и $c > 0$, что для каждого $\alpha > \alpha_0$ оператор $A_\alpha - \lambda I_\alpha$ обратим и имеет место оценка

$$\|(A_\alpha - \lambda I_\alpha)^{-1}\|_{\text{End}(l_2^\alpha)} \leq c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon = 1/2$, $N \in \mathbb{N}$, $r > 0$, набор (u_i, f_i, ξ_i) , $i = 1, \dots, N$, и $\alpha_0 > 0$ удовлетворяют условиям 1)–5) леммы 2.4. Пусть c_1 определяется формулой (2.6). Тогда, как это вытекает из лемм 2.4 и 2.3, для каждого $\alpha > \alpha_0$ оператор $A_\alpha - \lambda I_\alpha$ обратим и справедливо неравенство

$$\|(A_\alpha - \lambda I_\alpha)^{-1}\|_{\text{End}(l_2^\alpha)} \leq 2nc_1.$$

Теорема 1.1 является следствием этой леммы и компактности множества Γ .

3. Доказательство теоремы 1.2.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $N \in \mathbb{N}$, $r > 0$, набор (u_i, f_i, ξ_i) , $i = 1, \dots, N$, и $\alpha_0 > 0$ такие, что выполняются условия 1)–4) леммы 2.4 и вместо условия 5) выполняется следующее: для каждого $\alpha > \alpha_0$ оператор $A_\alpha - \lambda I_\alpha$ обратим и имеет место оценка

$$\|B - (A_\alpha - \lambda I_\alpha)^{-1}\|_{\text{End}(l_2^\alpha)} < \varepsilon, \quad (3.1)$$

где B – оператор, определяемый равенством (2.5).

Эта лемма является следствием лемм 2.4, 2.5.

ЛЕММА 3.2. Пусть $X \subset \Omega$ ограничено и измеримо по Жордану; $V(X) > 0$; $X_\alpha = \Xi \cap \vartheta_\alpha(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$; $B \in \mathfrak{C}$; 0 не принадлежит выпуклой оболочке образа функции $\mu(B)$; $B_\alpha = P_{X_\alpha} B j_{X_\alpha}$, $\alpha > 0$; Ψ – функция, определенная на $\mathbb{R}^+$ соотношением

$$\Psi(\alpha) = m_\alpha^{-1} \sum_{j=1}^{m_\alpha} \frac{1}{\zeta_j},$$

где $m_\alpha = \text{Numb}(X_\alpha)$, $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{m_\alpha}\}$ – полный набор собственных чисел оператора B_α с учетом их кратности (заметим, что нуля среди них нет). Тогда

$$\Psi(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Theta} \left[\frac{1}{\mu(B)} \right] d(\text{mes}_{\Theta}).$$

Данное предложение доказано в [13] (случай, когда символ принадлежит классу Винера) и [5] (случай, когда символ непрерывен; теорема 3.1).

ЛЕММА 3.3. Пусть $X \subset \Omega$ – измеримо по Жордану и ограничено; $X_\alpha = \vartheta_\alpha(X) \cap \Xi$, $\alpha > 0$; $m_\alpha = \text{Numb}(X_\alpha)$. Тогда

$$\frac{m_\alpha}{\alpha^n} \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} V(X).$$

Это предложение является непосредственным следствием определения измеримого по Жордану множества.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$; h – функция, определенная на $\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$ равенством $h(z) = (z - \lambda)^{-1}$. Тогда

$$\Phi_h(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} J \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Theta \times L} h(\nu) d(\text{mes}_{\Theta} \times V_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c_1 определяется формулой (2.6);

$$c_2 = \sup_{\theta \in \Theta, \xi \in L} |[h(\nu)](\theta, \xi)|;$$

ω_h – модуль непрерывности функции h на Γ , т.е. ω_h – функция, определенная на $\mathbb{R}^+$ равенством

$$\omega_h(x) = \sup_{z_1 \in \Gamma, z_2 \in \Gamma, \|z_1 - z_2\| < x} |h(z_1) - h(z_2)|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такое $\alpha' > 0$, что для каждого $\alpha > \alpha'$

$$|\Phi_h(\alpha) - J| < 2\varepsilon + 2c_1\varepsilon + c_2\varepsilon + \omega_h(\varepsilon).$$

Выбор α' проведем в несколько этапов.

