Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Аскари-Хеммат, М. А. Дегхан, М. А. Скопина, Полиномиальные всплескоподобные разложения функций на сфере, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 292–300

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:08:48

УДК 517.5

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ВСПЛЕСКОПОДОБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ

А. Аскари-Хеммат, М. А. Дегхан, М. А. Скопина

Представляются всплескоподобные системы на S^d такие, что любая непрерывная функция раскладывается в ряд по таким “всплескам”. Порядок роста степеней полиномов является оптимальным. Коэффициенты разложений являются скалярными произведениями функции на элементы “двойственной системы всплесков”. “Двойственные всплески” также представляют собой полиномиальную систему с тем же ростом степеней полиномов. Система является избыточной. Приводится также конструкция некоторого полиномиального базиса, но в отличие от всплескоподобной системы этот базис непригоден для использования, поскольку, во-первых, нет явных формул для вычисления коэффициентов, во-вторых, степени полиномов растут слишком быстро.

Библиография: 15 названий.

1. В одномерном случае полиномиальные разложения непрерывных функций на окружности и на отрезке активно изучались многими математиками на протяжении почти сорока лет. Первый полиномиальный базис в $C[a, b]$ был найден в 1961 г. Фоишем и Зингером [1]. Рост степеней полиномов в этом базисе экспоненциальный. В 1987 г. Привалов [2] построил полиномиальные базисы в пространстве непрерывных функций с оптимальным ростом степеней полиномов как для тригонометрического, так и для алгебраического случаев. Однако эти базисы не были ортогональными. Оптимальные тригонометрические полиномиальные ортогональные базисы были найдены в 1994 благодаря развитию теории всплесков. Лоренц и Саакян [3] доказали, что пакеты периодических всплесков Мейера являются такими базисами. Используя некоторые обобщенные операторы сдвигов, третий автор нашел [4] аналогичную всплесковую конструкцию в $L_2[a, b]$ и доказал, что соответствующие пакеты всплесков являются оптимальными полиномиальными ортогональными базисами в пространстве $C[a, b]$. Хотя эта конструкция может быть реализована в любом гильбертовом пространстве с полиномиальным базисом, в общем случае не ясно, будут ли ограниченными функции Лебега частичных сумм ряда Фурье по таким всплескам. В частности, очень сомнительно, что такая система будет базисом в $C(S^d)$.

Всплескоподобные полиномиальные системы на двумерной сфере были предложены Фриденем и Шрайнером [5]. Фарков [6] распространил их конструкцию на многомерный

Работа выполнена при поддержке Университета Валиаср, Рафсанжан, Иран, грант № 00-81-31-01. Работа третьего автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 03-01-00373.

случай. В отличие от одномерных базисов всплесков эти системы не являются ортогональными. Более того, они не являются базисами в L_2 , и разложение произвольной функции, вообще говоря, не сходится в L_2 . Тем не менее, разложения по таким системам имеют значительное сходство с обычными системами всплесков. В частности, в определенном смысле сохраняется структура кратномасштабного анализа. В настоящей статье мы показываем, что для некоторых “сферических всплесков” разложения по ним произвольной функции $f \in C(S^d)$ равномерно сходятся к этой функции. Рост степеней полиномов в этих разложениях является оптимальным с точностью до константы. Для случая $d = 2$ такие системы были найдены третьим автором [7].

Наши “всплески” не образуют базиса, система является избыточной. Полиномиальный базис в $C(S^d)$ несложно построить из произвольного базиса в $C(S^d)$ с помощью общего метода, разработанного Фоишем и Зингером [1]. Мы приводим такую конструкцию. К сожалению, этот базис не пригоден для использования ввиду двух его недостатков: нет явных формул для коэффициентов разложения, степени полиномов растут слишком быстро.

