Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Горелов, О структуре множества E -функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 331–348

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:28:12

УДК 511.36

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА E -ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. А. Горелов

Доказывается частный случай гипотезы Зигеля о представимости E -функций в виде многочлена от гипергеометрических функций. Доказываются некоторые утверждения о трансцендентности и линейной независимости значений E -функций, ранее сформулированные А. Б. Шидловским.

Библиография: 10 названий.

Введение. В 1929 г. К. Зигель опубликовал статью [1], где излагался метод, позволяющий исследовать арифметическую природу значений одного класса целых аналитических функций, так называемых E -функций, удовлетворяющих системам линейных дифференциальных уравнений. Современное состояние метода и историю вопроса можно найти в книге [2].

Зигель высказал гипотезу, что всякая E -функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, представляется в виде многочлена с алгебраическими коэффициентами от z и конечного числа гипергеометрических E -функций, а также функций, получающихся из них заменой z на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$, где $\mathbb{A}$ – множество всех алгебраических чисел.

Гипергеометрическими E -функциями, например, являются используемые в настоящей работе функции

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1) \cdots (\lambda+n)}, \quad \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots,$$

и $e^z = \varphi_0(z)$.

В работах автора [3], [4] была выяснена структура множества E -функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 1-го порядка и линейным однородным дифференциальным уравнениям 2-го порядка соответственно. Гипотеза Зигеля для этих случаев оказалась справедливой.

В настоящей работе рассматриваются E -функции, удовлетворяющие уравнениям

$$Q_2 y'' + Q_1 y' + Q_0 y = Q, \quad Q_2, Q_1, Q_0, Q \in \mathbb{C}[z]. \quad (1)$$

Доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E -функцией, удовлетворяющей уравнению (1), когда

$$f(z) = P_0 \varphi_\lambda(\alpha z) + P_1 \varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + P \quad (2)$$

либо

$$f(z) = P_0 f_1(z) + P_1 f'_1(z) + P, \quad (3)$$

где $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z]$, $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{Q}$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $f_1(z)$ — E -функция, удовлетворяющая уравнению

$$y'' + \left(a + \frac{a_1}{z}\right)y' + \left(b + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2}\right)y = c + \frac{c_1}{z}, \quad (4)$$

$a, a_1, b, b_1, b_2, c, c_1 \in \mathbb{A}$.

ТЕОРЕМА 2. Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E -функцией, удовлетворяющей уравнению (1) и алгебраически зависимой с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$, когда

$$f(z) = P_0 \varphi_k(\alpha z) + P_1 \varphi_k(\sigma \alpha z) + P \quad (5)$$

либо

$$f(z) = P_0 \varphi_\lambda^2(\alpha z) + P_1 \varphi_\lambda(\alpha z) + P, \quad (6)$$

где $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z]$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda, \sigma \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{A}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если алгебраически зависимые над $\mathbb{C}(z)$ E -функции $f_1(z), f_2(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, то обе они имеют вид (5) или (6).

ТЕОРЕМА 3. Если E -функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (1) и линейно независима с $f'(z)$ и 1 над $\mathbb{C}(z)$, то числа $f(\xi)$, $f'(\xi)$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{A}$ при любом $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi Q_2(\xi) \neq 0$.

Теорема 3 является частным случаем утверждения, высказанного Шидловским [5, гипотеза А]. Из теоремы 3 следует

ТЕОРЕМА 4. Если E -функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (1) и не удовлетворяет никакому линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, то числа $f(\xi)$ и $f'(\xi)$ трансцендентны при любом $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi Q_2(\xi) \neq 0$.

Ранее теорема 4 в виде гипотезы также высказывалась Шидловским [2, гл. 6, § 1]. Условие $Q_2(\xi) \neq 0$ в теореме 4 не является необходимым. Например, E -функция

$$f(z) = e^{2z} + ze^z + 1$$

удовлетворяет уравнениям $y' = 2y - (z-1)e^z - 2$ и $(z-1)y'' - (3z-2)y' + 2zy = 2z$. Числа $f(1)$ и $f'(1)$ трансцендентны, хотя $Q_2(1) = 0$.

1. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть E -функция $f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$Q_m y^{(m)} + Q_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + Q_0 y = Q, \quad m \geq 1, \quad (7)$$

с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$, взаимно простыми в совокупности, и не удовлетворяет никакому линейному (или, при $Q \equiv 0$, – линейному однородному) дифференциальному уравнению меньшего порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$. Тогда коэффициенты уравнения (7) определены однозначно с точностью до множителя из $\mathbb{C}$ и могут быть выбраны из $\mathbb{A}[z]$.

Лемма 1 следует из результатов книги [2, гл. 3, § 2].

Определение используемых далее понятий регулярной особой точки и показателей однородного дифференциального уравнения см., например, в книгах [6] или [7].

ЛЕММА 2 (см. [4, леммы 4–6]). При условиях леммы 1 всякая особая точка $\xi \neq 0$ дифференциального уравнения (7) есть регулярная особая точка соответствующего ему однородного уравнения с целыми неотрицательными показателями $r_1 < r_2 < \dots < r_m$, а всякое решение уравнения (7), как и соответствующего однородного уравнения, голоморфно в точке ξ .

ЛЕММА 3 (см. [4, лемма 7]). Если при условиях леммы 1 $Q_m(\xi) = 0$, $\xi \neq 0$, то

$$\frac{Q_k}{Q_m} = \frac{c_k}{(z - \xi)^{m-k}} + \frac{\psi_k(z)}{(z - \xi)^{m-k-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $c_k \in \mathbb{Z}$, $-c_{m-1} \in \mathbb{N}$, $(-1)^m c_0 = r_1 \dots r_m \in \mathbb{Z}^+$, $\psi_k(z) \in \mathbb{A}(z)$, $\psi_k(\xi) \neq \infty$.

ЛЕММА 4. Если при условиях леммы 3 $c_0 \neq 0$, то для некоторого $P \in \mathbb{A}[z]$ функция $g(z) = (f(z) - P)/(z - \xi)^{r_1}$ является E -функцией.

Доказательство аналогично доказательству леммы 9 статьи [4] с той лишь разницей, что ввиду отсутствия утверждения $\text{ord}_{z=\xi}(f(z) - P) = r_1$ использование леммы 8 статьи [4] уже не требуется.

ЛЕММА 5. Если при условиях леммы 1 точка $\xi = 0$ есть особая точка уравнения (7), то она является регулярной особой точкой соответствующего ему однородного дифференциального уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $m = 1$ утверждение леммы следует из определения E -функции (см. [3, лемма 10]). В случае $Q \equiv 0$ лемма справедлива согласно доказанному Андрэ [8, следствие 4.4]. Пусть $Q \not\equiv 0$. Продифференцировав уравнение (7), получим равенство

$$Q_m y^{(m+1)} + (Q'_m + Q_{m-1}) y^{(m)} + \dots + (Q'_1 + Q_0) y' + Q'_0 y = Q'.$$

Умножая это равенство на Q и вычитая из него равенство (7), умноженное на Q' , получаем

$$Q_m Q y^{(m+1)} + (Q(Q'_m + Q_{m-1}) - Q_m Q') y^{(m)} + \dots + (Q Q'_0 - Q_0 Q') y = 0, \quad (8)$$

откуда

$$y^{(m+1)} + \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_m} + \frac{Q'_m}{Q_m} - \frac{Q'}{Q} \right) y^{(m)} + \left(\frac{Q_{m-2}}{Q_m} + \frac{Q'_{m-1}}{Q_m} - \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \frac{Q'}{Q} \right) y^{(m-1)} + \dots \\ + \left(\frac{Q_0}{Q_m} + \frac{Q'_1}{Q_m} - \frac{Q_1}{Q_m} \frac{Q'}{Q} \right) y' + \left(\frac{Q'_0}{Q_m} - \frac{Q_0}{Q_m} \frac{Q'}{Q} \right) y = 0.$$

