Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Брюнинг, В. А. Гейлер, К. В. Панкрашкин, Непрерывность и асимптотическое поведение интегральных ядер, связанных с операторами Шрёдингера на многообразиях, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 314–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 07:24:01

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЯДЕР, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРАМИ ШРЁДИНГЕРА НА МНОГООБРАЗИЯХ

Й. Брюнинг, В. А. Гейлер, К. В. Панкрашкин

Непрерывность интегральных ядер, связанных с операторами Шрёдингера (ядро уравнения теплопроводности, функция Грина) играет важную роль в исследовании различных свойств квантовых систем. В евклидовом случае в [1] было показано, что для скалярных потенциалов, лежащих в классе Като, достаточно общие функции от оператора Шрёдингера имеют непрерывные интегральные ядра. В [2] этот результат был распространен на операторы с нетривиальным векторным потенциалом магнитного поля, при этом в качестве конфигурационных пространств допускались произвольные области в евклидовом пространстве. В то же время в связи с рядом проблем мезоскопии и квантования гравитации [3], [4] актуальным представляется рассмотрение интегральных ядер, связанных с операторами Шрёдингера на римановых многообразиях. В настоящей заметке мы представляем результаты, касающиеся существования и непрерывности интегральных ядер у различных операторов, порождаемых оператором Шрёдингера на многообразии. Кроме того, мы даем ряд оценок для функции Грина в случае, когда ее аргументы далеки или, наоборот, близки друг к другу.

Пусть X – многообразии ограниченной геометрии размерности ν . Геодезическое расстояние между точками $x, y \in X$ будет обозначаться $d(x, y)$; через $B(x, r)$ обозначим открытый шар с центром x радиуса r , и через D множество $\{(x, y) \in X \times X, x = y\} \subset X \times X$. Рассмотрим 1-форму A на X с гладкими коэффициентами, она задает связность в тривиальном линейном расслоении над X ; соответствующий лапласиан Бохнера мы обозначим через Δ_A (при $A = 0$ получается $\Delta_A = \Delta$ – оператор Бельтрами–Лапласа). Метод доказательства наших результатов требует некоторых (достаточно слабых) ограничений на рассматриваемые скалярные потенциалы; мы предполагаем всюду, что этот потенциал принадлежит классу $\mathcal{P}(X)$ вещественных функций U на X , обладающих следующими свойствами:

$$U_+ := \max(U, 0) \in L_{\text{loc}}^{p_0}(X) \quad \text{и} \quad U_- := \max(-U, 0) \in \sum_{i=1}^n L^{p_i}(X),$$

где $2 \leq p_i \leq \infty$ при $\nu \leq 3$ и $\nu/2 < p_i \leq \infty$ при $\nu \geq 4$, $0 \leq i \leq n$. Обозначим через $H_{A,U}$ оператор, действующий на $C_0^\infty(X)$ по правилу $H_{A,U}\phi = -\Delta_A\phi + U\phi$. Используя результаты [5], можно доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Введенный оператор $H_{A,U}$ полуограничен снизу и существенно самосопряжен в $L^2(X)$.*

Мы сохраним то же обозначение для замыкания $H_{A,U}$. Этот оператор назовем *оператором Шрёдингера* с векторным потенциалом A и скалярным потенциалом U ; его спектр и резольвентное множество обозначим через $\sigma(H_{A,U})$ и $\rho(H_{A,U})$ соответственно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00804, а также фондов INTAS и DFG-PAH.

Оператор Шрёдингера порождает другие, тесно связанные с ним, операторы: полугруппу Шрёдингера $P_{A,U}(t) := e^{-tH_{A,U}}$, $t > 0$, резольвенту $R_{A,U}(\zeta) := (H_{A,U} - \zeta)^{-1}$, $\zeta \in \rho(H_{A,U})$, а также степени резольвенты, заданные при $\alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \zeta < \inf \sigma(H_{A,U})$ по правилу

$$R_{A,U}^\alpha(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-tH_{A,U}} e^{t\zeta} t^{\alpha-1} dt.$$

В частности, при натуральных α мы получаем обычные степени резольвенты, определенные для всех $\zeta \in \rho(H_{A,U})$.