2. Следующие обозначения будут использоваться во всей статье: $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$, $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ для $x, y \in \mathbb{R}^d$, π_n^d – пространство полиномов d переменных степени не выше n , $G_n^{(\lambda)}$ – полином Гегенбауэра степени n порядка λ , $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$, $S^d = \partial B^{d+1}$,

$$\omega_d := \int_{S^d} ds(x) = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)},$$

скалярное произведение функций $F, G \in L_2(S^d)$ будем обозначать

$$\langle F, G \rangle = \int_{S^d} F(x) \overline{G(x)} ds(x).$$

Для фиксированного целого n сужение однородного гармонического полинома степени n на S^d называется *сферической гармоникой* степени n . Следующую информацию можно найти в [8] и [9, гл. IV, § 2]. Пусть H_n^d обозначает класс сферических гармоник степени n . Пространства H_n^d попарно ортогональны, и $\bigoplus_{\ell=0}^n H_\ell^d$ состоит из сужений на S^d всех алгебраических полиномов $d+1$ переменной степени не выше n . Пространство H_n^d имеет размерность

$$\delta_n^d := \dim H_n^d = \begin{cases} \frac{2n+d-1}{n+d-1} \binom{n+d-1}{n}, & \text{если } n \geq 1, \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

Кроме того, $\bigoplus_{n=0}^\infty H_n^d$ плотно в $L_2(S^d)$. Следовательно, если мы выберем ортонормированный базис $\{Y_{nk}, k = 1, \dots, \delta_n^d\}$ для каждого H_n^d , то функции $\{Y_{nk}, n = 0, 1, \dots, k = 1, \dots, \delta_n^d\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(S^d)$. Имеет место формула суммирования [8]:

$$\sum_{k=1}^{\delta_n^d} Y_{nk}(x) Y_{nk}(y) = \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(x \cdot y) \quad (1)$$

для всех $x, y \in S^d$ и для всех $n = 0, 1, \dots$.

Следующее утверждение резюмирует результаты, данные в [10] (см. также [11, теорема 2.1]).

ТЕОРЕМА 1. *Существуют постоянные N_d и A_d , зависящие только от d , такие, что для любого множества $\{\eta_\ell\}_{\ell \in \Omega}$, состоящего из различных точек $\eta_\ell \in S^d$, и для любого натурального $N \geq N_d$, удовлетворяющих условию*

$$N \max_{x \in S^d} \min_{\ell \in \Omega} |x - \eta_\ell| \leq A_d,$$

существуют такие неотрицательные веса a_ℓ , $\ell \in \Omega$, что

$$\int_{S^d} P(x) ds(x) = \sum_{\ell \in \Omega} a_\ell P(\eta_\ell)$$

для всех $P \in \pi_N^{d+1}$.

По этой теореме каждому натуральному j можно сопоставить множество $\{\eta_\ell^{(j)}\}_{\ell \in \Omega_j}$ различных точек $\eta_\ell^{(j)} \in S^d$ и множество $\{a_\ell^{(j)}\}_{\ell \in \Omega_j}$ неотрицательных весов, обладающих следующими свойствами: $\text{card } \Omega_j \sim 2^{dj}$,

$$\int_{S^d} P(x) ds(x) = \sum_{\ell \in \Omega_j} a_\ell^{(j)} P(\eta_\ell^{(j)}) \quad (2)$$

для любого $P \in \pi_{2^j}^{d+1}$. Введем дополнительно множество $\Omega_0 := \{0\}$ и положим $a_0^{(0)} = \omega_d$.

3. Пусть

$$h_j(n) = \frac{\binom{2^j - n + d - 1}{d}}{\binom{2^j + d - 1}{2^j - 1}}$$

для $n = 0, \dots, 2^j - 1$ и $h_j(n) = 0$ для $n = 2^j, 2^j + 1, \dots$. Нетрудно узнать в этих величинах множители (C, d) -средних порядка $2^j - 1$. Хорошо известно (см., например, [12]), что ряды Фурье–Гегенбауэра суммируемы методом (C, d) в $C[-1, 1]$ при $\lambda < d + 1/2$. Более того, имеет место неравенство Когбетлянца [13, с. 71]:

$$\sum_{n=0}^N \binom{N - n + d}{d} (2n + d - 1) G_n^{((d-1)/2)}(t) \geq 0 \quad (3)$$