Полученное уравнение является однородным дифференциальным уравнением наименьшего порядка, которому удовлетворяет E -функция $f(z)$. Поэтому точка $z = 0$ является его регулярной особой точкой. Но это возможно только в случае, когда порядки полюсов функций $Q_{m-1}/Q_m, Q_{m-2}/Q_m, \dots, Q_0/Q_m$ в точке $z = 0$ не превосходят соответственно $1, 2, \dots, m$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть дифференциальные операторы $F_1, F_2 \in \mathbb{A}[z, d/dz]$ таковы, что

$$F_1 = P_n \left(\frac{d}{dz} \right)^n + \dots + P_1 \frac{d}{dz} + P_0, \quad P_j \in \mathbb{A}[z], \quad j = 0, \dots, n,$$

$$F_2 = Q_m \left(\frac{d}{dz} \right)^m + \dots + Q_1 \frac{d}{dz} + Q_0, \quad Q_i \in \mathbb{A}[z], \quad i = 0, \dots, m,$$

$$F_1 F_2 = R_{n+m} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n+m} + \dots + R_1 \frac{d}{dz} + R_0, \quad P_n Q_m \neq 0,$$

$$\deg R_{n+m} = \max_{0 \leq k \leq n+m} \deg R_k.$$

Тогда

$$\deg Q_m = \max_{0 \leq i \leq m} \deg Q_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть лемма неверна, а θ – наибольший индекс, для которого

$$\deg Q_\theta = \max_{0 \leq i \leq m} \deg Q_i > \deg Q_m.$$

Обозначим σ наибольший из индексов таких, что

$$\deg P_\sigma = \max_{0 \leq j \leq n} \deg P_j, \quad 0 \leq \sigma \leq n.$$

Тогда $R_{n+m} = P_n Q_m$, а

$$R_{\sigma+\theta} = P_\sigma Q_\theta + \sum_{j=1}^{n-\sigma} \binom{\sigma+j}{j} P_{\sigma+j} Q_\theta^{(j)} + \sum_{\substack{-\theta \leq i \leq m-\theta \\ i \neq 0}} \sum_{j=0}^{n-\sigma+i} \binom{\sigma-i+j}{j} P_{\sigma-i+j} Q_{\theta+i}^{(j)}.$$

Следовательно, $\deg R_{\sigma+\theta} = \deg P_\sigma Q_\theta > \deg R_{n+m}$. Ввиду полученного противоречия лемма доказана.

ЛЕММА 7. При условиях леммы 1 справедливо равенство

$$\deg Q_m = \max_{0 \leq i \leq m} \deg Q_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если в уравнении (7) $Q \neq 0$, то утверждение леммы выполняется или не выполняется для уравнений (7) и (8) одновременно.

Известно, что голоморфная в точке $z = 0$ функция $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$Q_m y^{(m)} + Q_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + Q_0 y = 0, \quad Q_m, \dots, Q_0 \in \mathbb{A}[z], \quad (9)$$

тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_{\nu}\}$ удовлетворяет линейному разностному уравнению

$$p_0 a_{\nu} + p_1 a_{\nu-1} + \dots + p_n a_{\nu-n} = 0, \quad p_0, \dots, p_n \in \mathbb{A}[\nu], \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

причем $\max_{0 \leq i \leq n} \deg p_i = m$ (см., например, [9, с. 142, 143]). Положим в уравнении (9)

$$Q_k = q_{k,0} + q_{k,1}z + \dots + q_{k,\mu}z^{\mu}, \quad q_{k,i} \in \mathbb{A}, \quad \mu = \max_{0 \leq k \leq m} \deg Q_k.$$

Пусть s_0 и s_1 – наименьшее (соответственно наибольшее) из чисел s таких, что

$$\sum_{j=0}^m |q_{m-j, s-j}| \neq 0.$$

Можно считать, что $0 \leq s_0 \leq \min(m, \mu) \leq s_1 \leq m + \mu$. Как установлено при доказательстве леммы 3 статьи [4], в уравнении (10) $n = s_1 - s_0$,

$$\begin{aligned} p_0 &= \sum_{j=0}^{\min\{s_0, m-1\}} q_{m-j, s_0-j} \nu(\nu-1) \dots (\nu-m+j+1) + q_{0, s_0-m}, \\ p_n &= \sum_{j=0}^{\min\{s_1, m-1\}} q_{m-j, s_1-j} (\nu-n) \dots (\nu-n-m+j+1) + q_{0, s_1-m}, \\ \deg p_i &= \max_j \{m-j \mid q_{m-j, s_0+i-j} \neq 0\}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Всякой G -функции (определение см. в [2]) $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ можно взаимно однозначно сопоставить E -функцию $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu}/\nu!) z^{\nu}$. Если последовательность $\{a_{\nu}\}$ удовлетворяет уравнению (10), то последовательность $\{a_{\nu}/\nu!\}$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\omega_0 \frac{a_{\nu}}{\nu!} + \omega_1 \frac{a_{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \dots + \omega_n \frac{a_{\nu-n}}{(\nu-n)!} = 0, \quad (12)$$

где $\omega_0 = \nu(\nu-1) \dots (\nu-n+1)p_0, \dots, \omega_n = p_n, \deg \omega_i \leq m+n-i, i = 0, 1, \dots, n$.

Следовательно, G -функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению (9) тогда и только тогда, когда соответствующая ей E -функция $f(z)$ удовлетворяет аналогичному дифференциальному уравнению, причем порядки этих уравнений отличаются не более, чем на n .

Как установлено в статье Андрэ [8, § 3], если G -функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению (9), где m – наименьшее из возможных, то точка $z = \infty$ является регулярной особой

точкой уравнения (9). Это равносильно условию (см. [6, гл. 5, п. 18.3]) $\deg Q_k = k + k_0$, $k = 0, 1, \dots, m$, $k_0 = \deg Q_0$, откуда $s_1 = m + k_0 = \mu$, $q_{m,s_1} \neq 0$.

Кроме того, если точка $z = 0$ неособая, то $q_{m,0} \neq 0$, $s_0 = 0$, а если особая, то ввиду ее регулярности (см. [8, §3]) имеем $s_0 = \text{ord}_{z=0} Q_m$, $q_{m,s_0} \neq 0$.

Поскольку $q_{m,s_0} \neq 0$, $q_{m,s_1} \neq 0$, то $\deg \omega_0 = m + n$, а разностному уравнению (12) соответствует дифференциальное уравнение

$$R_{m+n}y^{(m+n)} + \dots + R_1y' + R_0y = 0, \quad R_{m+n}, \dots, R_0 \in \mathbb{A}[z]. \quad (13)$$

Из неравенств $\deg \omega_i \leq m + n - i$, равенств $\deg \omega_0 = m + n$ и (11) следует, что

$$R_{m+n} = q_{m,s_0}z^{s_1}, \quad \deg R_i \leq s_1, \quad i = 0, 1, \dots, m+n.$$

Уравнение (13), которому удовлетворяет E -функция $f(z)$, можно представить в виде $F_3y = 0$, где $F_3 \in \mathbb{A}[z, d/dz]$. Пусть $F_2 \in \mathbb{A}[z, d/dz]$ – дифференциальный оператор наименьшего порядка, аннулирующий функцию $f(z)$. Тогда $F_3 = F_1F_2$, где F_1 – дифференциальный оператор с коэффициентами из $\mathbb{A}(z)$ (см. [7, гл. 5, п. 5.4]). Согласно лемме 6 степень многочлена, являющегося старшим коэффициентом в F_2 , больше или равна максимуму степеней остальных коэффициентов. Из теории Вимана–Валирона следует (см., например, [10, §75]), что это неравенство не может быть строгим. Отсюда ввиду замечания в начале доказательства получаем утверждение леммы.