Нас интересует вопрос существования интегральных ядер у перечисленных операторов и операторов, связанных с ними, а также такие свойства этих ядер, как непрерывность, интегрируемость и т.п. С целью описания этих свойств мы введем класс $\mathcal{K}(\alpha, p)$, $\alpha \in [0, \nu]$, $1 \leq p \leq \infty$, состоящий из локально интегрируемых на $X \times X$ ядер $K(x, y)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$|K(x, y)| \leq \max\left(\frac{c}{d(x, y)^\alpha}, 1\right) \quad \text{при некотором } c > 0,$$

$$\max\left(\sup_{x \in X} \|\chi_{X \setminus B(x, r)} K(x, \cdot)\|_p, \sup_{x \in X} \|\chi_{X \setminus B(x, r)} K(\cdot, x)\|_p\right) < \infty \quad \text{при любом } r > 0.$$

Основные результаты об описании глобальных свойств интегральных ядер содержатся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. (1) Операторы $R_{A,U}^\alpha(\zeta)$ являются интегральными. Обозначим их ядра через $G_{A,U}^{(\alpha)}(x, y; \zeta)$, тогда $G_{A,U}^{(\alpha)}$ непрерывны в $X \times X \setminus D$ при выполнении одного из следующих условий:

- (а) $\operatorname{Re} \zeta$ достаточно близко к $-\infty$;
- (б) α целое и $\zeta \in \rho(H_{A,U})$.

Более того, при $\alpha > \nu/2$ ядра $G_{A,U}^{(\alpha)}$ непрерывны в $X \times X$ и ограничены.

(2) Ядро $G_{A,U}^{(\alpha)}(x, y; \zeta) \in \mathcal{K}(\lambda, p)$, где $1 \leq p \leq \infty$ произвольно, $\lambda = \nu - 2\alpha$ при $\alpha < \nu/2$, λ — произвольное положительное число при $\alpha = \nu/2$, и $\alpha = 0$ при $\alpha > \nu/2$.

(3) Если f — борелевская функция на $\sigma H_{A,U}$, удовлетворяющая условию $f(\xi) \leq b(1 + |\xi|)^{-\alpha}$ с некоторыми $b > 0$ и $\alpha > \nu/2$, то оператор $f(H_{A,U})$ имеет непрерывное в $X \times X$ интегральное ядро $F(x, y)$, для которого выполнена равномерная оценка $|F(x, y)| \leq Cb$, где постоянная $C > 0$ зависит лишь от α , но не от b .

(4) Оператор $P_{A,U}(t)$ имеет интегральное ядро $P_{A,U}(x, y, t)$, которое непрерывно и равномерно ограничено в $X \times X \times (0, \infty)$.

(5) Спектральный проектор, соответствующий любому ограниченному борелевскому подмножеству вещественной оси, имеет непрерывное равномерно ограниченное интегральное ядро.

(6) Собственные функции оператора $H_{A,U}$ ограничены и непрерывны.

(7) При целых k отображение $\zeta \mapsto G_{A,U}^{(k)}(x, y; \zeta)$ голоморфно при всех $x, y \in X$, если $k > \nu/2$, и при $x \neq y$ в противном случае. Кроме того, выполнено равенство

$$\frac{\partial G_{A,U}^{(k)}(x, y; \zeta)}{\partial \zeta} = k G_{A,U}^{(k+1)}(x, y; \zeta), \quad k = 1, 2, \dots$$

Интерес представляет также асимптотическое поведение функции Грина вблизи диагонали $x = y$. Более точно, в методах теории возмущений, основанных на процедуре “сужение–расширение” [6] (в частности, в методах потенциала нулевого радиуса) используется представление функции Грина в виде

$$G_{A,U}(x, y; \zeta) = F(x, y) + G_{A,U}^{\text{reg}}(x, y; \zeta),$$

где функция $G_{A,U}^{\text{reg}}(x, y; \zeta)$ должна быть непрерывна во всем пространстве $X \times X$, при этом $F(x, y)$ называется сингулярностью функции Грина на диагонали. Вопрос о таком представлении в контексте упомянутой теории нетривиален лишь в размерностях $\nu = 2$ и $\nu = 3$, поскольку при $\nu = 1$

можно считать сингулярность нулевой, а при $\nu > 3$ сингулярность становится зависящей от спектрального параметра, что приводит к необходимости определять оператор энергии в пространстве с индефинитной метрикой, выходя за рамки стандартной интерпретации квантовой механики.