для всех $t \in [-1, 1]$. Положим $g_j(n) = h_j(n) + h_{j-1}(n)$, $\tilde{g}_j(n) = h_j(n) - h_{j-1}(n)$ для $j = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, \dots$; $g_0(0) = h_0(0) + 1$, $\tilde{g}_0(0) = h_0(0) - 1$; $g_0(n) = \tilde{g}_0(n) = 0$ для $n = 1, 2, \dots$. Для каждого неотрицательного целого j и для любого $\ell \in \Omega_{j+1}$ определим функцию всплесков $\Psi_{j\ell}$, двойственную функцию всплесков $\tilde{\Psi}_{j\ell}$ и масштабирующую функцию $\Phi_{(j+1)\ell}$ по формулам

$$\begin{aligned} \Psi_{j\ell}(x) &= \frac{1}{\omega_d(d-1)} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} g_j(n) (2n + d - 1) G_n^{((d-1)/2)}(\eta_\ell^{(j+1)} \cdot x), \\ \tilde{\Psi}_{j\ell}(x) &= \frac{1}{\omega_d(d-1)} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \tilde{g}_j(n) (2n + d - 1) G_n^{((d-1)/2)}(\eta_\ell^{(j+1)} \cdot x), \\ \Phi_{(j+1)\ell}(x) &= \frac{1}{\omega_d(d-1)} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_j(n) (2n + d - 1) G_n^{((d-1)/2)}(\eta_\ell^{(j+1)} \cdot x). \end{aligned}$$

Дополним этот набор функцией $\Phi_{0,0} \equiv 1/\omega_d$ и положим $\Phi_0 = \sqrt{\omega_d} \Phi_{0,0}$.

Для $F \in C(S^d)$ мы будем изучать сходимость ряда

$$\langle F, \Phi_0 \rangle \Phi_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\ell \in \Omega_{i+1}} a_{\ell}^{(j+1)} \langle F, \tilde{\Psi}_{i\ell} \rangle \Psi_{i\ell}.$$

Положим

$$\Lambda_{j,\omega}(F) = \langle F, \Phi_0 \rangle \Phi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\ell \in \Omega_{i+1}} a_{\ell}^{(j+1)} \langle F, \tilde{\Psi}_{i\ell} \rangle \Psi_{i\ell} + \sum_{\ell \in \omega} a_{\ell}^{(j+1)} \langle F, \tilde{\Psi}_{j\ell} \rangle \Psi_{j\ell},$$

где ω – подмножество множества Ω_{j+1} .

ЛЕММА 2. Для любого $F \in C(S^d)$

$$\langle F, \Phi_0 \rangle \Phi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\ell \in \Omega_{i+1}} a_{\ell}^{(j+1)} \langle F, \tilde{\Psi}_{i\ell} \rangle \Psi_{i\ell} = \sum_{\ell \in \Omega_j} a_{\ell}^{(j)} \langle F, \Phi_{j\ell} \rangle \Phi_{j\ell}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (2) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in \Omega_j} a_{\ell}^{(j)} \Phi_{j\ell}(t) \Phi_{j\ell}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(n) h_{j-1}(k) \\ &\times \int_{S^d} ds(\eta) \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(\eta \cdot t) \frac{(2k+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_k^{((d-1)/2)}(\eta \cdot x). \end{aligned}$$

Отсюда, используя (1) и принимая во внимание ортонормированность системы $\{Y_{nk}\}_{n,k}$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in \Omega_j} a_{\ell}^{(j)} \langle F, \Phi_{j\ell} \rangle \Phi_{j\ell}(x) &= \int_{S^d} ds(t) F(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(n) h_{j-1}(k) \\ &\times \int_{S^d} ds(\eta) \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} Y_{n\nu}(\eta) Y_{n\nu}(t) \sum_{\kappa=1}^{\delta_k^d} Y_{k\kappa}(\eta) Y_{k\kappa}(x) \\ &= \int_{S^d} F(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}^2(n) \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} Y_{n\nu}(x) Y_{n\nu}(t) ds(t). \quad (5) \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\sum_{\ell \in \Omega_{i+1}} a_{\ell}^{(i+1)} \langle F, \tilde{\Psi}_{i\ell} \rangle \Psi_{i\ell}(x) = \int_{S^d} F(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \tilde{g}_i(n) g_i(n) \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} Y_{n\nu}(x) Y_{n\nu}(t) ds(t). \quad (6)$$

