Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, П. С. Саркисян, О квазиоднородных струнах, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 09:58:51

О КВАЗИОДНОРОДНЫХ СТРУНАХ

Р. С. Исмагилов, П. С. Саркисян

1. Постановка задачи; формулировка результата. Колебания струны с закрепленными концами описываются спектральной задачей

$$-y''(x) = \lambda^2 \rho(x)y(x), \quad y(0) = y(b) = 0, \quad 0 \leq x \leq b; \quad (1)$$

здесь функция $\rho(x)$, $0 \leq x \leq b$ (плотность струны), предполагается положительной и кусочно-непрерывной. Согласно теории обратной задачи, функция $\rho(x)$ не определяется однозначно по спектру задачи (1). Цель этой простой заметки прежде всего методическая. Мы обращаем внимание на то, что указанное обстоятельство имеет место уже для кусочно-постоянных плотностей. С целью оттенить это обстоятельство мы выделяем класс струн с кусочно-постоянной плотностью, для которых спектр колебаний совпадает со спектром однородной струны. Условия, определяющие такой класс, записываются в виде простых алгебраических соотношений; вывод этих соотношений и будет нашей целью.

Как будет показано в следующей работе одного из авторов, несложные алгебраические манипуляции над многочленами позволяют решить и более сложные задачи о струнах с указанным свойством, скажем, задачи о восстановлении плотности такой струны, если известна плотность ее части. Предлагаемая заметка содержит необходимую подготовку для обращения к этим задачам.

В связи с задачей восстановления необходимо упомянуть о задаче, рассмотренной Крейнм [1]. В его работе рассматривается восстановление плотности при условии, что эта плотность симметрична относительно середины струны; это позволяет восстановить плотность струны однозначно.

Итак, мы рассматриваем функцию $\rho(x)$, при $x \in [0, b]$ определяемую условиями

$$\rho(x) = a_k^2 \text{ при } x \in [c_{k-1}, c_k], \quad k = 1, \dots, n,$$

где

$$0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b, \quad a_k > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Положим $l_k = c_k - c_{k-1}$. Исследование задачи (1) существенно упрощается, если наложить следующие ограничения:

$$a_k l_k = \alpha, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

для некоторого фиксированного α . В дальнейшем это условие считается выполненным. Заметим, что если условие (2) нарушено, но величины $a_k l_k$ становятся рациональными при умножении на фиксированное число, то условие (2) достигается путем подразбиения каждого отрезка $[c_{k-1}, c_k]$ на части одинаковой длины.

Вся информация о такой струне может быть записана строкой параметров $a_1, \dots, a_n, \alpha$.

Однородная струна, как частный случай струны с кусочно-постоянной плотностью, может быть определена строкой a, α , где $a > 0, \alpha > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем струну *квазиоднородной*, если ее спектр совпадает со спектром однородной струны.

Основной результат заметки заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Струна $a_1, \dots, a_n, \alpha$ квазиоднородна тогда и только тогда, когда для всех t таких, что $1 \leq t \leq n$, t нечетно, величины*

$$\frac{1}{C_n^m} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_m} \frac{a_{i_2} \dots a_{i_{m-1}}}{a_{i_1} \dots a_{i_m}}$$

равны одной и той же не зависящей от t константе.

Условимся задавать квазиоднородную струну строкой $(a_1, \dots, a_n)$, опуская параметр α ; этот параметр не влияет на свойство квазиоднородности.

Запишем условия квазиоднородности для струн с числом звеньев, не превосходящим пяти.

Трехзвенная струна:

$$\frac{a_2}{a_1 a_3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right).$$

Можно взять, например, $(1, 3, 6)$.

Четырехзвенная струна:

$$\frac{a_2}{a_1 a_3} + \frac{a_2}{a_1 a_4} + \frac{a_3}{a_1 a_4} + \frac{a_3}{a_2 a_4} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}.$$

Можно взять, например, $(1, 2, 2, 4)$.

Пятизвенная струна:

$$\frac{a_2 a_4}{a_1 a_3 a_5} = \frac{1}{C_5^3} \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \frac{a_{i_2}}{a_{i_1} a_{i_3}} = \frac{1}{5} \sum_i \frac{1}{a_i}.$$

Можно взять, например, $(6, 3, 5, 20, 12)$.

2. Доказательство теоремы. 2.1. Вывод уравнения спектра закрепленной струны с кусочно-постоянной плотностью. Рассмотрим произвольное решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1). Этому решению поставим в соответствие вектор-строку

$$z(x, \lambda) = (i\lambda \cdot y(x, \lambda), y'_x(x, \lambda)).$$

Для любого отрезка $[\beta_1, \beta_2] \subset [0, b]$ определим матрицу перехода $M = M(\beta_1, \beta_2; \lambda)$ следующим условием:

$$z(\beta_2, \lambda) = z(\beta_1, \lambda) \cdot M(\beta_1, \beta_2, \lambda)$$

для любого решения $y(x, \lambda)$ уравнения (1).

Пусть теперь $\rho(x)$ кусочно-постоянна.

Матрица перехода $M_k = M(c_{k-1}, c_k, \lambda)$ примет вид

$$M_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\lambda\alpha} + e^{-i\lambda\alpha} & a_k(e^{i\lambda\alpha} - e^{-i\lambda\alpha}) \\ a_k^{-1}(e^{i\lambda\alpha} - e^{-i\lambda\alpha}) & e^{i\lambda\alpha} + e^{-i\lambda\alpha} \end{bmatrix}.$$

Пусть $M = (M_{ij})_{i,j=1}^2$ — матрица перехода для всего отрезка $[0, b]$. Очевидно, что $M = M_1 \cdots M_n$; условимся записывать это произведение в виде $\prod_{k=1}^n M_k$.

