Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены,
Матем. заметки, 2005, том 78, выпуск 2, 308–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 11:21:58

УДК 517.5

НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ МНОГОЧЛЕНЫ

В. А. Юдин

На единичном круге B определяется новое семейство многочленов, наименее уклоняющихся от нуля. Даются оценки снизу наилучших приближений в пространстве $L_p(B)$, $p \geq 1$.

Библиография: 10 названий.

Через B обозначим единичный круг $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ с границей Γ . Рассмотрим однородный многочлен порядка n

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

и двумерный вариант задачи Чебышева [1] для круга: найти наилучшее приближение $f(x, y)$ алгебраическими многочленами меньшей степени, т.е. многочленами из множества

$$\mathcal{P}_{n-1} = \left\{ P(x, y) : P(x, y) = \sum_{k+l \leq n-1} C_{k,l} x^k y^l \right\}.$$

Требуется вычислить

$$E_{n-1}(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f(x, y) - P(x, y)\| = \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \max_{(x,y) \in B} |f(x, y) - P(x, y)|. \quad (2)$$

В некоторых частных случаях задача сводится к одномерной [1]; например, при $f(x, y) = (ax + by)^n$

$$E_{n-1}(f) = 2^{1-n} (a^2 + b^2)^{n/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Существенное продвижение было сделано в [2], где уклонение (2) вычислено для некоторого класса многочленов (1). В частности,

$$E_{n+m-1}(x^n y^m) = 2^{1-n-m}. \quad (3)$$

Оценки снизу получены методом экстремальных сигнатур [3], а приближающие многочлены строятся с помощью многочленов Чебышева второго рода

$$U_k(t) = \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin \alpha}, \quad t = \cos \alpha.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00986.

Для вычисления (3) построение $P(x, y) \in \mathcal{P}_{n+m-1}$ происходит так, чтобы

$$x^n y^m - P(x, y) = 2^{-n-m} (U_n(x) U_m(y) + U_{n-2}(x) U_{m-2}(y)).$$

В настоящей статье мы выделим новый класс многочленов из (1), для которых уклонение (2) точно вычисляется. Рассматриваемая задача представляет интерес и в других пространствах. Получим нижние оценки (2) в $L_p(B)$, $p \geq 1$, с нормой

$$\|f(x, y)\|_p = \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_B |f(x, y)|^p dx dy \right\}^{1/p}.$$

На их основе найдем точные значения уклонений в $L_p(B)$ произвольного однородного гармонического многочлена от подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. В отличие от методов [2], [4] будем использовать простые, хорошо известные (они встречаются еще у Бернштейна [5], см. также [6]) соображения относительно тригонометрических полиномов. Пусть

$$t(\varphi) = \sum_{|\nu| < n} t_\nu e^{i\nu\varphi}, \quad \|t\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |t(\varphi)|^p d\varphi \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

тогда для любого $t(\varphi)$

$$\|a_n e^{in\varphi} + a_{-n} e^{-in\varphi} - t(\varphi)\|_p \geq \|a_n e^{in\varphi} + a_{-n} e^{-in\varphi}\|_p. \quad (4)$$

Наилучшее приближение старшей гармоники меньшими осуществляется тривиально, т.е. $t(\varphi) \equiv 0$.

Перейдем в (1) к полярной системе координат, положим $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Из формул Эйлера получим

$$\begin{aligned} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) &= \rho^n \sum_{k=0}^n a_k \cos^k \varphi \sin^{n-k} \varphi \\ &= \rho^n \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}}{2} \right)^k \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^{n-k} \\ &= \frac{\rho^n}{2^n} \left\{ e^{in\varphi} \sum_{k=0}^n a_k i^{k-n} + e^{-in\varphi} \sum_{k=0}^n a_k i^{k-n} (-1)^{n-k} \right\} \\ &\quad + \left[e^{(n-2)\varphi} \sum_{k=0}^n a_k i^{k-n} (2k-n) + e^{-i(n-2)\varphi} \sum_{k=0}^n a_k i^{k-n} (2k-n) (-1)^{n-k} \right] + \dots \Big\} \\ &= 2^{-n} \rho^n \{A_n(f, \varphi) + A_{n-2}(f, \varphi) + \dots\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим

