Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Иванов, Коды m -сложности ≤ 1 , определяющие единичную группу, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 349–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:09:51

УДК 512.543.76

КОДЫ m -СЛОЖНОСТИ ≤ 1 , ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ЕДИНИЧНУЮ ГРУППУ

С. Г. Иванов

Описано семейство кодов единичной группы, имеющих m -сложность ≤ 1 , содержащее Q^{**} -эквивалентную копию каждого сбалансированного кода единичной группы, имеющего m -сложность ≤ 1 .

Библиография: 4 названия.

1. Введение. В связи с проблемой Эндрюса–Кэртиса [1] в работе [2] введено понятие m -сложности сбалансированного генетического кода группы [3], имеющей единичную факторгруппу по коммутанту. Напомним это определение.

Любой сбалансированный генетический код группы, имеющей единичную факторгруппу по коммутанту, Q^{**} -эквивалентен сбалансированному коду, удовлетворяющему двум условиям:

- все соотношения кода имеют длину 3;
- различные соотношения кода, рассматриваемые как циклические слова, возведенные в степень ± 1 , не имеют общих отрезков длины 2.

Сбалансированный генетический код группы, имеющей единичную факторгруппу по коммутанту, и удовлетворяющий этим двум условиям, мы называем *комбинаторным кодом*.

Два кода называются Q^{**} -эквивалентными, если один из них можно преобразовать в другой конечной последовательностью Q^{**} -преобразований:

- 1) обращение соотношения;
- 2) сопряжение соотношения любым словом в образующих кода;
- 3) умножение одного из соотношений на другое соотношение;
- 4) введение новой образующей x и нового соотношения $x^{-1}R$, где R – слово в образующих кода, отличных от x ;
- 5) удаление соотношения $x^{-1}R$ из списка соотношений, где R – слово в образующих кода, отличных от x , и образующей x из списка образующих и замена вхождений x в остальные соотношения на слово R .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01013, и Министерства образования, код проекта Е00-1.0-211.

Пусть x – образующая комбинаторного кода. Образующие этого кода подразделяются на x -хорошие и x -плохие. Сама x является x -хорошей образующей. Образующая этого кода, отличная от x , называется x -хорошей, если она входит в соотношение кода, в котором две другие (не обязательно различные) образующие x -хорошие. Очевидно, что x -хорошие образующие, отличные от x , имеются тогда и только тогда, когда одно из соотношений кода имеет вхождение x^2 . Образующие кода, не являющиеся x -хорошими, называются x -плохими.

Соотношение комбинаторного кода называется x -хорошим, если все три его образующие x -хорошие и называется x -плохим, если одна его образующая x -хорошая и две другие образующие x -плохие. Остальные соотношения кода, если они есть, называются x -очень плохими.

m -сложностью генетического кода группы, имеющей единичную факторгруппу по коммутанту, называется минимальное количество x -очень плохих соотношений по всем комбинаторным кодам, Q^{**} -эквивалентным исходному коду, и по всем образующим этих комбинаторных кодов. Содержательно, m -сложность кода равна минимальному количеству тех соотношений Q^{**} -эквивалентного комбинаторного кода, все образующие которых нельзя выразить через одну и ту же образующую этого комбинаторного кода.

Пусть дан сбалансированный генетический код группы, имеющей единичную факторгруппу по коммутанту. Напишем какой-нибудь Q^{**} -эквивалентный ему комбинаторный код. Минимальное количество x -очень плохих соотношений в этом комбинаторном коде по всем его образующим x является верхней границей m -сложности исходного кода и воспринимается, как количество препятствий на пути к его Q^{**} -тривиализации (т.е. количество препятствий равно нулю). Коды, имеющие не более, чем одно такое препятствие, охарактеризованы в [2].