Поскольку $\tilde{g}_i(n) g_i(n) = h_i^2(n) - h_{i-1}^2(n)$, отсюда следует

$$\sum_{\ell \in \Omega_i} a_{\ell}^{(i)} \langle F, \Phi_{i\ell} \rangle \Phi_{i\ell} = \sum_{\ell \in \Omega_{i-1}} a_{\ell}^{(i-1)} \langle F, \Phi_{(i-1)\ell} \rangle \Phi_{(i-1)\ell} + \sum_{\ell \in \Omega_i} a_{\ell}^{(i)} \langle F, \tilde{\Psi}_{(i-1)\ell} \rangle \Psi_{(i-1)\ell}.$$

Просуммировав эти равенства по всем $i = 1, \dots, j$ получаем (4).

ТЕОРЕМА 3. Для любого $F \in C(S^d)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|F - \Lambda_{j,\omega}(F)\|_\infty = 0, \quad (7)$$

причем сходимость равномерная относительно выбора $\omega \subset \Omega_{j+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем, что операторы $\Lambda_{j,\omega}$, действующие из $C(S^d)$ в $C(S^d)$, равномерно ограничены. По (4), (2) и (3)

$$\begin{aligned} |\Lambda_{j,\emptyset}(F, x)| &= \left| \sum_{\ell \in \Omega_j} a_\ell^{(j)} \langle F, \Phi_{j\ell} \rangle \Phi_{j\ell} \right| \\ &= \left| \int_{S^d} ds(\eta) \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(k) \frac{(2k+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_k^{((d-1)/2)}(\eta \cdot x) \right. \\ &\quad \times \left. \int_{S^d} ds(t) F(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(n) \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(\eta \cdot t) \right| \\ &\leq \|F\|_\infty \int_{S^d} ds(\eta) \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(k) \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(\eta \cdot x) \\ &\quad \times \int_{S^d} ds(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(n) \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(\eta \cdot t). \end{aligned}$$

Поскольку, ввиду ортонормированности системы $\{Y_{nk}\}_{n,k}$

$$Y_{01} \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega_d}}, \quad \int_{S^d} Y_{nk}(t) ds(t) = 0 \quad (8)$$

для всех $n = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, \delta_n^k$, используя (1), получаем

$$\int_{S^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(n) \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(y \cdot t) ds(t) = \int_{S^d} h_{j-1}(0) Y_{01}(y) Y_{01}(t) ds(t) = 1.$$

Это влечет

$$\|\Lambda_{j,\emptyset}\| \leq 1. \quad (9)$$

Аналогично, принимая во внимание, что $a_\ell^{(j)} \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\ell \in \omega} a_\ell^{(j+1)} \langle F, \tilde{\Psi}_{j\ell} \rangle \Psi_{j\ell}(x) \right| \\ &\leq \sum_{\ell \in \omega} a_\ell^{(j+1)} \int_{S^d} |F(t)| \sum_{s=j-1}^j \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_s(n) \frac{(2k+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(t \cdot \eta_\ell^{(j+1)}) ds(t) \\ &\quad \times \sum_{r=j-1}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_r(k) \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_k^{((d-1)/2)}(x \cdot \eta_\ell^{(j+1)}) \\ &\leq \|F\|_\infty \sum_{\ell \in \Omega_{j+1}} a_\ell^{(j+1)} \int_{S^d} \sum_{s=j-1}^j \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_s(n) \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(t \cdot \eta_\ell^{(j+1)}) ds(t) \\ &\quad \times \sum_{r=j-1}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_r(k) \frac{(2n+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_k^{((d-1)/2)}(x \cdot \eta_\ell^{(j+1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|F\|_\infty \int_{S^d} ds(\eta) \int_{S^d} ds(t) \sum_{s=j-1}^j \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_s(n) \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} Y_{n\nu}(\eta) Y_{n\nu}(t) \\
&\quad \times \sum_{r=j-1}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_r(k) \sum_{\kappa=1}^{\delta_k^d} Y_{k\kappa}(\eta) Y_{k\kappa}(x) = 4\|F\|_\infty.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (9) следует $\|\Lambda_{j,\omega}\| \leq 5$. Теперь в силу теоремы Банаха–Штейнгауза достаточно проверить, что (7) выполнено на множестве сферических полиномов. Пусть $F = \sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} \alpha_{n\nu} Y_{n\nu}$. Ввиду ортонормированности системы $\{Y_{nk}\}_{n,k}$ из соотношений (4) и (5) следует, что