Заметим, что если из условий леммы 7 убрать требование минимальности числа m , то утверждение леммы становится неверным. Например, E -функция $\varphi_\lambda(z)$ удовлетворяет уравнению $zy'' + (z^2 - z + \lambda + 1)y' + (-z^2 + \lambda z - 1)y = \lambda z$.

ЛЕММА 8 (см., например, [7, с. 526]). Пусть в дифференциальном уравнении (1)

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1 - c_1}{z - \xi} + \psi_1(z), \quad \frac{Q_0}{Q_2} = \frac{c_0}{(z - \xi)^2} + \frac{\psi_0(z)}{z - \xi},$$

где $\xi \in \mathbb{C}$, $\psi_1(z), \psi_0(z)$ – функции, голоморфные в точке $z = \xi$. Тогда сумма и произведение показателей однородного дифференциального уравнения, соответствующего (1), в точке ξ равны соответственно c_1 и c_0 .

Следующие три леммы доказываются непосредственным вычислением.

ЛЕММА 9. Пусть f, Q_0, Q_1, Q, P, P_1 – произвольные аналитические функции, причем функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + Q_1y' + Q_0y = Q.$$

Тогда функция $g = Pf$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(Q_1 - \frac{2P'}{P}\right)y' + \left(Q_0 - \frac{P''}{P} - \left(Q_1 - \frac{2P'}{P}\right)\frac{P'}{P}\right)y = PQ,$$

а функция $g_1 = f + P_1$ – уравнению

$$y'' + Q_1y' + Q_0y = Q + P_1'' + P_1'Q_1 + P_1Q_0.$$

СЛЕДСТВИЕ. При условиях леммы 9 функция $g = e^{\alpha z} f$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + (Q_1 - 2\alpha)y' + (Q_0 - \alpha Q_1 + \alpha^2)y = e^{\alpha z} Q.$$

ЛЕММА 10. Пусть f, Q_0, Q_1, Q_2, Q – произвольные аналитические функции, причем $Q_0 Q_2 \neq 0$, а функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \frac{Q_1}{Q_2}y' + \frac{Q_0}{Q_2}y = \frac{Q}{Q_2}.$$

Тогда функция $g = f'$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{Q_2'}{Q_2} - \frac{Q_0'}{Q_0} \right) y' + \left(\frac{Q_0}{Q_2} + \frac{Q_1'}{Q_2} - \frac{Q_0'}{Q_0} \frac{Q_1}{Q_2} \right) y = \frac{Q'}{Q_2} - \frac{Q_0'}{Q_0} \frac{Q}{Q_2}.$$

ЛЕММА 11. Пусть f, R_1, R_2, P_1, P_2 – произвольные аналитические функции, причем функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = R_1 y + R_2.$$

Тогда функция $g = P_1 f + P_2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1} \right) y - \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1} \right) P_2 + P_1 R_2 + P_2'.$$

ЛЕММА 12. Пусть E -функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \left(a_0 + \frac{a_1}{z} \right) y + a_2 z^k \varphi_\lambda(\alpha z) + R, \quad (14)$$

$a_0, a_1, a_2, \alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$, $R \in \mathbb{A}(z)$. Тогда $f = z^n g + P$, где $P \in \mathbb{A}[z]$, $n \in \mathbb{Z}^+$, а g – E -функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению вида (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцировав равенство (14), получим

$$y'' = \left(a_0 + \frac{a_1}{z} \right) y' - \frac{a_1}{z^2} y + a_2 z^k \left(\alpha + \frac{k - \lambda}{z} \right) \varphi_\lambda(\alpha z) + R' + a_2 \lambda z^{k-1}.$$

Вычитая из этого равенства равенство (14), умноженное на $\alpha + (k - \lambda)/z$, получим

$$y'' + \left(a_3 + \frac{a_4}{z} \right) y' + \left(a_5 + \frac{a_6}{z} + \frac{a_7}{z^2} \right) y = P_1 + \frac{a_8}{z} + \frac{a_9}{z^2},$$

где $a_3, \dots, a_9 \in \mathbb{A}$, а P_1 , как легко видеть, можно выбрать из $\mathbb{A}[z]$. Пусть $\deg P_1 = n > 0$. Рассмотрим многочлен $P_2 \in \mathbb{A}[z]$, $\deg P_2 \leq n - 1$, такой, что функция $g = (f - P_2)/z^n$ является целой и, следовательно, E -функцией. Согласно лемме 9 функция $f - P_2$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(a_3 + \frac{a_4}{z} \right) y' + \left(a_5 + \frac{a_6}{z} + \frac{a_7}{z^2} \right) y = P_3 + \frac{a_{10}}{z} + \frac{a_{11}}{z^2}, \quad (15)$$

где $a_{10}, a_{11} \in \mathbb{A}$, $P_3 \in \mathbb{A}[z]$, $\deg P_3 \leq n$, а функция g – уравнению вида (15), где числа $a_3, \dots, a_7$, вообще говоря, изменятся, а правая часть поделится на z^n . Поскольку функция g целая, то правая часть этого нового уравнения должна иметь вид $a_{12} + a_{13}/z + a_{14}/z^2$. В случае $a_7 = 0$ имеем также $a_{14} = 0$, и лемма справедлива. Если $a_7 \neq 0$, то, рассмотрев функцию $g + a_{14}/a_7$, получим, что она удовлетворяет уравнению (4). Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть E -функция

$$f = R_0 f_1 + R_1 f_1' + R, \quad R_0, R_1, R \in \mathbb{A}(z), \quad (16)$$

а f_1 – E -функция, удовлетворяющая уравнению

$$y' = \left(a_0 + \frac{a_1}{z}\right)y + \left(P + \frac{a}{z}\right)\varphi_\lambda(\alpha z) + R_2, \quad (17)$$

где $a_0, a_1, a, \alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, $P \in \mathbb{A}[z]$, $R_2 \in \mathbb{A}(z)$. Тогда

$$f = R_3 \varphi_\lambda(\alpha z) + R_4 \varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + R_5, \quad \lambda_1 \in \mathbb{Q}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{A}, \quad (18)$$

либо

$$f = R_3 g + R_4 g' + R_5, \quad R_3, R_4, R_5 \in \mathbb{A}(z), \quad (19)$$

где g – E -функция, удовлетворяющая уравнению вида (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (16) и (17) получаем

$$f = R_6 f_1 + R_7 \varphi_\lambda(\alpha z) + R_8, \quad R_6, R_7, R_8 \in \mathbb{A}(z). \quad (20)$$

Функция $f_1 + cz^k \varphi_\lambda(\alpha z)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $c \in \mathbb{A}$, как следует из уравнения (17) и леммы 11, удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(a_0 + \frac{a_1}{z}\right)y + \left(P + (\alpha - a_0)cz^k + (k - \lambda - a_1)cz^{k-1} + \frac{a}{z}\right)\varphi_\lambda(\alpha z) + R_2 + \lambda cz^{k-1}.$$