ТЕОРЕМА 1. *Сбалансированный генетический код группы, имеющей единичную факторгруппу по коммутанту, имеет m -сложность ≤ 1 тогда и только тогда, когда он Q^{**} -эквивалентен некоторому коду одной из следующих двух серий кодов:*

$$\langle x, y \| x^k y x^{1-k} y^{-1}, x^r y^2 x^l y^{-1} \rangle, \quad (K^-)$$

где $k > 3$, $rs \neq 0$;

$$\langle x, y \| x^{2k+1} = y^2, (x^r y)^3 = x^{3k+3r-s+1} y^{-1} x^s y \rangle, \quad (K^+)$$

где $k > 2$, $0 < r < 2k + 1$, $0 \leq s < r$.

Эти две серии кодов образуют вместе подмножество множества всех сбалансированных кодов ранга 2, имеющих 5 вхождений одной из образующих и определяющих группу с единичной факторгруппой по коммутанту, причем, каждый код этого множества Q^{**} -эквивалентен некоторому коду этого подмножества. Обозначим символом $K^-(k.r.l)$ код $\langle x, y \| x^k y x^{1-k} y^{-1}, x^r y^2 x^l y^{-1} \rangle$ и символом $K^+(k.r.s)$ – код $\langle x, y \| x^{2k+1} = y^2, (x^r y)^3 = x^{3k+3r-s+1} y^{-1} x^s y \rangle$.

В [2] найдена другая Q^{**} -эквивалентная характеристика кодов этих серий, напоминающая известные потенциальные контрпримеры к проблеме Эндрюса–Кертиса.

ТЕОРЕМА 2. Код $K^-(k.r.l)$ Q^{**} -эквивалентен коду

$$\langle x, y \| xy^l x^r = y^l x^r y, x^k = y^{k-1} \rangle.$$

Код $K^+(k.r.s)$ Q^{**} -эквивалентен коду

$$\langle x, y \| y^r x^{k-r+1} y^r = x^{k+r}, xy^r x^{r-s} = y^r x^{r-s} y \rangle.$$

Из новой характеристики кодов серии (K^-) следуют ограничения на параметры r и l кода $K^-(k.r.l)$: $0 < r < k$, $0 < l < k - 1$. Кроме того, мы получаем возможность заменить при отыскании Q^{**} -тривиализации показатель степени r на любое число, сравнимое с r по модулю k и показатель степени l на любое число, сравнимое с l по модулю $k - 1$. Это иногда бывает полезно.

ПРИМЕРЫ. Коды $K^-(k.1.k-2)$ и $K^-(2p+1.p.p)$ имеют Q^{**} -тривиализацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$K^-(k.1.k-2) \stackrel{Q^{**}}{\sim} K^-(k.k+1.-k) \stackrel{Q^{**}}{\sim} \langle x, y \| x^k y = y x^{k-1}, x^{k+1} y^2 = y x^k \rangle, \\ R_1 \rightarrow x^k y = y x^k x^{-1} \rightarrow x^k y = x^{k+1} y^2 x^{-1} \rightarrow x^{-1} y x = y^2.$$

Группа $\langle x, y \| x^{-1} y x = y^2 \rangle$ разрешима, поэтому тривиализация полученного кода существует (и легко находится). Имеем

$$K^-(2p+1.p.p) \stackrel{Q^{**}}{\sim} K^-(2p+1.p.-p) \stackrel{Q^{**}}{\sim} \langle x, y \| x^{2p+1} y = y x^{2p}, x^p y^2 = y x^p \rangle, \\ R_2 \rightarrow x^{2p+1} y = y x^p x^p \rightarrow x^{2p+1} y = x^p y^2 x^p \rightarrow x^{p+1} y = y y x^p \\ \rightarrow x^{p+1} y = y x^p y^2 \rightarrow x^{p+1} = y x^p y \rightarrow x^{p+1} = x^p y^2 y \rightarrow x = y^3.$$