Уравнение спектра для струны с закрепленными концами имеет вид $M_{21} = 0$. Выполним преобразования, позволяющие получить явный вид члена M_{21} . Для этого прежде всего сделаем замену переменных $x = e^{i\lambda\alpha}$, тогда

$$M_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x + x^{-1} & a_k(x - x^{-1}) \\ a_k^{-1}(x - x^{-1}) & x + x^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} ((x + x^{-1})E + (x - x^{-1})A_k),$$

где E — единичная матрица,

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & a_k \\ a_k^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

С целью упрощения дальнейших вычислений введем множество $D = \{0, 1\}$, а также множество D^n , состоящее из всех булевых векторов размерности n . Для вектора $b = (b_1, \dots, b_n) \in D^n$ положим $\|b\| = b_1 + \dots + b_n$. Введем также множество $D_m^n = \{b \in D^n : \|b\| = m\}$.

Теперь можно записать матрицы M_k и M в виде

$$M_k = \frac{1}{2} \sum_{b_k \in D} (x + (1 - 2b_k)x^{-1}) A_k^{b_k},$$

$$M = \frac{1}{2^n} \sum_{b \in D^n} \left(\prod_{k=1}^n (x + (1 - 2b_k)x^{-1}) \cdot \prod_{k=1}^n A_k^{b_k} \right).$$

Если $b \in D_m^n$, то

$$\prod_{k=1}^n (x + (1 - 2b_k)x^{-1}) = (x - x^{-1})^m (x + x^{-1})^{n-m}.$$

Положим

$$G_m = \sum_{b \in D_m^n} \prod_{k=1}^n A_k^{b_k}. \quad (3)$$

Получаем

$$M = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n (x - x^{-1})^m (x + x^{-1})^{n-m} G_m. \quad (4)$$

Напомним, что наша цель – вычисление элемента M_{21} матрицы $M = (M_{ij})_{i,j=1}^2$. Рассмотрим матрицу $\prod_{k=1}^n A_k^{b_k}$, $b \in D_m^n$, входящую в сумму (3). Нетрудно заметить, что если m чётно, то ее левый нижний элемент равен нулю; если же число m нечётно, то этот элемент имеет вид

$$\prod_{k=1}^n a_k^{b_k^*}, \quad \text{где } b_k^* = b_k(-1)^{b_1 + \dots + b_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

(таким образом, для получения вектора $b^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ из вектора $b = (b_1, \dots, b_n)$ следует оставить без изменения нулевые координаты вектора b , а первую ненулевую координату вектора b заменить на -1 ; далее ненулевые координаты вектора b^* принимают попеременно значения $1, -1$).

Теперь из равенства (3) следует, что левый нижний элемент матрицы G_m (обозначим его через F_m) выражается формулой

$$F_m = \sum_{\|b\|=m} \prod_{k=1}^n a_k^{b_k^*}.$$

Приведенное выше описание вектора $b^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ позволяет записать последнюю сумму в виде

$$F_m = \sum_{i_1 < \dots < i_m} \frac{a_{i_2} \dots a_{i_{m-1}}}{a_{i_1} \dots a_{i_m}}.$$

Наконец, из формулы (4) находим исходный элемент M_{21} матрицы M ; для краткости обозначим его через $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{0 \leq m \leq n \\ m \text{ неч.}}} (x - x^{-1})^m (x + x^{-1})^{n-m} F_m.$$

Уравнение спектра примет вид $\varphi(x) = 0$, $x = e^{i\lambda\alpha}$.

Для однородной струны, заданной параметром α_1 , уравнение спектра

$$e^{i\lambda\alpha_1} - e^{-i\lambda\alpha_1} = 0.$$

2.2. *Условия квазиоднородности.* Квазиоднородность струны означает, что функции $\varphi(e^{i\lambda\alpha})$ и $e^{i\lambda\alpha_1} - e^{-i\lambda\alpha_1}$ имеют одни и те же нули для некоторого числа $\alpha_1 > 0$.

Нетрудно видеть, что это равносильно тому, что $\varphi(e^{i\lambda\alpha}) = C \cdot (e^{i\lambda\alpha_1} - e^{-i\lambda\alpha_1})$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ (для некоторого $C \neq 0$). Отсюда следует, что $\alpha_1 = n\alpha$; таким образом, указанные условия представляются в виде $\varphi(x) = C \cdot (x^n - x^{-n})$.

Итак, условие квазиоднородности выражается равенством

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\substack{0 \leq m \leq n \\ m \text{ неч.}}} (x - x^{-1})^m (x + x^{-1})^{n-m} \cdot F_m = C \cdot (x^n - x^{-n}).$$

Перепишем это равенство в виде

$$\frac{(x + x^{-1})^n}{2^n} \cdot \sum_{\substack{0 \leq m \leq n \\ m \text{ неч.}}} \left(\frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}} \right)^m \cdot \frac{F_m}{C} = x^n - x^{-n}$$

и введем переменную

$$t = \frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

тогда $x^2 = (1+t)/(1-t)$, и наше равенство примет следующий вид:

$$\sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \text{ неч.}}} t^m \cdot \frac{F_m}{C} = (1+t)^n - (1-t)^n.$$

Отсюда

$$F_m = \gamma \cdot C_n^m, \quad m \text{ нечетно}, \quad 1 \leq m \leq n,$$

где $\gamma = 2C$. Тем самым, теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М. Г. // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. № 3. С. 345–348.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: ismagil@serv.bmstu.ru, sarkisyan@vniieto.ru

Поступило
23.12.2004