Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Загурский, Н. Т. Воробьев, Классы Фиттинга с заданными свойствами подгрупп Холла, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 234–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:05:52

УДК 512.542

КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОДГРУПП ХОЛЛА

В. Н. Загурский, Н. Т. Воробьев

В теории формаций конечных разрешимых групп известен результат Блессеноля о том, что для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ класс всех тех групп, для которых холловская π -подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$, – также локальная формация. В настоящей работе получен результат, в точности дуальный указанному в теории классов Фиттинга. Доказано, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален, то и класс всех тех групп, холловские π -подгруппы которых из $\mathfrak{F}$, также локален.

Библиография: 8 названий.

Введение. Ряд исследований канонических подгрупп конечных разрешимых групп связан с изучением классов конечных групп, определяемых заданными свойствами подгрупп Холла. В теории формаций хорошо известна своими приложениями для изучения свойств подгрупп Холла конструкция класса $B_\pi(\mathfrak{X})$ всех тех групп, холловская π -подгруппа которых принадлежит локальной формации $\mathfrak{X}$. Это обусловлено, прежде всего, результатом Блессеноля [1] о том, что класс $B_\pi(\mathfrak{X})$ является локальной формацией для любой локальной формации $\mathfrak{X}$. В теории классов Фиттинга Хауком [2] введена аналогичная конструкция класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ всех тех групп, холловская π -подгруппа которых принадлежит классу Фиттинга $\mathfrak{F}$. Известно (см., например, [3, глава 9, п. 1.24]), что такой класс является классом Фиттинга. В дальнейшем Бризоном [4] в терминах класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ были описаны $\mathfrak{F}$ -радикалы холловских π -подгрупп. Однако вопрос о локальности класса Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{F})$ оставался открытым. В настоящей работе мы дуализируем указанный результат Блессеноля: доказано, что для любого разрешимого локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ является локальным. Более того, установлено, что данный результат справедлив и для частично локальных классов Фиттинга.

Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то через G_π обозначают холловскую π -подгруппу группы G , т.е. подгруппу, порядок которой есть π -число, а индекс – π' -число.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой группе G существует единственная $\mathfrak{F}$ -максимальная нормальная подгруппа $G_\mathfrak{F}$ группы G . Ее называют $\mathfrak{F}$ -*радикалом* G . Через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ обозначают произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, т.е. класс всех тех групп G , для которых $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H}$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Мы будем использовать концепцию частичной локализации Шеметкова–Скибы [5], которая состоит в следующем.

Пусть $\emptyset \neq w \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $w' = \mathbb{P} \setminus w$. Всякое отображение

$$f: w \cup \{w'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называется *w-локальной функцией Хартли* или *w-локальной H-функцией* [5]. Для каждой w-локальной H-функции f полагаем

$$\text{Supp}(f) = \{a \in w \cup \{w'\} \mid f(a) \neq \emptyset\}$$

– носитель f .

Следуя [5], положим

$$LR_w(f) = \left(\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{S}_{p'} \right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi_1} f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \right) \cap f(w') \mathfrak{S}_w,$$

где $\pi_1 = \text{Supp}(f) \cap w$, $\pi_2 = w \setminus \pi_1$ и $\mathfrak{S}_w$ – класс всех разрешимых w -групп.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *w-локальным* [5], если $\mathfrak{F} = LR_w(f)$ для некоторой w -локальной H-функции f .

Заметим, что в случае $w = \mathbb{P}$ w -локальный класс Фиттинга называют *локальным*, а w -локальную функцию Хартли – *локальной функцией Хартли* или *локальной H-функцией*.

В работе рассматриваются только конечные и разрешимые группы.

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [3], [6].