$$I_0(f) = \sum_{k=0}^n a_k i^k, \quad I_1(f) = \sum_{k=0}^n a_k i^k (2k-n).$$

ТЕОРЕМА 1. Для любого $f(x, y)$ из (1) и любого многочлена $P(x, y)$ из $\mathcal{P}_{n-1}$ справедлива оценка

$$\|f(x, y) - P(x, y)\|_p \geq 2^{1/p+1-n} (pn+2)^{-1/p} \|\cos \varphi\|_p |I_0(f)|, \quad p \geq 1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\|f - P\|_p^p = \frac{1}{\pi} \iint_B |f(x, y) - P(x, y)|^p dx dy,$$

то переходя к полярным координатам, найдем

$$\|f - P\|_p^p = 2 \int_0^1 \rho d\rho \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)|^p d\varphi.$$

При любом $\rho, 0 \leq \rho \leq 1$, относительно φ тригонометрический полином $P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ имеет порядок, не превосходящий $n-1$. Оценим внутренний интеграл по неравенству (4). Из определения (5) получим

$$\|f - P\|_p^p \geq 2 \int_0^1 \rho d\rho \cdot \rho^{pn} \cdot 2^{-pn} \|A_n(f, \varphi)\|_p^p = 2^{1-pn} (pn+2)^{-1} \|A_n(f, \varphi)\|_p^p. \quad (7)$$

Поскольку числа

$$\sum_{k=0}^n a_k i^{k-n}, \quad \sum_{k=0}^n a_k i^{k-n} (-1)^{n-k}$$

комплексно-сопряжены, то

$$\|A_n(f, \varphi)\|_p^p = \|e^{in\varphi} I_0(f) + e^{-in\varphi} \overline{I_0(f)}\|_p^p = 2^p |I_0(f)|^p \|\cos \varphi\|_p^p.$$

Подставляя полученное соотношение в (7), приходим к оценке (6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При любом $k \in \mathbb{N}$

$$E_{n-1}(x^k y^{n-k}) \geq 2^{1-n}.$$

При $p = \infty$ оценка (6) принимает вид

$$\|f(x, y) - P(x, y)\| \geq 2^{1-n} |I_0(f)|. \quad (8)$$

Если в последовательности $\{a_k\}_0^n$ одно из чисел положить равным 1, а остальные равными 0, т.е. $f(x, y) = x^k y^{n-k}$, то очевидно $|I_0(f)| = 1$. Таким образом, дан новый вывод нижней оценки (3).

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого однородного гармонического многочлена $f(x, y)$ порядка n и любого $p \geq 1$

$$E_{n-1}(f)_p = \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f(x, y) - P(x, y)\|_p = \|f(x, y)\|_p.$$

Действительно,

$$f(x, y) = \rho^n (a \cos n\varphi + b \sin n\varphi) \equiv \rho^n A_n(f, \varphi),$$

поэтому в силу (6)

$$E_{n-1}(f)_p \geq \|f(x, y)\|_p = \sqrt{a^2 + b^2} 2^{1/p+1-n} (np+2)^{-1/p} \|\cos \varphi\|_p.$$