В [2] доказано, что все коды серии (K^-) определяют единичную группу. Там же найдено необходимое условие единичности группы, определенной кодом серии (K^+) , заключающееся в том, что наибольший общий делитель трех чисел $2k+1$, $3k+3r-s+1$, s равен единице. Вопрос о достаточности этого условия для единичности группы, определенной кодом серии (K^+) , оставался открытым и решен положительно в этой статье. Поэтому множество всех сбалансированных кодов единичной группы, имеющих m -сложность ≤ 1 , характеризует

ТЕОРЕМА 3. Сбалансированный генетический код единичной группы имеет m -сложность ≤ 1 тогда и только тогда, когда он Q^{**} -эквивалентен некоторому коду $K^-(k.r.l)$, где $k > 3$, $0 < r < k$, $0 < l < k - 1$, или некоторому коду $K^+(k.r.s)$, где $k > 2$, $0 < r < 2k+1$, $0 \leq s < r$, $(2k+1, 3k+3r-s+1, s) = 1$.

2. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 4. Код $K^+(k.r.s)$, удовлетворяющий условию $(2k+1, 3k+3r-s+1, s) = 1$, определяет единичную группу.

Доказательство этой теоремы складывается из нижеследующей цепочки лемм.

ЛЕММА 1. *Наибольший общий делитель чисел $2k + 1$, $3k + 3r - s + 1$, s равен наибольшему общему делителю чисел $2k + 1$, $k + 3r$, s .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарными преобразованиями конечной последовательности чисел называются:

- 1) перестановка чисел последовательности;
- 2) умножение одного из членов последовательности на число взаимно простое со всеми числами последовательности;
- 3) прибавление к одному числу последовательности другого, умноженного на любое целое число.

Элементарные преобразования переводят конечную последовательность целых чисел в конечную последовательность целых чисел, имеющую то же множество наибольших общих делителей всех чисел исходной последовательности. Следовательно, элементарные преобразования не меняют наибольшего общего делителя всех чисел последовательности.

Преобразуем последовательность $2k + 1$, $3k + 3r - s + 1$, s : прибавим число s к $3k + 3r - s + 1$, получим последовательность $2k + 1$, $3k + 3r + 1$, s ; вычтем $2k + 1$ из $3k + 3r + 1$, получим последовательность $2k + 1$, $k + 3r$, s . Так как все сделанные операции являются элементарными преобразованиями, наибольший общий делитель чисел $2k + 1$, $3k + 3r - s + 1$, s равен наибольшему общему делителю чисел $2k + 1$, $k + 3r$, s .

ЛЕММА 2. *Код $K^+(k.r.s)$ Q^{**} -эквивалентен коду*

$$\langle x, z \parallel zx^{k-r+s+1}z = x^{k+r-s}, zx^{r-s}z^{-1} = x^{-r}zx^r \rangle. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем второе соотношение кода (K^+):

$$\begin{aligned} R_2 &\rightarrow x^r y x^r y x^{r-s} x^s y = x^r x^{k+2r-s} x^{2k+1} y^{-1} x^s y \\ &\rightarrow y x^r y x^{r-s} = x^{k+2r-s} y \\ &\rightarrow y x^{r-s} y^{-1} = x^{-r} y^{-1} x^{k+2r-s} \\ &\rightarrow y x^{r-s} y^{-1} = x^{-r} y^{-1} x^{2k+1} x^{-k+r-s-1} x^r \\ &\rightarrow y x^{r-s} x^{-1} = x^{-r} y x^{-k+r-s-1} x^r. \end{aligned}$$

Добавим в список образующих новую образующую z и в список соотношений – новое соотношение $y x^{-k+r-s-1} = z$. Затем удалим y и это новое соотношение. Получим Q^{**} -эквивалентный коду $K^+(k.r.s)$ код (1).

В следующих леммах выводятся следствия соотношений кода (1).