I. Выбор $N, r, (u_i, f_i, \xi_i)$, $i = 1, \dots, N$, α_0 . Пусть $N \in \mathbb{N}$, $r > 0$, набор (u_i, f_i, ξ_i) , $i = 1, \dots, N$, и $\alpha_0 > 0$ выбраны так, что выполняются условия леммы 3.1. Отметим, что при $\alpha > \alpha_0$ оператор $A_\alpha - \lambda I_\alpha$ обратим.

II. Выбор U_i, F_i, ν_ξ . Пусть

$$U_i = O(u_i, r), \quad F_i = O(f_i, r);$$

$\nu_\xi, \xi \in \Omega_1$, – функция, определенная на Θ равенством

$$\nu_\xi(\theta) = [\nu(A)](\theta, \xi).$$

III. Выбор $J_1, \dots, J_5; a_1, \dots, a_5$. Пусть $J_3, J_4, J_5, a_4, a_5 \in \mathbb{C}; J_1, J_2, a_1, a_2, a_3$ – функции, определенные на луче $(\alpha_0, +\infty)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{1}{n_\alpha} \operatorname{trac} \left[\sum_{i=1}^N j_{F_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} P_{U_i \cap \Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} \right. \\ &\quad \times \left. [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} P_{\Xi_\alpha, U_i \cap \Xi_\alpha} \right], \\ J_2(\alpha) &= \frac{1}{n_\alpha} \operatorname{trac} \left[\sum_{i=1}^N j_{U_i \cap \Xi_\alpha, \Xi_\alpha} [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} P_{\Xi_\alpha, U_i \cap \Xi_\alpha} \right], \\ J_3 &= \sum_{i=1}^N V_1(u_i) \int_{\Theta} h(\nu_{\xi_i}) d \operatorname{mes}_{\Theta}, \quad J_4 = \sum_{i=1}^N V_1(f_i) \int_{\Theta} h(\nu_{\xi_i}) d \operatorname{mes}_{\Theta}, \quad J_5 = J, \\ a_1 &= |\Phi_h - J_1|, \quad a_i = |J_{i-1} - J_i|, \quad i = 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

Здесь и всюду далее, $\operatorname{trac}(C)$, где C – конечномерный оператор, – след оператора C .

IV. Оценка a_1 . Учитывая, что

$$\Phi_h(\alpha) = \frac{1}{n_\alpha} \operatorname{trac}(A_\alpha - \lambda I_\alpha)^{-1}, \quad J_1(\alpha) = \frac{1}{n_\alpha} \operatorname{trac} B,$$

где B определяется формулой (2.5), и оценку (3.1), заключаем, что при $\alpha > \alpha_0$ имеет место оценка $a_1(\alpha) < \varepsilon$.

V. Выбор α_1 . В силу леммы 3.3 существует такое $\alpha_1 > \alpha_0$, что для каждого $\alpha > \alpha_1$ и $i \in \{1, \dots, N\}$ выполнено

$$\left| \frac{\operatorname{Numb}((U_i \setminus F_i) \cap \Xi_\alpha)}{n_\alpha} - V_1(u_i \setminus f_i) \right| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Пусть α_1 – такое число. Заметим, что из оценки (2.2) следует, что при $\alpha > \alpha_1$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^N \frac{\operatorname{Numb}((U_i \setminus F_i) \cap \Xi_\alpha)}{n_\alpha} \leq 2\varepsilon. \quad (3.2)$$

VI. Оценка a_2 . Учитывая, что

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{1}{n_\alpha} \operatorname{trac} \left[\sum_{i=1}^N P_{U_i \cap \Xi_\alpha, F_i \cap \Xi_\alpha} [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} j_{F_i \cap \Xi_\alpha, U_i \cap \Xi_\alpha} \right], \\ J_2(\alpha) &= \frac{1}{n_\alpha} \operatorname{trac} \left(\sum_{i=1}^N [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} \right), \end{aligned}$$