1. Свойства класса $K_\pi(\mathfrak{F})$. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $K_\pi(\mathfrak{F})$ обозначают класс всех тех групп, в которых холловская π -подгруппа является $\mathfrak{F}$ -группой, т.е.

$$K_\pi(\mathfrak{F}) = \{G \in \mathfrak{S} : G_\pi \in \mathfrak{F}\}.$$

Если $\mathfrak{F} = \emptyset$, то положим $K_\pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$. В случае, когда $\pi = \emptyset$ и $\pi = \mathbb{P}$, положим $K_\emptyset(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}$ и $K_\mathbb{P}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ соответственно.

Мы будем неоднократно использовать известные свойства класса $K_\pi(\mathfrak{F})$, которые представляет следующая

ЛЕММА 1.1 [4]. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга, π – множество простых чисел, G – группа и G_π – ее холловская π -подгруппа. Тогда

- 1) $K_\pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}) = K_\pi(\mathfrak{F}) \cap K_\pi(\mathfrak{X})$ и, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $K_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq K_\pi(\mathfrak{X})$;
- 2) если $\mathfrak{F}$ – непустой класс, то $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cap G_\pi = (G_\pi)_{\mathfrak{F}}$;
- 3) $K_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X}) = K_\pi(\mathfrak{F})K_\pi(\mathfrak{X})$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – множество простых чисел. Тогда

- 1) если $p \in \pi$, то $K_\pi(\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{S}_{p'}$;
- 2) если $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$ для некоторого простого p , то $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p = K_\pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathfrak{S}_{p'} \subseteq K_\pi(\mathfrak{S}_{p'})$. Пусть группа $G \in K_\pi(\mathfrak{S}_{p'})$ и G_π – холловская π -подгруппа G . Тогда $|G_\pi|$ является p' -числом. Но $p \in \pi$, и поэтому $\pi' \subseteq p'$. Следовательно, $G \in \mathfrak{S}_{p'}$ и $K_\pi(\mathfrak{S}_{p'}) \subseteq \mathfrak{S}_{p'}$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть $G \in K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$. Так как по утверждению 2) леммы 1.1 $G_\pi \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})} = (G_\pi)_{\mathfrak{F}}$, то ввиду изоморфизма

$$G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})} / G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cong G_\pi / (G_\pi \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})}) = G_\pi / (G_\pi)_{\mathfrak{F}}$$

имеем

$$G_\pi / (G_\pi)_{\mathfrak{F}} \cong G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})} / G_{K_\pi(\mathfrak{F})}.$$

Но холловская π -подгруппа $G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})} / G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ группы $G / G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ является p -группой. Следовательно, $G_\pi / (G_\pi)_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$ и $G_\pi \in \mathfrak{F}$, и справедливо включение

$$K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p \subseteq K_\pi(\mathfrak{F}).$$

Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и π, σ – множества простых чисел, причем $\sigma \cap \pi = \emptyset$. Тогда

$$K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi = K_\sigma(\mathfrak{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $K_\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi$.

Пусть $G \in K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi$. По утверждению 2) леммы 1.1 $G_\sigma \cap G_{K_\sigma(\mathfrak{F})} = (G_\sigma)_{\mathfrak{F}}$. Учитывая изоморфизм

$$G_\sigma G_{K_\sigma(\mathfrak{F})} / G_{K_\sigma(\mathfrak{F})} \cong G_\sigma / (G_\sigma \cap G_{K_\sigma(\mathfrak{F})}) = G_\sigma / (G_\sigma)_{\mathfrak{F}},$$

получаем

$$G_\sigma / (G_\sigma)_{\mathfrak{F}} \cong G_\sigma G_{K_\sigma(\mathfrak{F})} / G_{K_\sigma(\mathfrak{F})}.$$

Но тогда из того, что $G / G_{K_\sigma(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{S}_\pi$, следует $G_\sigma / (G_\sigma)_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_\pi$ и поэтому $G_\sigma = (G_\sigma)_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $G_\sigma \in \mathfrak{F}$ и $G \in K_\sigma(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и π, σ – множества простых чисел, причем $\sigma \cap \pi = \emptyset$. Тогда

$$K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_\pi = K_\sigma(\mathfrak{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что по лемме 1.3

$$K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_\pi \subseteq K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi = K_\sigma(\mathfrak{F}).$$