ЛЕММА 3. *Справедливо соотношение*

$$zx^r z^{-1} = x^{-k+2r-s-1} z x^s x^{k-2r+s+1}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношению R_2 кода (1) придадим вид $x^r z x^{r-s} = z x^r z$ и преобразуем с помощью него соотношение R_1 этого кода:

$$\begin{aligned}
 R_1 \rightarrow & \quad z x^r z z^{-1} x^{k-2r+s+1} z = x^{k+r-s} \\
 \rightarrow & \quad x^r z x^{r-s} z^{-1} x^{k-2r+s+1} z = x^{k+r-s} \\
 \rightarrow & \quad z x^{r-s} z^{-1} x^{k-2r+s+1} z = x^{k-s} \\
 \rightarrow & \quad x^{r-s} z^{-1} x^{k-2r+s+1} = z^{-1} x^{k-s} z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad x^{r-s} z^{-1} x^{k-2r+s+1} = z^{-1} x^{k+r-s} z^{-1} z x^{-r} z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad x^{r-s} z^{-1} x^{k-2r+s+1} = x^{k-r+s+1} z x^{-r} z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad z x^r z^{-1} = x^{-k+2r-s-1} z x^s x^{k-2r+s+1}.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. *Справедливо соотношение*

$$z^{-1} x^{r-s} z = x^{k-2r+s+1} z x^{-k+2r-s-1}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим то же преобразование, что и в лемме 3, но только справа:

$$\begin{aligned}
 R_1 \rightarrow & \quad z x^{k-2r+s+1} z^{-1} z x^r z = x^{k+r-s} \\
 \rightarrow & \quad z x^{k-2r+s+1} z^{-1} x^r z x^{r-s} = x^{k+r-s} \\
 \rightarrow & \quad x^{k-2r+s+1} z^{-1} x^r = z^{-1} x^k z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad x^{k-2r+s+1} z^{-1} x^r = z^{-1} x^{s-r} z z^{-1} x^{k+r-s} z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad x^{k-2r+s+1} z^{-1} x^r = z^{-1} x^{s-r} z x^{k-r+s+1} \\
 \rightarrow & \quad z^{-1} x^{r-s} z = x^{k-2r+s+1} z x^{-k+2r-s-1}.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. *Справедливо соотношение*

$$z x^r z^{-1} x^{r-s} z = x^{3r-2s-1}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Придадим соотношению (2) вид $x^{k-2r+s+1} z x^r = z x^{k-2r+2s+1} z$ и опять преобразуем соотношение R_1 кода (1):

$$\begin{aligned}
 R_1 \rightarrow & \quad z x^{k-2r+2s+1} z z^{-1} x^{r-s} z = x^{k+r-s} \\
 \rightarrow & \quad x^{k-2r+s+1} z x^r z^{-1} x^{r-s} z = x^{k+r-s} \\
 \rightarrow & \quad z x^r z^{-1} x^{r-s} z = x^{3r-2s-1}.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. *Справедливо соотношение*

$$z^2 x^{k-2r+2s+1} z^2 = x^{k+2r-2s}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
 R_1 &\rightarrow x^{-r} z x^r x^{k-r+s+1} x^{-r} z x^r = x^{k+r-s} \\
 &\rightarrow z x^{r-s} z^{-1} x^{k-r+s+1} z x^{r-s} z^{-1} = x^{k+r-s} \\
 &\rightarrow x^{r-s} z^{-2} z x^{k-r+s+1} z x^{r-s} z^{-2} = z^{-1} x^{k+r-s} z^{-1} \\
 &\rightarrow x^{r-s} z^{-2} x^{k+r-s} x^{r-s} z^{-2} = x^{k-r+s+1} \\
 &\rightarrow z^2 x^{k-2r+2s+1} z^2 = x^{k+2r-2s}.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. *Справедливо соотношение*

$$z^2 x^s z^{-1} x^{2r-2s} z = x^{4r-3s-1}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (5) преобразуем с помощью соотношения (3):

$$\begin{aligned}
 (5) &\rightarrow z^2 x^s x^{k-2r+s+1} z^2 x^{-k+2r-s-1} = x^{k+2r-2s} x^{-k+2r-s-1} \\
 &\rightarrow z^2 x^s z^{-1} x^{2r-2s} z = x^{4r-3s-1}.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 8. *Справедливо соотношение*