имеем

$$a_2(\alpha) = \frac{1}{n_\alpha} \left| \text{trac} \left(\sum_{i=1}^N P_{U_i \cap \Xi_\alpha, (U_i \setminus F_i) \cap \Xi_\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. \times [P_{U_i \cap \Xi_\alpha} (\bar{A}_{\xi_i} - \lambda E_\Xi) j_{U_i \cap \Xi_\alpha}]^{-1} j_{(U_i \setminus F_i) \cap \Xi_\alpha, U_i \cap \Xi_\alpha} \right) \right|.$$

Отсюда и из (3.2) вытекает оценка $a_2(\alpha) < 2\varepsilon c_1$, справедливая при $\alpha > \alpha_1$.

VII. Выбор α_2 и оценка a_3 . Принимая во внимание леммы 3.2, 3.3, заключаем, что существует такое $\alpha_2 > \alpha_1$, что для каждого $\alpha > \alpha_2$ выполнена оценка $a_3(\alpha) < \varepsilon$. Пусть α_2 – такое число.

VIII. Оценка a_4 . В силу (2.2) для каждого $\alpha > \alpha_2$ выполнена оценка $a_4(\alpha) \leq \varepsilon c_2$.

IX. Оценка a_5 . В силу оценки (2.1) для каждого $i \in \{1, \dots, N\}$ выполнено

$$\left| V_1(f_i) \int_{\Theta} [h(\nu_{\xi_i})] d\text{mes}_{\Theta} - \int_{\Theta \times f_i} [h(\nu)] d(\text{mes}_{\Theta} \times V_1) \right| \leq \omega_h(\varepsilon) V_1(f_i).$$

Отсюда вытекает оценка $a_5 \leq \omega_h(\varepsilon)$.

X. Окончательная оценка. Таким образом, при $\alpha > \alpha_2$ выполнено

$$|\Phi_h - J| \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < \varepsilon + 2\varepsilon c_1 + \varepsilon + \varepsilon c_2 + \omega_h(\varepsilon).$$

ЛЕММА 3.5. Пусть K – замкнутое ограниченное подмножество плоскости $\mathbb{C}$; H – открытое подмножество $\mathbb{C}$; $K \subset H$; h – определенная на H аналитическая функция комплексного переменного. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$ и $z_k \in \mathbb{C} \setminus K$, $k = 1, \dots, m$, что

$$\sup_{z \in K} \left| h(z) - \sum_{k=1}^m c_k (z - z_k)^{-1} \right| < \varepsilon.$$

Эта лемма является следствием, например, теоремы 8 из [14, с. 28].

Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы 1.2.

Пусть $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такое α_0 , что для каждого $\alpha > \alpha_0$ выполнена оценка

$$|\Phi_f(\alpha) - I_f| < \varepsilon.$$

Пусть G_1 – открытое ограниченное подмножество комплексной плоскости; $\bar{G}_1 = \text{close}_{\mathbb{C}}(G_1)$; $\Gamma \subset G_1$, $\bar{G}_1 \subset G$; R – функция вида

$$R(z) = \sum_{k=1}^m c_k (z - z_k)^{-1},$$

где $c_k \in \mathbb{C}$, $z_k \in \mathbb{C} \setminus \bar{G}_1$, такая, что

$$\sup_{z \in \bar{G}_1} |f(z) - R(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Такая функция существует в силу леммы 3.5.

Пусть

$$J = \int_{\Theta \times L} R(\nu) d(\text{mes}_{\Theta} \times V_1).$$

В силу лемм 2.5, 3.4 существует такое $\alpha_0 > 0$, что для каждого $\alpha > \alpha_0$:

- а) для каждого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{G_1}$ оператор $A_{\alpha} - \lambda I_{\alpha}$ обратим;
- б) выполняется оценка

$$|\Phi_R(\alpha) - J| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть α_0 – такое число.