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и π – множество простых чисел, то

$$K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'} = K_\pi(\mathfrak{F}).$$

2. Локальность класса $K_\pi(\mathfrak{F})$. Основной результат настоящей работы представляет следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $\mathfrak{F}$ – w -локальный класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то $K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})$ – w -локальный класс Фиттинга.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\mathfrak{F} = \emptyset$. Так как класс Фиттинга $\emptyset$ является w -локальным (см., [5, пример 10]), то класс $K_{\pi \cap w}(\emptyset)$ w -локален и в этом случае теорема справедлива.

Предположим, что $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Если $w \cap \pi = \emptyset$, то по определению $K_\emptyset(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}$. Определим H -функцию следующим образом: $f(a) = \mathfrak{S}$ для всех a из $w \cup \{w'\}$. Тогда, очевидно,

$$LR_w(f) = \left(\bigcap_{p \in w} \mathfrak{S} \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \right) \cap \mathfrak{S} \mathfrak{S}_w = \mathfrak{S}$$

и класс Фиттинга $K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})$ w -локален.

Предположим, что $w \cap \pi \neq \emptyset$. Так как $\mathfrak{F}$ – w -локальный класс Фиттинга, то по теореме 9 из [5] существует w -локальная H -функция F такая, что $\mathfrak{F} = LR_w(F)$, ее значения $F(p) = F(p) \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех p из w и $F(w') = \mathfrak{F}$.

Обозначим

$$\pi_1 = \text{Supp}(F) \cap w, \quad \pi_2 = w \setminus \pi_1.$$

Тогда

$$\mathfrak{F} = LR_w(F) = \left(\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{S}_{p'} \right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi_1} F(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \right) \cap \mathfrak{F} \mathfrak{S}_w.$$

Построим w -локальную H -функцию следующим образом:

$$f(p) = \begin{cases} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)), & \text{если } p \in \pi_1 \cap \pi; \\ K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}), & \text{если } p \in w \setminus \pi; \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi_2 \cap \pi, \end{cases}$$

и $f(w') = K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})$.

Легко видеть, что $\text{Supp}(f) = (\pi_1 \cap \pi) \cup (w \setminus \pi) \cup \{w'\}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} LR_w(f) &= \left(\bigcap_{p \in \pi_2 \cap \pi} \mathfrak{S}_{p'} \right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \right) \\ &\cap \left(\bigcap_{p \in w \setminus \pi} K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \right) \cap K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) \mathfrak{S}_w. \end{aligned}$$

Покажем вначале, что справедливо равенство

$$\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} = K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}). \quad (1)$$

Так как $\mathfrak{F}$ – w -локальный класс Фиттинга и $F(p) = F(p) \mathfrak{N}_p$ для всех p из w , то $\mathfrak{F} \subseteq \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} F(p) \mathfrak{S}_{p'}$. Тогда по утверждению 1) леммы 1.1

$$K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \subseteq K_{\pi_1 \cap \pi} \left(\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} F(p) \mathfrak{S}_{p'} \right) = \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p) \mathfrak{S}_{p'}).$$

Следовательно, по утверждению 3) леммы 1.1 и утверждению 1) леммы 1.2 получаем

$$\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p))\mathfrak{S}_{p'} = \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p))\mathfrak{S}_{p'}.$$

Кроме того, по утверждению 2) леммы 1.2 для любого $p \in \pi_1 \cap \pi$ имеет место

$$K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \subseteq K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p))\mathfrak{N}_p.$$

Значит,

$$K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \subseteq \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}.$$

Докажем обратное включение. Действительно, из того, что $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех p из w , из утверждения 1) леммы 1.1 следует включение

$$K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \subseteq K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}).$$

Значит,

$$K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p))\mathfrak{S}_{p'} \subseteq K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'}$$

и по утверждению 2) леммы 1.2

$$K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) = K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p))\mathfrak{N}_p$$

для любого p из $\pi_1 \cap \pi$. Следовательно,

$$\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \subseteq \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'} = K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(\pi_1 \cap \pi)'}$$

Кроме того, по следствию 1.5

$$K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(\pi_1 \cap \pi)'} = K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}).$$

Значит,

$$\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} K_{\pi_1 \cap \pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \subseteq K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}),$$

и равенство (1) доказано.