$$z x^s z^{-1} x^{-s} = x^{-k} x^s z x^{-s} z^{-1} x^k. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем соотношение (6), используя, по порядку, соотношения (5), (2), (5) (трижды), R_1 , R_2 :

$$\begin{aligned}
 (6) &\rightarrow z^2 x^s z^{-1} x^{2r-2s} z = x^{r-s} x^{3r-2s-1} \\
 &\rightarrow z^2 x^s z^{-1} x^{2r-2s} z = x^{r-s} z x^r z^{-1} x^{r-s} z \\
 &\rightarrow z^2 x^s z^{-1} x^{r-s} = x^{r-s} z x^r z^{-1} \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = z^{-1} x^{r-s} x^{-k+2r-s-1} z x^s x^{k-2r+s+1} x^{-r} \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = z^{-1} x^{-k} x^{3r-2s-1} z x^k x^{-3r+2s+1} \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = z^{-1} x^{-k} z x^r z^{-1} x^{r-s} z z z^{-1} x^{s-r} z x^{-r} z^{-1} x^k \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = z^{-1} x^{-k} z x^r z^{-1} x^{r-s} z x^{s-r} z x^{-r} z^{-1} x^k \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = z^{-1} x^{-k+3r-2s-1} x^{s-r} z x^{-r} z^{-1} x^k \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = z^{-1} x^{-k+2r-s-1} z x^{-r} z^{-1} x^k \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = z^{-1} x^{-k+r-s-1} z^{-1} z x^r z x^{-r} z^{-1} x^k \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = x^{-k-r+s} (z x^r z) x^{-r} z^{-1} x^k \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = x^{-k-r+s} x^r z x^{r-s} x^{-r} z^{-1} x^k \\
 &\rightarrow z x^s z^{-1} x^{-s} = x^{-k} x^s z x^{-s} z^{-1} x^k.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. *Образующая z коммутирует с x^s .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим буквой U слово $zx^s z^{-1} x^{-s}$. Согласно лемме 8 из соотношений кода (1) выводимо соотношение $x^k U x^{-k} = U^{-1}$. Следовательно, x^{2k} коммутирует с U .

Из соотношения $x^{2k+1} = y^2$ кода (K^+) следует, что x^{2k+1} коммутирует с y . Так как $z = yx^{-k+r-s-1}$, то x^{2k+1} коммутирует и с z . Поэтому x^{2k+1} коммутирует с U . Так как x^{2k} и x^{2k+1} коммутируют с U , то и x коммутирует с U .

Так как x коммутирует с U , то x коммутирует с $zx^s z^{-1}$. Используя это докажем, что z коммутирует с x^s :

$$\begin{aligned}
 R_2 \rightarrow & \quad zx^{-s} x^r z^{-1} = x^{-r} z x^r \\
 \rightarrow & \quad x^r z x^{-s} z^{-1} z x^r z^{-1} = z x^r \\
 \rightarrow & \quad z x^{-s} z^{-1} x^r z x^r z^{-1} = z x^r \\
 \rightarrow & \quad x^{-s} z^{-1} (x^r z x^{r-s}) x^s z^{-1} = x^r \\
 \rightarrow & \quad x^{-s} z^{-1} z x^r z x^s z^{-1} = x^r \\
 \rightarrow & \quad x^{-s} z x^s z^{-1} \rightarrow z x^s = x^s z.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 10. Образующая z коммутирует с x^{k+3r} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя перестановочность образующей z с x^s , преобразуем соотношение R_1 кода (1):

$$\begin{aligned}
 R_1 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} x^{-4r+s+1} z = x^{k+r-s} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} z x^{-4r+s+1} z = x^{k+r-s} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} = x^{k+r-s} z^{-1} x^{4r-s-1} z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} = x^{k+r} z^{-1} x^{4r-2s-1} z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} = x^{k+r} z^{-1} x^{3r-2s-1} x^r z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} = x^{k+r} z^{-1} z x^r z^{-1} x^{r-s} z x^r z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} = x^{k+2r} z^{-1} x^{r-s} z x^r z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} = x^{k+2r} z^{-1} x^r z x^{r-s} z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} = x^{k+2r} z^{-1} z x^r z z^{-1} \\
 \rightarrow & \quad zx^{k+3r} z^{-1} = x^{k+3r}.
 \end{aligned}$$