Отсюда видно, что в случае $\alpha - a_0 \neq 0$ и в случае $\alpha - a_0 = 0$, $k - \lambda - a_1 \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$, можно подобрать $P_1 = \sum c_k z^k \in \mathbb{A}[z]$ так, чтобы функция $f_2 = f_1 + P_1 \varphi_\lambda(\alpha z)$ удовлетворяла уравнению вида (17), но уже с $P \equiv 0$. В случае $\alpha - a_0 = 0$, $k_0 - \lambda - a_1 = 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, очевидно, что при правильном выборе P_1 можно обнулить все слагаемые в многочлене P , кроме, быть может, одного, содержащего z^{k_0-1} , а также дробь a/z . Таким образом, во всех случаях функция f_2 удовлетворяет уравнению (14), где $k \geq -1$. Если в равенстве (14) $a_2 \neq 0$, то из определения функции f_2 , равенств (20) и (14) получим $f = R_9 f_2 + R_{10} f_2' + R_{11}$, где $R_9, R_{10}, R_{11} \in \mathbb{A}(z)$. Согласно лемме 12 для некоторых $n \in \mathbb{Z}^+$ и $P_2 \in \mathbb{A}[z]$ справедливо равенство $f_2 = z^n g + P_2$, где g – E -функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (4). Следовательно, функция f имеет вид (19), что и требовалось доказать. Если $a_2 = 0$, то согласно теореме 2 работы [3] $f_2 = P_3 \varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + P_4$, $\lambda_1 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_1 \in \mathbb{A}$, $P_3, P_4 \in \mathbb{A}[z]$. Выразив f_1 через f_2 и подставив результат в (20), получим равенство (18). Лемма доказана.

2. Основная лемма.

ЛЕММА 14. Если E -функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (1), то она имеет вид либо (18), либо (16), где $f_1(z)$ – E -функция, удовлетворяющая уравнению (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО осуществляется по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 работы [4], с некоторым усложнением рассуждений. Действительно, согласно лемме 7 достаточно ограничиться рассмотрением уравнения

$$y'' + \left(a + \frac{Q_1}{Q_2}\right)y' + \left(b + \frac{Q_0}{Q_2}\right)y = \frac{Q}{Q_2}, \quad (a, b) \neq (0, 0), \quad (21)$$

где $a, b \in \mathbb{A}$, $Q_0, Q_1, Q_2, Q \in \mathbb{A}[z]$, $\max(\deg Q_1, \deg Q_0) < \deg Q_2$. Обозначим $\xi_1, \dots, \xi_m$, $\xi_0 = 0$ все конечные особые точки уравнения (21). Пусть его наименьший показатель в точке ξ_j , $1 \leq j \leq m$, равен $n_j \geq 0$, а λ , λ_1 — его показатели в точке $\xi_0 = 0$. Рассмотрим многочлен $P = (z - \xi_1)^{n_1} \cdots (z - \xi_m)^{n_m}$. Согласно леммам 2, 4, 5, 9 найдется многочлен $P_1 \in \mathbb{A}[z]$ такой, что функция $g(z) = (f(z) - P_1)/P$ является E -функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению вида (21), не имеющему особых точек, отличных от $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$, причем всякая особая точка является регулярной. Из выбора многочлена P следует, что наименьший показатель полученного дифференциального уравнения в каждой точке $\xi_j \neq 0$ равен нулю. Отсюда и из леммы 8 получаем, что функция Q_0/Q_2 в точке $\xi_j \neq 0$ может иметь полюсы не более, чем 1-го порядка. Тогда из леммы 3 следует, что функция $g(z)$ удовлетворяет либо дифференциальному уравнению (4), либо дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a + \frac{1 - \lambda - \lambda_1}{z} - \frac{k_1}{z - \xi_1} - \cdots - \frac{k_m}{z - \xi_m}\right)y' + \left(b + \frac{b_0}{z} + \frac{\lambda\lambda_1}{z^2} + \frac{b_1}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{b_m}{z - \xi_m}\right)y = \frac{Q_3}{Q_2}, \quad (22)$$

где $a, \lambda, \lambda_1, b, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{A}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $\xi_j \in \mathbb{A}$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть $k = k_1 + \cdots + k_m$. Дальнейшее доказательство теоремы будем проводить индукцией по k . Если $k = 0$, то утверждение теоремы выполняется. Предположим, что утверждение справедливо для всех E -функций, удовлетворяющих произвольным дифференциальным уравнениям вида (22) при любых $m \in \mathbb{Z}^+$, $k \leq n - 1$, $n \geq 1$, и докажем его для $k = n$. Если $(b_m, \lambda) \neq (0, 0)$, рассмотрим функцию $g_1(z) = e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda} g(z)$, где $\alpha_1 = \lambda/\xi_m - b_m/k_m$. Как следует из леммы 9, $g_1(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a - 2\alpha_1 + \frac{1 - \lambda_1 + \lambda}{z} - \frac{k_1}{z - \xi_1} - \cdots - \frac{k_m}{z - \xi_m}\right)y' + \left(b^* + \frac{b_0^*}{z} + \frac{b_1^*}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{b_{m-1}^*}{z - \xi_{m-1}}\right)y = e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda} \frac{Q_3}{Q_2},$$

где $b^*, b_0^*, \dots, b_{m-1}^* \in \mathbb{A}$, которое можно записать в виде

$$y'' + \frac{Q_4}{Q_2}y' + \frac{Q_5}{Q_2}y = e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda} \frac{Q_3}{Q_2}, \quad (23)$$

где $Q_4, Q_5 \in \mathbb{A}[z]$, $\deg Q_4 \leq m + 1$, $Q_2 = z(z - \xi_1) \cdots (z - \xi_m)$.

Рассмотрим случай $Q_5 \equiv 0$. Тогда решениями однородных дифференциальных уравнений, соответствующих уравнениям (23) и (22), являются функции $y_* \equiv 1$ и $v_* = e^{-\alpha_1 z} z^\lambda$ соответственно. Будем искать функцию $g(z)$ в виде

$$g = v_* \int w \, dz. \quad (24)$$

Дифференцируя равенство (24), получаем

$$g' = \left(-\alpha_1 + \frac{\lambda}{z}\right) g + v_* w, \quad (25)$$

откуда следует, что $z v_* w$ есть E -функция. Подставляя равенство (24) в уравнение (22), найдем уравнение, которому удовлетворяет функция w . Далее, воспользовавшись леммой 11, получим, что E -функция $z v_* w$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(\alpha_1 - a + \frac{\lambda_1}{z} + \frac{k_1}{z - \xi_1} + \dots + \frac{k_m}{z - \xi_m}\right) y + \frac{z Q_3}{Q_2}.$$

Согласно доказательству теоремы 2 работы [3] отсюда имеем

$$z v_* w = P_2 \varphi_{-\lambda_1}((\alpha_1 - a)z) + P_3, \quad P_2, P_3 \in \mathbb{A}[z], \quad \lambda_1 \in \mathbb{Q}.$$

Из этого равенства и (25) следует, что функция $g(z)$ удовлетворяет уравнению (17), откуда ввиду леммы 13 получаем доказываемое утверждение.

Если же в уравнении (23) $Q_5 \not\equiv 0$, то $Q_5 = z^{l_0}(z - \xi_1)^{l_1} \dots (z - \xi_m)^{l_m} Q_6$, $Q_6 \in \mathbb{A}[z]$, $l_j \geq 0$, $l_m \geq 1$, $\deg Q_6 = \mu \leq m + 1 - (l_0 + l_1 + \dots + l_m)$, $Q_6 = c(z - \beta_1)^{p_1} \dots (z - \beta_s)^{p_s}$, $p_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \neq \beta_j$, $\beta_i \neq \xi_j$, $c \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

Согласно лемме 10 функция $g'_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} y'' + \left(a - 2\alpha_1 + \frac{1 - a_0 - l_0}{z} - \sum_{j=1}^m \frac{k_j - 1 + l_j}{z - \xi_j} - \sum_{i=1}^s \frac{p_i}{z - \beta_i}\right) y' \\ + \left(\frac{a_0 l_0}{z^2} + \sum_{j=1}^m \frac{k_j l_j}{(z - \xi_j)^2} + \frac{Q_7}{Q_9}\right) y = e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda-1} \frac{Q_8}{Q_{10}}, \end{aligned}$$

где $Q_7, Q_8, Q_{10} \in \mathbb{A}[z]$, $Q_9 = (z - \beta_1) \dots (z - \beta_s) Q_2$, $a_0 = \lambda_1 - \lambda - 1$.