$$\Lambda_{j,\emptyset}(F) = \sum_{n=0}^N h_{j-1}^2(n) \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} \alpha_{n\nu} Y_{n\nu}.$$

Поскольку

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_j(n) = 1 \quad (10)$$

для любого фиксированного n , мы получаем (7) для $\omega = \emptyset$. Снова ввиду ортонормированности системы $\{Y_{nk}\}_{n,k}$ и (1) получаем

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{\ell \in \omega} a_\ell^{(j+1)} \langle F, \tilde{\Psi}_{j\ell} \rangle \Psi_{j\ell}(x) \right| \leq \left| \sum_{\ell \in \omega} a_\ell^{(j+1)} \sum_{n=0}^N \tilde{g}_i(n) \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} \alpha_{n\nu} Y_{n\nu}(\eta_\ell^{(j+1)}) \Psi_{j\ell}(x) \right| \\
&\leq \max_{0 \leq n \leq N} |h_j(n) - h_{j-1}(n)| \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} |\alpha_{n\nu}| \|Y_{n\nu}\|_\infty \sum_{\ell \in \omega} |a_\ell^{(j+1)} \Psi_{j\ell}(x)|. \quad (11)
\end{aligned}$$

На основании (2) и (1), принимая во внимание неотрицательность числа $a_\ell^{(j)}$ и (3), имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell \in \omega} |a_\ell^{(j+1)} \Psi_{j\ell}(x)| \leq \sum_{\ell \in \Omega_{j+1}} a_\ell^{(j+1)} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_j(n) \frac{(2k+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_n^{((d-1)/2)}(t \cdot \eta_\ell^{(j+1)}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(k) \frac{(2k+d-1)}{\omega_d(d-1)} G_k^{((d-1)/2)}(t \cdot \eta_\ell^{(j+1)}) \right) \\
&= \int_{S^d} ds(\eta) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_j(n) \sum_{\nu=1}^{\delta_n^d} Y_{n\nu}(\eta) Y_{n\nu}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{j-1}(k) \sum_{\kappa=1}^{\delta_k^d} Y_{k\kappa}(\eta) Y_{k\kappa}(t) \right) = 2.
\end{aligned}$$

Сопоставляя это соотношение с (10) и (11), получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{\omega \subset \Omega_{j+1}} \left\| \sum_{\ell \in \omega} a_\ell^{(j+1)} \langle F, \tilde{\Psi}_{j\ell} \rangle \Psi_{j\ell} \right\|_\infty = 0,$$

что и оставалось проверить.

4. В этом пункте мы построим полиномиальный базис в $C(S^d)$. Будем использовать подход, основанный на теоремах Пэли–Винера и Крейна–Мильмана–Рутмана (см. [1]). Пусть $\{Q_k\}_{k=0}^\infty$ – базис в банаховом пространстве H , и пусть $\alpha_k \in H^*$, $k = 0, 1, \dots$, – функционалы, определяющие коэффициенты разложения по этому базису. Если $P_k \in H$ и

$$\|P_k - Q_k\| \leq \frac{2^{-k-2}}{\|\alpha_k\|} =: \lambda_k$$

для всех $k = 0, 1, \dots$, то последовательность $\{P_k\}_{k=0}^\infty$ является базисом в H . Мы начнем с нахождения отправного базиса $\{Q_k\}$ в $C(S^d)^1$.