Полагая $P(x, y) = 0$, получаем ту же самую оценку сверху для $E_{n-1}(f)_p$. Отметим, что при $p = \infty$ данный факт доказан в [2] в более сильной форме.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $g(x, y)$ – однородный гармонический многочлен порядка $n-2$. Для $f(x, y) = (x^2 + y^2)g(x, y)$ оценка (6) несодержательна: $E_{n-1}(f)_p \geq 0$. Эта ситуация наблюдается и в более общих случаях. Небольшое изменение рассуждений, используемых при доказательстве теоремы 1, позволяет получать новые нижние оценки. Например, при $n > 4$

$$E_{n-1}^p((x^2 + y^2)g(x, y))_p \geq 2^{(1-n)p} |I_1(f)|^p \|\cos \varphi\|_p^p \inf_{Q_{n-2}} \int_0^1 \rho |\rho^n - Q_{n-2}(\rho)|^p d\rho,$$

где нижняя грань берется по алгебраическим (относительно ρ) многочленам порядка $n-2$. Вычисление последних оказывается затруднительным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показано выше, приближение любого однородного гармонического многочлена на двумерном шаре тривиально. Если рассмотреть d -мерный шар из $\mathbb{R}^d$

$$B^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\},$$

то это утверждение не имеет места при $d \geq 3$ уже для многочленов второго порядка, хотя для некоторых, например, $f(x_1, \dots, x_d) = x_1 \cdots x_d$, справедливо [6]. Пусть

$$f(x) = (d-1)x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_d^2,$$

очевидно,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2} \equiv 0$$

и

$$\max_{x \in B^d} f(x) = d-1, \quad \min_{x \in B^d} f(x) = -1.$$

Полагая $P(x) = d/2 - 1$, найдем, что при $x \in B^d$

$$f(x) - P(x) = (d-1)x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_d^2 - \frac{d}{2} + 1 \leq (d-1)x_1^2 - \frac{d}{2} + 1 \leq \frac{d}{2}$$

и отсюда

$$f(x) - P(x) = dx_1^2 - (x_1^2 + \dots + x_d^2) - \frac{d}{2} + 1 \geq -\frac{d}{2}.$$

Следовательно, при $d \geq 3$

$$\max_{x \in B^d} |f(x) - P(x)| \leq \frac{d}{2} < \max_{x \in B^d} |f(x)| = d-1.$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь случай $p = \infty$. Дадим новый способ оценок уклонения (2) сверху. Он позволяет находить точные значения $E_{n-1}(f)$ в случае, когда норма $A_n(f, \varphi)$ равна “достаточно большой доле” нормы граничного значения $f|_{\Gamma}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 3$ и

$$\|f(\cos \varphi, \sin \varphi)\| \leq \left(\frac{n}{2} - 1\right) \|A_n(f, \varphi)\|.$$

Тогда

$$E_{n-1}(f) = 2^{1-n} |I_0(f)|. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижняя оценка для (9) получена в (8); найдем верхнюю. Следуя (5), положим

$$P(x, y) = 2^{-n} \rho^{n-2} \{A_{n-2}(f, \varphi) + A_{n-4}(f, \varphi) + \dots\}.$$

Поскольку выражения

$$\rho^{n-2} \cos(n-2)\varphi, \quad \rho^{n-2} \sin(n-2)\varphi, \quad \rho^{n-2} \cos(n-4)\varphi, \quad \rho^{n-2} \sin(n-4)\varphi, \quad \dots$$

являются алгебраическими многочленами из $\mathcal{P}_{n-2}$, то $P(x, y) \in \mathcal{P}_{n-2}$. Для произвольного ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, оценим уклонение

$$I(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Из представления (5) получим

$$I(\rho, \varphi) = 2^{-n} [\rho^n A_n(f, \varphi) + (\rho^n - \rho^{n-2})(A_{n-2}(f, \varphi) + A_{n-4}(f, \varphi) + \dots)],$$

откуда

$$\begin{aligned} \max_{\varphi} |I(f, \varphi)| &\leq 2^{-n} [\rho^n \|A_n(f, \varphi)\| + (\rho^{n-2} - \rho^n) \|f(\cos \varphi, \sin \varphi) - A_n(f, \varphi)\|] \\ &\leq 2^{-n} [\rho^n \|A_n(f, \varphi)\| + (\rho^{n-2} - \rho^n) (\|f(\cos \varphi, \sin \varphi)\| + \|A_n(f, \varphi)\|)]. \end{aligned}$$