Функция $e^{-\alpha_1 z} z^{\lambda+1} g'_1(z)$ является E -функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} y'' + \left(a - \frac{\lambda_1 + \lambda + l_0}{z} - \sum_{j=1}^m \frac{k_j - 1 + l_j}{z - \xi_j} - \sum_{i=1}^s \frac{p_i}{z - \beta_i}\right) y' \\ + \left(\frac{a_1 \lambda_1}{z^2} + \sum_{j=1}^m \frac{k_j l_j}{(z - \xi_j)^2} + \frac{Q_{11}}{Q_9}\right) y = \frac{Q_8}{Q_{10}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $Q_{11} \in \mathbb{A}[z]$, $a_1 = \lambda + l_0 + 1$.

Показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (26), в точке $\xi_j \neq 0$ согласно лемме 8 равны l_j и k_j . Рассмотрим многочлен

$$P_4 = (z - \xi_1)^{l_1^*} \cdots (z - \xi_m)^{l_m^*},$$

где $l_j^* = \min(l_j, k_j)$, $1 \leq j \leq m$, $l_m^* \geq 1$. Согласно леммам 4, 8 и 9 существует многочлен $P_5 \in \mathbb{A}[z]$ такой, что функция $g_2(z) = (e^{-\alpha_1 z} z^{\lambda+1} g_1'(z) - P_5)/P_4$ является E -функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению, коэффициент которого при y в точках $\xi_j \neq 0$ имеет полюсы не более, чем 1-го порядка, а коэффициент при y' равен

$$a - \frac{\lambda_1 + \lambda + l_0}{z} - \sum_{j=1}^m \frac{k_j - 1 + l_j - 2l_j^*}{z - \xi_j} - \sum_{i=1}^s \frac{p_i}{z - \beta_i}.$$

Величина k у полученного дифференциального уравнения не превосходит

$$n + \mu - m + (l_1 + \cdots + l_m) - 2(l_1^* + \cdots + l_m^*) \leq n + 1 - 2(l_1^* + \cdots + l_m^*) \leq n - 1.$$

Согласно индуктивному предположению функция $g_2(z)$ и, следовательно, $e^{-\alpha_1 z} z^{\lambda+1} \times g_1'(z)$, имеет вид (18) или (16), а $g_1'(z)$ имеет вид

$$(R_0 \varphi_\lambda(\alpha z) + R_1 \varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + R)e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda-1},$$

либо

$$(R_0 f_1(z) + R_1 f_1'(z) + R)e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda-1},$$

где $R_0, R_1, R \in \mathbb{A}(z)$, $f_1(z) - E$ -функция, являющаяся решением уравнения (4). Но тогда из уравнения (23), которому удовлетворяет функция $g_1(z)$, получаем, что $g_1(z)$ имеет аналогичный вид. Следовательно, $g(z)$ и $f(z)$ имеют вид (18) или (16). Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Достаточность условий теоремы проверяется непосредственным вычислением (подробнее об этом см. п. 4, леммы 16 и 17).

Для дальнейшего доказательства заметим, что согласно лемме 14 функция $f(z)$ имеет вид (16) или (18). Из равенства (16) следует $f'(z) = R_2 f_1(z) + R_3 f_1'(z) + R_4$, где $R_2, R_3, R_4 \in \mathbb{A}(z)$. Если $R_1 R_2 - R_0 R_3 \equiv 0$, то

$$R_1 f'(z) - R_3 f(z) = (R_1 R_2 - R_0 R_3) f_1(z) + R_1 R_4 - R_3 R \in \mathbb{A}(z)$$

и, следовательно, $f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$. Тогда согласно теореме 2 работы [3]

$$f(z) = P \varphi_\lambda(\alpha z) + P_1,$$

где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, и теорема справедлива. Если $R_1 R_2 - R_0 R_3 \neq 0$, то функции $f_1(z), f_1'(z)$ линейно выражаются через функции $f(z), f'(z)$ и поэтому являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{C}(z)$. Предположив, что функция $f_1(z)$ имеет вид (5) или (6), из равенства (16) получим, что функция $f(z)$ также имеет вид (5) (соответственно (6)), но уже с $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}(z)$. Если $f(z)$ имеет вид (18), то с помощью аналогичных рассуждений и теоремы 4 из [2, гл. 5], а также формулы

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{l-1} \frac{z^n}{(\lambda+1) \cdots (\lambda+n)} + \frac{z^l}{(\lambda+1) \cdots (\lambda+l)} \varphi_{\lambda+l}(z), \quad (27)$$

где $l \in \mathbb{N}$, снова убеждаемся, что имеют место равенства (5) или (6). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить, что если $f(z)$ удовлетворяет уравнению (4), то она имеет вид (5) или (6) с $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}(z)$, и что отсюда следуют включения $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z]$.

ЛЕММА 15. Если E -функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (4) и алгебраически зависит с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$, то существует решение y_* однородного уравнения, соответствующего уравнению (4), такое, что $y'_*/y_* = P/S$, $P, S \in \mathbb{C}[z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 10 книги [2, гл. 6] однородное уравнение, соответствующее уравнению (4), имеет решение y_* такое, что его логарифмическая производная y'_*/y_* есть алгебраическая функция над $\mathbb{C}(z)$. Функция $v_* = \exp(az/2)y_*$ согласно следствию из леммы 9 удовлетворяет уравнению

$$y'' + \frac{a_1}{z}y' + \left(b^* + \frac{b_1^*}{z} + \frac{b_2^*}{z^2}\right)y = 0, \quad a_1, b^*, b_1^*, b_2^* \in \mathbb{A}. \quad (28)$$

Рассмотрим функцию $u = v'_*/v_* = y'_*/y_* + a/2$. Она является алгебраической и удовлетворяет уравнению Риккати

$$u' + u^2 + \frac{a_1}{z}u + b^* + \frac{b_1^*}{z} + \frac{b_2^*}{z^2} = 0. \quad (29)$$

Пусть $b^* \neq 0$. Докажем, что $z = \infty$ не является точкой ветвления функции u . Отсюда будет следовать, что эта функция не имеет точек ветвления вообще.

Разложим функцию u в окрестности точки $z = \infty$ в степенной ряд с рациональными показателями:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{r_k}, \quad c_1 \neq 0, \quad r_1 > r_2 > r_3 > \dots \quad (30)$$

Подставив разложение (30) в уравнение (29), убеждаемся, что $r_1 = 0$, $c_1^2 = -b^*$. Если не все показатели r_k в ряде (30) целые, то пусть r_{k_1} — наибольший дробный показатель такой, что $c_{k_1} \neq 0$. Тогда, подставляя разложение (30) в уравнение (29) и рассматривая коэффициент при наибольшей дробной степени z , получаем $c_1 c_{k_1} = 0$, что противоречит нашим допущениям. Следовательно, $u \in \mathbb{C}(z)$.

Пусть теперь в уравнении (28) $b^* = 0$. Обозначив λ_1 и λ_2 показатели этого уравнения в точке $z = 0$, ввиду леммы 8 получим $a_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, $b_2^* = \lambda_1 \lambda_2$. Функция $v_{**} = z^{-\lambda_1} v_*$ согласно лемме 9 удовлетворяет уравнению

$$y'' + \frac{1-l}{z}y' + \frac{\alpha}{z}y = 0, \quad (31)$$

где $l = \lambda_2 - \lambda_1$, $\alpha = b_1^*$.