Установим теперь, что

$$\bigcap_{p \in w \setminus \pi} K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(w \setminus \pi)'}. \quad (2)$$

По лемме 1.3 $K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) = K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w \setminus \pi}$. Кроме того, $\mathfrak{S}_{w \setminus \pi}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{w \setminus \pi}$ для любого p из $w \setminus \pi$. Следовательно,

$$\bigcap_{p \in w \setminus \pi} K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = \bigcap_{p \in w \setminus \pi} K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w \setminus \pi}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = \bigcap_{p \in w \setminus \pi} K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w \setminus \pi}\mathfrak{S}_{p'}$$

и

$$\bigcap_{p \in w \setminus \pi} K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) \mathfrak{S}_{w \setminus \pi} \mathfrak{S}_{p'} = \bigcap_{p \in w \setminus \pi} K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) \mathfrak{S}_{p'} = K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) \mathfrak{S}_{(w \setminus \pi)'},$$

что доказывает равенство (2).

Таким образом, мы доказали справедливость равенства

$$LR_w(f) = \mathfrak{S}_{(\pi_2 \cap \pi)'} \cap K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \cap K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) \mathfrak{S}_{(w \setminus \pi)'} \cap K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) \mathfrak{S}_w. \quad (3)$$

Теперь, учитывая (3), для доказательства теоремы достаточно выяснить справедливость равенства

$$\mathfrak{S}_{(\pi_2 \cap \pi)'} \cap K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) = K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}). \quad (4)$$

Пусть $G \in K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})$. Тогда из того, что $\mathfrak{F} = LR_w(F)$, следует $G_{\pi \cap w} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_2'}$ и поэтому $|G_{\pi \cap w}|$ является $(\pi_2' \cap \pi \cap w)$ -числом. Кроме того, $|G : G_{\pi \cap w}|$ является $(\pi \cap w)'$ -числом. Легко видеть, что $(\pi \cap w)' \cup (\pi_2' \cap \pi \cap w) = (\pi_2 \cap \pi)'$ и, значит, $G \in \mathfrak{S}_{(\pi_2 \cap \pi)'}$. Так как $\pi_1 \subseteq w$, то $(\pi \cap w)' \subseteq (\pi_1 \cap \pi)'$ и $|G : G_{\pi \cap w}|$ является $(\pi_1 \cap \pi)'$ -числом. Далее из $\pi_1 \cap \pi \cap w \subseteq \pi_1 \cap \pi$ следует, что $|G_{\pi \cap w}|$ есть $(\pi_1 \cap \pi)$ -число. Тогда $(\pi \cap w)$ -холловская подгруппа $G_{\pi \cap w}$ группы G является также $(\pi_1 \cap \pi)$ -холловской подгруппой группы G . Значит, $G_{\pi_1 \cap \pi} \in \mathfrak{F}$ и $G \in K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})$. Следовательно,

$$K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}_{(\pi_2 \cap \pi)'} \cap K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}).$$

Покажем обратное включение. Пусть теперь $G \in \mathfrak{S}_{(\pi_2 \cap \pi)'} \cap K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})$. Тогда $G_{\pi_1 \cap \pi} \in \mathfrak{F}$. Так как $(\pi_2 \cap \pi)' \setminus (\pi_1 \cap \pi) = (\pi \cap w)'$, то $|G : G_{\pi_1 \cap \pi}|$ является $(\pi \cap w)'$ -числом. Теперь, ввиду $\pi_1 \cap \pi \subseteq \pi \cap w$, получаем, что $|G_{\pi_1 \cap \pi}|$ является $(\pi \cap w)$ -числом. Значит, $(\pi_1 \cap \pi)$ -холловская подгруппа G является $(\pi \cap w)$ -холловской подгруппой G и поэтому $G_{\pi \cap w} \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})$. Это означает, что

$$\mathfrak{S}_{(\pi_2 \cap \pi)'} \cap K_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \subseteq K_{\pi \cap w}(\mathfrak{F})$$

и равенство (4) доказано.