По условию теоремы

$$\begin{aligned} \max_{\varphi} I(f, \varphi) &\leq 2^{-n} \left\{ \rho^n \|A_n(f, \varphi)\| + (\rho^{n-2} - \rho^n) \frac{n}{2} \|A_n(f, \varphi)\| \right\} \\ &= 2^{1-n} |I_0(f)| \cdot \left\{ \frac{n}{2} \rho^{n-2} + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \rho^n \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что двучлен

$$\frac{n}{2} \rho^{n-2} + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \rho^n$$

возрастает на интервале $(0, 1)$. Поэтому наибольшее значение, равное 1, он достигает при $\rho = 1$. Значит,

$$E_{n-1}(f) \leq \max_{\varphi} |f(\cos \varphi, \sin \varphi) - P(\cos \varphi, \sin \varphi)| \leq 2^{1-n} |I_0(f)|.$$

Теорема доказана.

Для $f(x, y) = x^n y^m$ единственность многочлена наилучшего приближения из $\mathcal{P}_{n+m-1}$ имеется [2] лишь в двух случаях:

- а) $n = 0$ или $m = 0$;
- б) $n = m = 1$.

В [2], [7] даны некоторые способы построения многочленов наилучшего приближения. Непосредственной проверкой легко убедиться, что семейство многочленов из $\mathcal{P}_4$

$$P(x, y) = \frac{3}{16}[(1 + \theta)xy(x^2 + y^2) + \theta xy], \quad 0 \leq \theta \leq \frac{5}{3},$$

наилучшим образом приближает на B $f(x, y) = x^3y^3$,

$$\|f(x, y) - P(x, y)\| \leq 2^{-5}.$$

На этом примере покажем разницу в выборе наилучших многочленов из [2] и из теоремы 2. В [2] выбиралось $\theta = 5/3$, а в настоящей работе $\theta = 0$.

В заключение автор присоединяется к точке зрения В. Герхарта и М. Реймера: вычисление точных значений $E_{n-1}(f)$ для произвольного $f(x, y)$ из (1) затруднительно. Прогресс видится в новых способах построения многочленов наилучшего приближения. Здесь к успеху приводят даже интерполяционные конструкции (см. [8], [9] с подробностями). Однако за исключением некоторых простейших случаев в пространстве $L_1(B)$ (аналог теоремы Коркина–Золотарева [10]) построение многочленов наименьшего отклонения неизвестно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чебышев П. Л. Полн. собр. сочинений. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
- [2] Gearhart W. B. Some Chebyshev approximations by polynomials in two variables // J. Approx. Theory. 1973. V. 8. P. 195–209.
- [3] Rivlin T. J., Shapiro H. S. A unified approach to certain problems of approximation and minimization // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1961. V. 9. P. 670–699.
- [4] Reimer M. Constructive Theory of Multivariate Functions. With an Application to Tomography. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1990.
- [5] Бернштейн С. Н. Полн. собр. сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
- [6] Андреев Н. Н., Юдин В. А. Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены и кубатурные формулы Чебышевского типа // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 45–57.
- [7] Reimer M. On multivariate polynomials of least deviation from zero on the unit ball // Math. Z. 1977. V. 153. P. 51–58.
- [8] Bos L. On Kergin interpolation in the disk // J. Approx. Theory. 1983. V. 37. P. 251–261.
- [9] Majer U. On best approximation of the monomials on the unit ball of $\mathbb{R}^r$ // J. Approx. Theory. 1998. V. 72. P. 74–81.
- [10] Коркин А. Н., Золотарев Е. И. Sur un certain minimum // Полн. собр. соч. Е. И. Золотарева. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1931. С. 138–153.