Если $\alpha = 0$, то уравнению (31) удовлетворяет функция $y \equiv 1$, а однородному уравнению, соответствующему (4), — функция $y_* = z^{\lambda_1} e^{-az/2}$, откуда снова получаем $y'_*/y_* \in \mathbb{C}(z)$. Если $\alpha \neq 0$, то алгебраическая функция $u = v'_{**}/v_{**} = -\lambda/z + a/2 + y'_*/y_*$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$u' + u^2 + \frac{1-l}{z}u + \frac{\alpha}{z} = 0. \quad (32)$$

Подставляя разложение (30) в уравнение (32), убеждаемся, что $r_1 = -1/2$, $c_1 = \pm\sqrt{-\alpha}$, $r_2 = -1$, $c_2 = l/2 - 1/4$. Докажем, что знаменатели рациональных показателей в ряде (30) не могут быть больше, чем 2. Если это не так, то пусть r_{k_1} — наибольший показатель со знаменателем, содержащим простой множитель $p > 2$ или множитель 2^n ,

$n > 1$, а $c_{k_1} \neq 0$. Тогда, подставив разложение (30) в уравнение (32), получим, что наибольший показатель со знаменателем, содержащим аналогичный множитель, равен $-1/2 + r_{k_1}$, а коэффициент при степени z с таким показателем равен $2c_1 c_{k_1} \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что наибольший общий знаменатель показателей $r_1, r_2, r_3, \dots$ равен 2.

Разложим функцию u в окрестности точки $z = 0$:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{t_k}, \quad d_1 \neq 0, \quad t_1 < t_2 < t_3 < \dots \quad (33)$$

Подставив разложение (33) в уравнение (32), убеждаемся, что $-1 \leq t_1 \leq 0$, причем если $t_1 = -1$, то $d_1 = l$. Поскольку порядки ветвления в точках $z = 0$ и $z = \infty$, очевидно, совпадают, наибольший общий знаменатель показателей $t_1, t_2, t_3, \dots$ также равен 2. Обозначим t_{k_1} наименьший показатель вида $m + 1/2$, где $m \in \mathbb{Z}$. Подставляя разложение (33) в уравнение (32), в случае $t_1 \neq -1$ получим, что $(m + 3/2 - l)d_{k_1} = 0$, а в случае $t_1 = -1 - (m + 3/2 + l)d_{k_1} = 0$, откуда l должно равняться половине нечетного числа. Показатели дифференциального уравнения (31) в точке $z = 0$ есть числа l и 0. Следовательно, фундаментальную систему решений этого уравнения образуют функции $f_1(z)$ и $z^l f_2(z)$, где $f_1(z), f_2(z)$ – некоторые целые функции, определяемые однозначно с точностью до множителя из $\mathbb{C}$, $f_1(0)f_2(0) \neq 0$. Нетрудно проверить, что уравнению (31) удовлетворяют функции

$$K_{-l}(2\sqrt{\alpha z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!(1-l) \cdots (n-l)} z^n,$$

$$z^l K_l(2\sqrt{\alpha z}) = z^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!(l+1) \cdots (l+n)} z^n,$$

где $K_\lambda(z)$ – функция Зигеля (см. [2, с. 18, 19]). Однородное уравнение, соответствующее исходному уравнению (4), имеет фундаментальную систему решений $e^{-az/2} z^{\lambda_1} f_1(z)$, $e^{-az/2} z^{l+\lambda_1} f_2(z)$. Эти функции вместе с исходной функцией $f(z)$ образуют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения 3-го порядка (8), где $m = 2$. Но согласно доказанному Андрэ (см. [8, следствие 4.4]) фундаментальную систему решений в нашем случае должны образовывать функции $f(z)$, $z^{\alpha_1} f_3(z)$, $z^{\alpha_2} f_4(z)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, $f_3(z), f_4(z)$ – E -функции. Тогда $e^{-az/2} f_1(z)$ и $e^{-az/2} f_2(z)$ должны быть E -функциями, что при $\alpha \neq 0$ невозможно. Лемма доказана.

Записав функцию u в виде суммы простейших дробей и подставив ее в уравнение (29), приходим к выводу, что

$$\frac{y'_*}{y_*} = \frac{P}{S} = b_0 + \frac{b}{z} + \sum_{j=1}^l \frac{1}{z - \alpha_j}, \quad b_0, b \in \mathbb{A}, \quad S = z(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_l), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}.$$

Представим функцию f в виде

$$f = y_* \int w dz. \quad (34)$$

Дифференцируя равенство (34), получаем

$$f' = \frac{P}{S}f + y_*w, \quad (35)$$

откуда следует, что y_*wS есть целая функция. Подставив равенство (34) в уравнение (4) и воспользовавшись леммой 11, получим, что функция y_*wS удовлетворяет уравнению $y' = (S'/S - a - a_1/z - P/S)y + (c + c_1/z)S$, равносильному

$$y' = \left(a^* + \frac{a_1^*}{z}\right)y + \left(c + \frac{c_1}{z}\right)S, \quad a^*, a_1^*, c, c_1 \in \mathbb{A}.$$

Следовательно, $y_*wS = b_1\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1$, где $\alpha, \lambda \in \mathbb{A}$, $b_1 \in \mathbb{C}$, $P_1 \in \mathbb{C}[z]$ (см. [3, доказательство теоремы 2]). Отсюда и из уравнения (35) получим, что E -функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \frac{P}{S}y + \frac{b_1\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1}{S}. \quad (36)$$

Согласно результатам книги [2, гл. 3, § 2] $b_1 \in \mathbb{A}$, $P, P_1, S \in \mathbb{A}[z]$. Тогда ввиду уравнения (35) y_*wS есть E -функция, а $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Из равенства (36) и условий теоремы следует, что функции $f(z)$ и $\varphi_\lambda(\alpha z)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$. Пусть $G(x) = x^r + u_{r-1}x^{r-1} + \dots + u_1x + u_0$ — минимальный многочлен функции $f(z)$ над полем $\mathbf{L} = \mathbb{C}(z, \varphi_\lambda(\alpha z))$. Сопряженные над $\mathbf{L}$ с $f(z)$ функции $f_1 = f(z), f_2, \dots, f_r$ удовлетворяют уравнению (36) (см. [2, гл. 9, следствие из леммы 2]). Следовательно, $f_2 = f_1 + c_2\psi, \dots, f_r = f_1 + c_r\psi$, где $\psi = e^{b_0z}z^{b-1}S$ — решение однородного уравнения $y' = (P/S)y$, $c_i \neq c_j \neq 0$ при $i \neq j$. Подставив полученные выражения для функций $f_j, j = 2, \dots, r$, в тождество $G(f_j) - G(f_1) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} r f_1^{r-1} c_j \psi + \dots + (c_j \psi)^r + ((r-1) f_1^{r-2} c_j \psi + \dots + (c_j \psi)^{r-1}) u_{r-1} + \dots \\ + (2 f_1 c_j \psi + (c_j \psi)^2) u_2 + c_j \psi u_1 = 0, \quad j = 2, 3, \dots, r, \end{aligned}$$

что равносильно

$$\begin{aligned} (c_j \psi)^{r-1} + (c_j \psi)^{r-2} v_{r-2} + \dots + c_j \psi v_1 + v_0 = 0, \quad j = 2, 3, \dots, r, \\ v_k \in \mathbf{L}[f_1], \quad k = 0, 1, \dots, r-2, \quad v_{r-2} = r f_1 + u_{r-1}. \end{aligned}$$