Тогда при $\alpha > \alpha_0$

$$|\Phi_f(\alpha) - I_f| \leq |\Phi_f(\alpha) - \Phi_R(\alpha)| + |\Phi_R(\alpha) - J| + |J - I_f| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

4. Доказательство теорем 1.3 и 1.4. Пусть $\text{Spectr}(C)$, где $C \in \text{End}(B)$, B – некоторое банахово пространство, – спектр оператора C ; $K_{z_0, r} = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\lambda_0 \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_0) \cap \text{Spectr}(A)$. Тогда

- 1) λ_0 – изолированное собственное число оператора A конечной кратности;
- 2) существует такое $r > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует такое $\alpha_0 > 0$, что для каждого $\alpha > \alpha_0$

$$\text{Spectr}(A_{\alpha}) \cap K_{\lambda_0, r} = \text{Spectr}(A_{\alpha}) \cap K_{\lambda_0, \varepsilon}$$

и число собственных чисел оператора A_{α} с учетом их кратности в каждом из этих множеств равно кратности собственного числа λ_0 оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует такое связанное открытое подмножество H комплексной плоскости, что для каждого $\lambda \in H$ оператор $A - \lambda E_{\Xi}$ является оператором Нётера, $\lambda_0 \in H$ и в H существует такое λ , что оператор $A - \lambda E_{\Xi}$ обратим. Поэтому, как хорошо известно (см., например, [15, с. 273] или [5, теорема 11.1], доказательство теоремы 11.1 проведено максимально подробно), λ_0 является изолированным собственным числом оператора A . Поскольку $A - \lambda_0 E_{\Xi}$ – оператор Нётера, λ_0 является для оператора A собственным числом конечной кратности [5, теорема 11.4]. Таким образом, пункт 1) доказан.

Пункт 2) вытекает отсюда и из теоремы 12.2 из [5].

ЛЕММА 4.2. Пусть $\lambda_0 \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_0) \setminus \text{Spectr}(A)$. Тогда существуют такие $c > 0$ и $\alpha_0 > 0$, что для каждого $\alpha > \alpha_0$ оператор $A_{\alpha} - \lambda_0 I_{\alpha}$ обратим и имеет место оценка

$$\|(A_{\alpha} - \lambda_0 I_{\alpha})^{-1}\|_{\text{End}(l_2^{\infty})} \leq c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2.5.

Теорема 1.3 вытекает из лемм 4.1, 4.2.

Приступим к доказательству теоремы 1.4.

Не уменьшая общности, будем считать G_1 ограниченным.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\lambda_0 \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_0) \setminus \text{Spectr}(A)$; h – функция, определенная на $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\}$ равенством $h(z) = (z - \lambda_0)^{-1}$. Тогда

$$\Phi_h(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Theta \times \Omega_1} h(\nu) d(\text{mes}_\Theta \times V_1).$$

Эта лемма доказывается так же, как и лемма 3.4.

ЛЕММА 4.4. Пусть m – число собственных чисел оператора A , расположенных в $\mathbb{C} \setminus G_1$, с учетом их кратности. Тогда $m < +\infty$ и существует такое $\alpha_1 > 0$, что для каждого $\alpha > \alpha_1$ число собственных чисел оператора A_α , расположенных в $\mathbb{C} \setminus G_1$, с учетом их кратности не превосходит m .

Этот факт вытекает из лемм 4.1 и 4.2.

Пусть m – число собственных чисел оператора A , расположенных в $\mathbb{C} \setminus G_1$, с учетом их кратности; $\alpha_1 > 0$ – число, существование которого утверждается в лемме 4.4.

ЛЕММА 4.5. Существуют ограниченные замкнутые подмножества K_1, K_2 комплексной плоскости и число $\alpha_2 > \alpha_1$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;
- 2) $G_1 \subset K_1 \subset G$;
- 3) для каждой $\alpha > \alpha_2$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)$ оператор $A_\alpha - \lambda I_\alpha$ обратим.