Шаг 1. Построение базиса в пространствах $C([0, 1]^d)$ и

$$C_0([0, 1]^d) := \{f \in C([0, 1]^d) : f(x) = 0 \ \forall x \in \partial([0, 1]^d)\}.$$

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ – базис Фабера–Шаудера (см., например, [14, гл. 6]) в $C[0, 1]$, определяемый формулами: $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $x \in [0, 1]$; для $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, функции f_n

$$\begin{aligned} &\text{линейны и непрерывны на } \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}} \right] \text{ и на } \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k} \right], \\ f_n(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right), \\ 1, & \text{если } x = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}} \right). \end{cases} \end{aligned}$$

Тензорное произведение d систем $\{f_n\}$ (должным образом занумерованное) является базисом в $C([0, 1]^d)$ (см., например, [14, гл. 1, § 18]). Обозначим этот базис через $\mathcal{B} = \{F_k\}_{k=1}^\infty$. Элементы множества $\mathcal{B}$ – функции вида

$$F(x) = f_{n_1}(x_1)f_{n_2}(x_2) \cdots f_{n_d}(x_d), \quad x_j \in [0, 1], \quad n_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 0, 1, \dots, d.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_0$ подмножество множества $\mathcal{B}$, которое состоит из всех таких функций F , что $n_j \neq 0$, $n_j \neq 1$, $j = 0, 1, \dots, d$ (занумерованных в том же порядке). Нетрудно проверить, что $\mathcal{B}_0 = \{F_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$ – базис в $C_0([0, 1]^d)$.

Шаг 2. Построение базисов в пространствах $C(B^d)$ и

$$C_0(B^d) := \{f \in C(B^d) : f(x) = 0 \ \forall x \in \partial B^d\}.$$

С помощью замены переменных мы можем заменить $[0, 1]^d$ на $[-1, 1]^d$, сохранив те же обозначения $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0$ для соответствующих базисов. Зададим отображение $\varphi: B^d \rightarrow [-1, 1]^d$ по формулам: если $x = (\rho, \theta)$, $0 \leq \rho \leq 1$, $\theta \in S^{d-1}$, то $\varphi(x) = (\rho r(\theta), \theta)$, где $r(\theta)$ – длина отрезка $\{x = (t, \theta) : t \geq 0, x \in [-1, 1]^d\}$. Ясно, что φ взаимно однозначно отображает B^d на $[-1, 1]^d$ и функции $G_k := F_k(\varphi)$, $k = 1, 2, \dots$, образуют базис в $C(B^d)$. Обозначим этот базис через $\mathcal{B}'$. Аналогично из $\mathcal{B}_0$ строится базис $\mathcal{B}'_0 = \{G_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$ в $C_0(B^d)$.

¹Вероятно конкретные базисы в $C(S^d)$ известны. Поскольку нам не удалось что-либо найти, приводим свою конструкцию.

Шаг 3. Построение базиса в $C(S^d)$. Пусть $C^{(e)}(S^d)$ и $C^{(o)}(S^d)$ – соответственно множества функций $f \in C(S^d)$ таких, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_d, -x_{d+1})$$

и

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_d, -x_{d+1}).$$

Каждое $f \in C(S^d)$ представимо в виде

$$f = f^{(e)} + f^{(o)},$$

где $f^{(e)} \in C^{(e)}(S^d)$, $f^{(o)} \in C^{(o)}(S^d)$. Очевидно, что если $\{H_k^{(e)}\}_{k=1}^\infty$ и $\{H_k^{(o)}\}_{k=1}^\infty$ – базисы в $C^{(e)}(S^d)$ и $C^{(o)}(S^d)$ соответственно, то система $\{H_k^{(e)}, H_k^{(o)}\}_{k=1}^\infty$ – базис в $C(S^d)$. Таким образом осталось найти базисы в $C^{(e)}(S^d)$ и $C^{(o)}(S^d)$. Для $x \in S^d$ положим

$$\begin{aligned} H_k^{(e)}(x) &:= G_k(x_1, \dots, x_d), \\ H_k^{(o)}(x) &:= \begin{cases} G_k^{(0)}(x_1, \dots, x_d), & \text{если } x_{d+1} \geq 0, \\ -G_k^{(0)}(x_1, \dots, x_d), & \text{если } x_{d+1} \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ясно, что системы $\{H_k^{(e)}\}_{k=1}^\infty$ и $\{H_k^{(o)}\}_{k=1}^\infty$ являются требуемыми базисами.