При $r = 2$ отсюда имеем $c_2\psi + 2f_1 + u_1 = 0$. Если $r \geq 3$, то полученные равенства можно рассматривать как систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно функций $\psi^{r-1}, \psi^{r-2}v_{r-2}, \dots, \psi v_1$, определитель матрицы коэффициентов которой есть определитель Вандермонда $V = V(c_2, \dots, c_r) \neq 0$, умноженный на $c_2 \dots c_r \neq 0$. Согласно правилу Крамера

$$\psi^{r-1}D = -v_0 \begin{vmatrix} 1 & c_2^{r-2} & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_r^{r-2} & \dots & c_r \end{vmatrix}, \quad \psi^{r-2}v_{r-2}D = -v_0 \begin{vmatrix} c_2^{r-1} & 1 & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_r^{r-1} & 1 & \dots & c_r \end{vmatrix},$$

где $D = c_2 \dots c_r V$, откуда $\psi = c_* v_{r-2} = c_*(r f_1 + u_{r-1})$, $c_* \in \mathbb{C}$. Таким образом, при любом $r \in \mathbb{N}$ $f(z) = c_* e^{b_0z} z^{b-1} S + u^*$, где $c_* \in \mathbb{C}$, $u^* \in \mathbf{L}$. Ввиду алгебраической зависимости функций $f(z)$ и $\varphi_\lambda(\alpha z)$ это возможно лишь в следующих случаях:

- 1) $\lambda \notin \mathbb{Z}^+, c^* = 0, f(z) \in \mathbf{L}$;
- 2) $\lambda = k \in \mathbb{Z}^+, \alpha = \sigma b_0, \sigma \in \mathbb{Q}, f(z) \in \mathbb{C}(z, e^{\alpha_* z}), \alpha_* \in \mathbb{A}$ (см. [2, гл. 5, лемма 6]).

Рассмотрим случай 1). Пусть $f(z) = A/B$, где

$$A = A_k \varphi_\lambda^k(\alpha z) + \cdots + A_1 \varphi_\lambda(\alpha z) + A_0, \quad B = B_n \varphi_\lambda^n(\alpha z) + \cdots + B_1 \varphi_\lambda(\alpha z) + B_0,$$

$A_0, \dots, A_k, B_0, \dots, B_n \in \mathbb{C}[z]$, $k, n \in \mathbb{Z}^+$. Докажем, что $n = 0$. Дифференцируя равенство $Bf = A$, с учетом (36) получим

$$\left(B' + \frac{P}{S}B\right)f = A' - \frac{(b_1 \varphi_\lambda(\alpha z) + P_1)B}{S}. \quad (37)$$

Поскольку степень многочлена $B' + PB/S$ относительно $\varphi_\lambda(\alpha z)$ не превосходит степени B , эти многочлены отличаются друг от друга множителем из $\mathbb{C}[z]$. Предположим, что $n \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{B'_n + n(\alpha - \lambda/z)B_n + (P/S)B_n}{B_n} \\ &= \frac{B'_{n-1} + (n-1)(\alpha - \lambda/z)B_{n-1} + (P/S)B_{n-1} + (n\lambda/z)B_n}{B_{n-1}}, \end{aligned}$$

что равносильно равенству

$$\frac{B'_n}{B_n} + \alpha - \frac{\lambda}{z} = \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}} + \frac{n\lambda B_n}{zB_{n-1}}. \quad (38)$$

Пусть многочлены B_n и B_{n-1} имеют число 0 корнем кратности соответственно $l \geq 0$ и $l_1 \geq 0$. Так как в разложении на простейшие дроби левой (а следовательно, и правой) части равенства (38) могут присутствовать только дроби с линейными функциями в знаменателе, то $l_1 \leq l$. Если $l_1 < l$, то $\lambda \in \mathbb{N}$, что противоречит условию. Поэтому $l_1 = l$. Если $\xi \neq 0$ – корень многочлена B_n , то из равенства (38) следует, что он должен быть также корнем многочлена B_{n-1} не меньшей кратности. Но тогда $\deg B_n \leq \deg B_{n-1}$ и из (38) получаем, что $\alpha = 0$, $f(z) \in \mathbb{C}[z]$. Таким образом, далее можно считать, что $n = 0$, $B \in \mathbb{C}[z]$.

Допустим, что $k \geq 3$. Тогда из равенства (37) получим

$$\frac{A'_k + k(\alpha - \lambda/z)A_k}{A_k} = \frac{A'_{k-1} + (k-1)(\alpha - \lambda/z)A_{k-1} + (k\lambda/z)A_k}{A_{k-1}},$$

что равносильно равенству

$$\frac{A'_k}{A_k} + \alpha - \frac{\lambda}{z} = \frac{A'_{k-1}}{A_{k-1}} + \frac{k\lambda A_k}{zA_{k-1}}.$$

Поскольку полученное равенство полностью аналогично (38), делаем вывод, что $k \leq 2$,

$$f(z) = \frac{P_2 \varphi_\lambda^2(\alpha z) + P_3 \varphi_\lambda(\alpha z) + P_4}{P_5}, \quad (39)$$

где $P_2, \dots, P_5$ – взаимно простые многочлены из $\mathbb{C}[z]$. Можно считать, что $P_2, \dots, P_5 \in \mathbb{A}[z]$ (см. [2, гл. 3, лемма 2]). Многочлен P_5 не может иметь корнем число $\xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$,

так как отсюда следовало бы, что $\varphi_\lambda(\alpha\xi) \in \mathbb{A}$. Поэтому $P_5 = z^l$, $l \in \mathbb{Z}^+$. Но тогда, выражая $\varphi_\lambda(\alpha z)$ через $\varphi_{\lambda+l}(\alpha z)$ по формуле (27), получаем, что многочлены в числителе преобразованной правой части равенства (39) также делятся на z^l . Следовательно, в случае 1) утверждение теоремы справедливо.

Случай 2) рассматривается аналогично случаю 1) с той лишь разницей, что при $\lambda = 0$ к противоречию должны приводиться утверждения, что многочлен B содержит хотя бы два члена различных степеней относительно $e^{\alpha_* z} = \varphi_0(\alpha_* z)$, а многочлен A — более двух таких членов различных ненулевых степеней. В результате вместо равенства (39) мы получим равенство

$$f(z) = \frac{P_2 \varphi_0(\alpha_* l z) + P_3 \varphi_0(\alpha_* s z) + P_4}{P_5}, \quad P_2, \dots, P_5 \in \mathbb{A}[z], \quad l, s \in \mathbb{Z},$$

и, повторяя оставшиеся рассуждения в доказательстве случая 1), завершаем доказательство теоремы.

4. Доказательство теоремы 3. Если функции $f(z)$ и $f'(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, то утверждение теоремы 3 следует из 2-й основной теоремы Шидловского [2, гл. 3]. Если же они алгебраически зависимы, то при условиях теоремы функция $f(z)$ имеет вид (5), где $\sigma \alpha P_0 P_1 \neq 0$, $\sigma \neq 1$, либо вид (6), где $\alpha P_0 \neq 0$. Непосредственным вычислением можно найти дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет такая функция и установить следующие две леммы.