Эта лемма также вытекает из лемм 4.1, 4.2.

Пусть K_1, K_2, α_2 – объекты, существование которых утверждается в лемме 4.5.

ЛЕММА 4.6. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $M \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$ и $z_k \in \mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)$, $k = 1, \dots, M$, что

$$\sup_{z \in K_1} \left| f(z) - \sum_{k=1}^M c_k (z - z_k)^{-1} \right| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию h , определенную на $K_1 \cup K_2$ равенствами $h|_{K_1} = f|_{K_1}$, $h|_{K_2} = 0$. Функция h допускает аналитическое продолжение в некоторое открытое подмножество, содержащее $K_1 \cup K_2$. Используя лемму 3.5, убеждаемся в справедливости нашего положения.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 1.4.

Пусть $\varepsilon > 0$; M, c_k, z_k , $k = 1, \dots, M$, – объекты, существование которых утверждается в лемме 4.6; R – рациональная функция, заданная формулой

$$R(z) = \sum_{k=1}^M c_k (z - z_k)^{-1};$$

$c = \sup_{z \in K_1 \cup K_2} |R(z)|$ (заметим, что $c < +\infty$);

$$J = \int_{\Theta \times \Omega_1} R(\nu) d(\text{mes}_\Theta \times V_1);$$

$\alpha_3 > \alpha_2$ – такое число, что для каждого $\alpha > \alpha_3$ выполнено $|\Phi_R(\alpha) - J| < \varepsilon$. Такое число существует в силу леммы 4.3.

Далее заметим, что при $\alpha > \alpha_3$

$$|\Phi_{f,G_1}(\alpha) - \Phi_{R,G_1}(\alpha)| < \varepsilon, \quad |\Phi_{R,G_1}(\alpha) - \Phi_R(\alpha)| < \frac{mc}{n_\alpha}, \quad |J - I_f^0| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое α_3 , что для каждого $\alpha > \alpha_3$ имеет место неравенство

$$|\Phi_{f,G_1}(\alpha) - I_f^0| < 3\varepsilon + \frac{mc}{n_\alpha},$$

откуда и вытекает теорема 1.4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Szegő G. On certain Hermitian forms associated with the Fourier series of positive functions // Festschrift Marcel Riesz. Lund, 1952. P. 228–238.
- [2] Гренандер У., Сегё Г. Теплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961.
- [3] Böttcher A., Silbermann B. Invertibility and Asymptotics of Toeplitz Matrices. Berlin: Akademie-Verlag, 1983.
- [4] Линник И. Ю. Многомерный аналог предельной теоремы Г. Сегё // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 6. С. 1393–1403.
- [5] Симоненко И. Б. Предельные теоремы типа Сегё для операторов составной и обобщенной свертки // Деп. ВИНТИ 12.08.99 № 2639-B99. Ростов-на-Дону, 1999.
- [6] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
- [7] Козак А. В. Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 6. С. 1287–1289.
- [8] Козак А. В., Симоненко И. Б. Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свертках // Сиб. матем. ж. 1980. Т. 21. № 2. С. 119–127.
- [9] Симоненко И. Б. О многомерных дискретных свертках // Математические исследования. Т. 3. № 1. Кишинев: Штиинца, 1968. С. 108–122.
- [10] Симоненко И. Б. Операторы типа свертки в конусах // Матем. сб. 1967. Т. 74(116). № 2. С. 298–313.
- [11] Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1979.
- [12] Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нётеровость. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1986.
- [13] Симоненко И. Б. Многомерный вариант теоремы Г. Сегё о предельной плотности спектра усеченных операторов Теплица. Случай, когда символ принадлежит классу Винера // Деп. ВИНТИ 21.08.98. № 2635-B98. Ростов-на-Дону, 1998.
- [14] Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
- [15] Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986.

Ростовский государственный университет
E-mail: isim@ns.math.rsu.ru

Поступило
03.04.2000
Исправленный вариант
26.05.2004