Предыдущая теорема дает лишь оценку сверху для сингулярности. Более детальное описание содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. (1) Пусть X двумерно. Тогда для любых $A \in [C^\infty(X)]^2$ и $U \in \mathcal{P}(X)$ сингулярность функции Грина $G_{A,U}$ на диагонали совпадает с аналогичной сингулярностью функции Грина оператора Бельтрами–Лапласа, т. е.

$$G_{A,U}(x, y; \zeta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{d(x, y)} + G_{A,U}^{\text{reg}}(x, y; \zeta),$$

где второе слагаемое непрерывно в $X \times X$.

(2) Пусть X трехмерно, $A \in [C^\infty(X)]^3$ и $U, V \in \mathcal{P}(X)$. Если выполнено условие $U - V \in L_{\text{loc}}^p(X)$ при некотором $p > 3$, то сингулярности функций Грина $G_{A,U}$ и $G_{A,V}$ совпадают, т. е. разность $G_{A,U}(x, y; \zeta) - G_{A,V}(x, y; \zeta)$ непрерывна в $X \times X$ при любом $\zeta \in \rho(H_{A,U}) \cap \rho(H_{A,V})$.

В частности, сингулярность функции Грина G_U оператора $-\Delta + U$ (т. е. $A = 0$) при $U \in \mathcal{P}(X) \cap L_{\text{loc}}^p(x)$ с любым $p > 3$ совпадает с сингулярностью функции Грина оператора Бельтрами–Лапласа:

$$G_U(x, y; \zeta) = \frac{1}{4\pi d(x, y)} + G_U^{\text{reg}}(x, y; \zeta),$$

где второе слагаемое непрерывно в $X \times X$.

В трехмерном случае сингулярность функции Грина, вообще говоря, зависит как от векторного, так и от скалярного потенциала и может не совпадать с сингулярностью функции Грина для лапласиана, если не выполнены условия пункта (2) предыдущей теоремы. Соответствующие примеры легко построить уже в случае $X = \mathbb{R}^3$. Так, функция Грина $G(x, y; \zeta)$ для оператора Шрёдингера с кулоновским потенциалом, $H = -\Delta + q/|x|$ (заметим, что $q/|x| \notin L_{\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3)$) вблизи заряда имеет асимптотику

$$G(x, 0; \zeta) = \frac{1}{4\pi|x|} + \frac{q \log|x|}{4\pi} + k(x),$$

где k – непрерывная функция. Зависимость сингулярности функции Грина от векторного потенциала магнитного поля проявляется уже в примере оператора Ландау

$$H = \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \pi \xi x_2 \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial x_2} + \pi \xi x_1 \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$\xi \neq 0$, функция Грина которого представима в виде

$$G(x, y; \zeta) = \frac{e^{i\pi\xi(x_1 y_2 - x_2 y_1)}}{4\pi|x - y|} + G^{\text{reg}}(x, y; \zeta),$$

где второе слагаемое непрерывно в $X \times X$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Simon B. // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. P. 447–526.
2. Broderix K., Hundertmark D., Leschke H. // Rev. Math. Phys. 2000. V. 12. P. 181–225.
3. Gritsev V. V., Kurochkin Yu. A. // Phys. Rev. B. 2001. V. 64. P. 1–9.
4. Solodukhin S. N. // Nucl. Phys. B. 1999. V. 54. P. 461–482.
5. Браверман М., Милатович О., Шубин М. // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 3–74.
6. Павлов Б. С. // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 99–131.

(И. Брюнинг, К. В. Панкрашкин) Humboldt-Universität zu Berlin, Германия
(В. А. Гейлер) Мордовский государственный университет, г. Саранск
E-mail: geyler@mrsu.ru

Поступило
29.12.2004