ЛЕММА 16. *Функция $f(z)$, имеющая вид (5), удовлетворяет уравнениям*

$$y' = \left(P'_0 + \left(\alpha - \frac{k}{z} \right) P_0 \right) \varphi_k(\alpha z) + \left(P'_1 + \left(\sigma \alpha - \frac{k}{z} \right) P_1 \right) \varphi_k(\sigma \alpha z) + \frac{k}{z} P_0 + \frac{k}{z} P_1 + P', \quad (40)$$

$$y' = \left(\alpha - \frac{k}{z} + \frac{P'_0}{P_0} \right) y + T \varphi_k(\sigma \alpha z) + R,$$

$$y'' = \left((\sigma + 1) \alpha - \frac{2k}{z} + \frac{P'_0}{P_0} + \frac{T'}{T} \right) y' + R_1 y + R_2, \quad (41)$$

где

$$T = P'_1 + \left((\sigma - 1) \alpha - \frac{P'_0}{P_0} \right) P_1, \quad R, R_1, R_2 \in \mathbb{A}(z).$$

ЛЕММА 17. *Функция $f(z)$, имеющая вид (6), удовлетворяет уравнениям*

$$y' = \left(P'_0 + 2 \left(\alpha - \frac{\lambda}{z} \right) P_0 \right) \varphi_\lambda^2(\alpha z) + \left(P'_1 + \left(\alpha - \frac{\lambda}{z} \right) P_1 + \frac{2\lambda}{z} P_0 \right) \varphi_\lambda(\alpha z) + \frac{\lambda}{z} P_1 + P', \quad (42)$$

$$y' = \left(2 \left(\alpha - \frac{\lambda}{z} \right) + \frac{P'_0}{P_0} \right) y + T \varphi_\lambda(\alpha z) + R,$$

$$y'' = \left(3 \left(\alpha - \frac{\lambda}{z} \right) + \frac{P'_0}{P_0} + \frac{T'}{T} \right) y' + R_1 y + R_2, \quad (43)$$

где

$$T = P'_1 + \left(-\alpha + \frac{\lambda}{z} - \frac{P'_0}{P_0} \right) P_1 + \frac{2\lambda}{z} P_0, \quad R, R_1, R_2 \in \mathbb{A}(z).$$

Легко видеть, что при условиях теоремы 3 рациональные функции, являющиеся коэффициентами дифференциальных уравнений (40)–(43), определены однозначно. Покажем, что всякая точка $\xi \neq 0$, для которой числа $f(\xi)$, $f'(\xi)$ и 1 являются линейно зависимыми над $\mathbb{A}$, есть особая точка уравнения (1). Действительно, в силу линейной независимости значений функций $\varphi_k(\alpha z)$, $\varphi_k(\sigma \alpha z)$ (соответственно $\varphi_\lambda(\alpha z)$, $\varphi_\lambda^2(\alpha z)$) и 1 над $\mathbb{A}$ из равенств (5), (6), (40), (42) следует, что числа $f(\xi)$, $f'(\xi)$ и 1 линейно зависимы тогда и только тогда, когда вектор $\{P_0(\xi), P_1(\xi)\}$ коллинеарен соответственно векторам

$$\left\{ P'_0(\xi) + \left(\alpha - \frac{k}{\xi} \right) P_0(\xi), P'_1(\xi) + \left(\sigma \alpha - \frac{k}{\xi} \right) P_1(\xi) \right\}, \quad (44)$$

$$\left\{ P'_0(\xi) + 2 \left(\alpha - \frac{\lambda}{\xi} \right) P_0(\xi), P'_1(\xi) + \left(\alpha - \frac{\lambda}{\xi} \right) P_1(\xi) + \frac{2\lambda}{\xi} P_0(\xi) \right\}. \quad (45)$$

Если $P_0(\xi) = 0$, $P_1(\xi) \neq 0$, то отсюда $P'_0(\xi) = 0$ и, следовательно, ξ есть нуль функции P_0 кратности не меньше, чем 2. Но тогда ξ – полюс 1-го порядка функции T и коэффициента при y' в уравнении (41) (соответственно (43)). Случай $P_1(\xi) = 0$, $P_0(\xi) \neq 0$ для функции $f(z)$ вида (5) разбирается аналогично, а для функции вида (6) в силу пропорциональности векторов $\{P_0(\xi), P_1(\xi)\}$ и (45) имеем $P'_1(\xi) + (2\lambda/\xi)P_0(\xi) = 0$. Но тогда ξ – нуль функции T и полюс 1-го порядка коэффициента при y' в уравнении (43). Если $P_0(\xi)P_1(\xi) \neq 0$, то в силу пропорциональности векторов $\{P_0(\xi), P_1(\xi)\}$ и (44) (соответственно (45)) имеем соответственно

$$\begin{aligned} \frac{P'_1(\xi)}{P_1(\xi)} - \frac{P'_0(\xi)}{P_0(\xi)} + (\sigma - 1)\alpha &= 0, \\ \frac{P'_1(\xi)}{P_1(\xi)} - \frac{P'_0(\xi)}{P_0(\xi)} + \frac{2\lambda}{\xi} \frac{P_0(\xi)}{P_1(\xi)} - \alpha + \frac{\lambda}{\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $T(\xi) = 0$ и точка ξ снова является полюсом 1-го порядка коэффициента при y' . Если, наконец, $P_0(\xi) = P_1(\xi) = 0$, то ξ – неособая точка функции T и вновь полюс 1-го порядка коэффициента при y' . Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Достаточность условий теоремы следует из того, что если E -функция $f_1(z)$ удовлетворяет уравнению (4), то функция $f(z)$, определяемая равенством (3) или (2), является E -функцией, линейно зависимой с $f'(z)$, $f''(z)$ и 1 над $\mathbb{C}(z)$.

Для доказательства необходимости заметим, что согласно лемме 14 всякая E -функция, удовлетворяющая уравнению (1), имеет вид (18) либо

$$f(z) = \frac{P_0 f_1(z) + P_1 f'_1(z) + P_2}{P_3}, \quad (46)$$

где $P_0, \dots, P_3$ – взаимно простые многочлены из $\mathbb{A}[z]$, $f_1(z)$ – E -функция, удовлетворяющая уравнению (4). Если функции $f_1(z)$, $f'_1(z)$ и 1 линейно зависимы над $\mathbb{C}(z)$, то функция $f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, и доказываемая теорема следует из теоремы 2 работы [3]. Предположим, что функции $f_1(z)$, $f'_1(z)$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Многочлен P_3 не может иметь корнем число $\xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, так как отсюда следовала бы линейная зависимость

чисел $f(\xi)$, $f'(\xi)$ и 1 над $\mathbb{A}$, что противоречит теореме 3. Поэтому $P_3 = z^l$, $l \in \mathbb{Z}^+$. Рассмотрим многочлен $P_4 \in \mathbb{A}[z]$, $\deg P_4 \leq l$, такой, что функция $g(z) = (f_1(z) - P_4)/z^{l+1}$ является целой и, следовательно, E -функцией. Тогда $f_1(z) = z^{l+1}g(z) + P_4$ и, подставляя это выражение в (46), получим $f(z) = P_5g(z) + P_6g'(z) + P_7$, где $P_5, P_6, P_7 \in \mathbb{A}[z]$. Повторяя конец доказательства леммы 12, устанавливаем, что функция $g(z)$ либо $g(z) + c$, где $c \in \mathbb{A}$, удовлетворяет уравнению (4). Если же $f(z)$ имеет вид (18), то рассуждения проводятся аналогично, с использованием в случае $P_3 = z^l$ равенства (27). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Siegel C. L. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929–1930. № 1. P. 1–70.
- [2] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [3] Горелов В. А. Об алгебраической независимости значений E -функций в особых точках и гипотезе Зигеля // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 174–190.
- [4] Горелов В. А. О гипотезе Зигеля для случая линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 4. С. 549–565.
- [5] Шидловский А. Б. О линейной независимости значений E -функций в алгебраических точках // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 2. С. 174–185.
- [6] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
- [7] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
- [8] André Y. Séries Gevrey de type arithmétique // Ann. of Math. 2000. V. 151. P. 705–756.
- [9] Perron O. Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten // Acta Math. 1911. V. 34. P. 139–163.
- [10] Валирон Ж. Аналитические функции. М.: Гостехиздат, 1957.

Московский энергетический институт (технический университет)
E-mail: GorelovVA@mpei.ru

Поступило
03.06.2004