Теорема доказана.

В случае $w = \mathbb{P}$ из теоремы вытекает результат, в точности дуальный указанному во введении результату Блессеноля [1].

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то $K_{\pi}(\mathfrak{F})$ – локальный класс Фиттинга.

Из следствия вытекает, что семейство всех тех классов Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых $K_{\pi}(\mathfrak{F})$ является локальным, обширно, так как оно содержит все локальные классы Фиттинга. Однако в общем случае класс Фиттинга $K_{\pi}(\mathfrak{F})$ локален не для всякого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Это подтверждает следующий

ПРИМЕР 2.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный нетривиальный (отличный от классов (1) и $\mathfrak{S}$) нормальный класс Фиттинга. Покажем, что $\mathfrak{F}$ нелокален. Действительно, если $\mathfrak{F}$ локален, то по лемме 5 из [7] $\mathfrak{F}$ является классом Локетта и поэтому ввиду [3, теорема X.3.7] $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} = \mathfrak{S}$. Полученное противоречие показывает, что любой нетривиальный нормальный класс Фиттинга нелокален.

Пусть теперь p и q – такие простые числа, что $p \mid (q-1)$, $G = D_{q^n}^p$ – монолитическая группа с нормальной абелевой силовой q -подгруппой экспоненты q^n и циклической холловской q' -подгруппой порядка p . Пусть $\pi = \pi(G)$ и $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. Тогда, ввиду результата Бергера (см. свойство 3 из [8]) группа $G \notin \mathfrak{S}_*$ и поэтому $G \notin K_\pi(\mathfrak{S}_*)$. Следовательно, $K_\pi(\mathfrak{S}_*) \neq \mathfrak{S}$ и класс Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{S}_*)$ нетривиален. Но по теореме Хаука (см. [2, теорема 3.4]) $K_\pi(\mathfrak{S}_*)$ – нормальный класс Фиттинга и, следовательно, нелокален.

В заключение, заметим, что если $\mathfrak{F}$ – непустой w -локальный класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, причем $w \cap \pi = \emptyset$, то класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ является также w -локальным. Действительно, в этом случае определяя значения w -локальной H -функции равенством $f(a) = K_\pi(\mathfrak{F})$ для всех a из $w \cup \{w'\}$, получаем, что

$$LR_w(f) = \left(\bigcap_{p \in w} K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \right) \cap K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_w = K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_w\mathfrak{S}_{w'} \cap K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_w.$$

Теперь, учитывая следствие 1.4, получаем, что $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_w = K_\pi(\mathfrak{F})$ и

$$LR_w(f) = K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w'} \cap K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_w = K_\pi(\mathfrak{F})(\mathfrak{S}_{w'} \cap \mathfrak{S}_w) = K_\pi(\mathfrak{F}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Blessenohl D. Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1975. V. 142. № 3. P. 299–300.
- [2] Hauck P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse // J. Algebra. 1978. V. 53. P. 395–401.
- [3] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
- [4] Brison O. J. Hall operators for Fitting classes // Arch. Math. (Basel). 1979. V. 33. P. 1–9.
- [5] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. С. 114–147.
- [6] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [7] Воробьев Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 2. С. 161–168.
- [8] Berger T. K. More normal Fitting classes of finite solvable groups // Math. Z. 1976. V. 151. № 1. P. 1–3.

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
(Беларусь, г. Витебск)
E-mail: zagurski@yandex.ru, nicholas@vvsu.by

Поступило
13.09.2004