Переобозначим систему $\{H_k^{(e)}, H_k^{(o)}\}_{k=1}^\infty$ через $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$, и пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность соответствующих функционалов, определяющих коэффициенты разложений, $\lambda_k = 2^{-k-2}/\|\alpha_k\|$. Для заданной последовательности натуральных чисел $\{N_k\}$ положим $P_k := \sigma_{N_k}^\beta(Q_k)$, где $\sigma_m^\beta = (C, \beta)$ -средние ряда Фурье по сферическим гармоникам, $\beta > (d-1)/2$ (см., например, [15, § 2.3]). Поскольку $\{\sigma_m^\beta(f)\}_{m=1}^\infty$ равномерно сходятся к $f \in C(S^d)$, мы можем выбрать $\{N_k\}$ так, чтобы $\|Q_k - P_k\| \leq \lambda_k$. Таким образом, $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ – полиномиальный базис в $C(S^d)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Foias C., Singer I. Some remarks on strongly independent sequences and bases in Banach spaces // Rev. Math. Pure et Appl. Acad. R. P. R. 1961. V. 6. № 3. P. 589–594.
- [2] Привалов Ал. А. О росте степеней полиномиальных базисов и приближении тригонометрических проектов // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 2. С. 207–214.
- [3] Lorentz R. A., Sahakian A. A. Orthogonal trigonometric Schauder bases of optimal degree for $C(0, 2\pi)$ // J. Fourier Anal. Appl. 1994. V. 1. № 1. P. 103–112.
- [4] Скопина М. А. Ортогональные полиномиальные базисы Шaudера $C[-1, 1]$ с оптимальным ростом степеней // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 3. С. 115–136.
- [5] Freeden W., Schreiner M. Orthogonal and non-orthogonal multiresolution analysis, scale discrete and exact fully discrete wavelet transform on the sphere // Constructive Approximation. 1998. V. 14. P. 493–515.
- [6] Farkov Yu. B-spline wavelets on the sphere // “Self-Similar Systems”, Proceedings of the International Workshop (July 30–August 7, 1998, Dubna, Russia). Dubna: JINR, E5-99-38, 1999. P. 79–82.

- [7] Skopina M. Polynomial expansions of continuous functions on the sphere and on the disk // Preprint № 2001:5. University of South Carolina, Department of Mathematics, 2001.
- [8] Müller C. Spherical Harmonics. Berlin: Springer-Verlag, 1966. (Lecture Notes in Math. V. 17.)
- [9] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [10] Mhaskar H. N., Narcowich F. J., Ward J. D. Spherical Marcinkiewicz–Zygmund inequalities and positive quadrature // Math. Comp. 2001. V. 70. № 235. P. 1113–1130.
- [11] Mhaskar H. N., Narcowich F. J., Ward J. D., Prestin J. Polynomial frames on the sphere // Adv. Comput. Math. 2000. V. 13. P. 387–403.
- [12] Askey R. Orthogonal polynomials and spherical functions. Philadelphia: SIAM, 1975.
- [13] Серё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [14] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
- [15] Wang Kunyang, Li Luoking. Harmonic analysis and approximation on the unit sphere. Graduate Series in Mathematics, 2000.

(А. Аскари-Хеммат, М. А. Дегхан) Университет Валиаср, Иран
(М. А. Скопина) С.-Петербургский государственный университет
E-mail: (А. Аскари-Хеммат) asat@yahoo.com
(М. А. Дегхан) asat@arg3.uk.ac.ir
(М. А. Скопина) skopina@sk.usr.lgu.spb.su

Поступило
08.05.2002