Завершим доказательство теоремы 4. Согласно леммам 9 и 10 образующая z коммутирует с x^s и с x^{k+3r} . Кроме того, z коммутирует с x^{2k+1} . Поэтому z коммутирует со степенью образующей x , показатель которой равен наибольшему общему делителю чисел $2k+1$, $k+3r$, s . Но из леммы 1 следует, что наибольший общий делитель чисел $2k+1$, $k+3r$, s равен наибольшему общему делителю чисел $2k+1$, $3k+3r-s+1$, s . Последний наибольший общий делитель равен по условию единице. Поэтому образующие z и x коммутируют, код (1) определяет абелеву группу. Однако эта группа имеет единичную факторгруппу по коммутанту. Следовательно, и сама эта группа единичная. Теорема доказана.

3. Некоторые коды m -сложности ≤ 1 . Под *тривиализацией кода* мы понимаем далее Q^{**} -тривиализацию и под *эквивалентностью кодов* — Q^{**} -эквивалентность. Каждый (нетривиализуемый) код m -сложности 1, определяющий единичную группу, (если такие коды существуют) эквивалентен некоторому коду серии (K^-) или (K^+) . Последний код определяет семейство эквивалентных ему кодов серий (K^-) и (K^+) , имеющее два свойства: любые два кода семейства Q^{**} -эквивалентны; любой код серии (K^-) или (K^+) , Q^{**} -эквивалентный коду семейства, принадлежит семейству. Это семейство кодов по-видимому и имеет то загадочное свойство кодов m -сложности 1, опираясь на которое можно доказать отсутствие тривиализации. Поэтому одним из путей к решению проблемы Эндрюса–Кэртиса может быть выделение из серий кодов (K^-) и (K^+) как можно более обширных семейств кодов, не поддающихся тривиализации, но преобразуемых друг в друга Q^{**} -преобразованиями.

В этом плане серия кодов (K^+) совершенно не изучена. Отметим только, что коды $K^+(2.r.s)$ имеют тривиализацию и исправим досадную неточность, вкравшуюся в работу [2]. В работе [2] утверждалось, что все коды серии $\langle x, y \mid xyx = yxy, yx^ky = x^{k+1} \rangle$ и все коды серии $\langle x, y \mid xyx = yxy, yx^{k-1}y = x^{k+2} \rangle$ определяют единичную группу. Первая из этих двух серий кодов эквивалентна серии $K^+(k.1.0)$. Вторая серия эквивалентна серии кодов $\langle x, y \mid x^{2k+1} = y^2, (xy)^3 = x^{3k+5} \rangle$, и также серии кодов $K^+(k.2k.k-3)$ (доказательства есть в [2]). Поэтому из следствия 2 той же работы (и также из более общей теоремы 3 этой работы) следует, что необходимым и достаточным условием единичности группы, определенной кодом этих серий кодов, является $x \not\equiv 2 \pmod{5}$ для кодов первой серии и $x \not\equiv 3 \pmod{7}$ для кодов второй серии.

В серию (K^-) входит бесконечная серия кодов $K^-(k.1.1)$, $k \geq 4$, имеющих репутацию не тривиализуемых (или, по крайней мере, трудно тривиализуемых). Следующая простая лемма позволяет уменьшить в два раза при каждом k количество кодов $K^-(k.r.l)$.

ЛЕММА 11. Код $K^-(k.r.l)$ Q^{**} -эквивалентен коду $K^-(k.k-r.k-1-l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} K^-(k.r.l) &\sim \langle x, z, a, b \mid x^k = z^{k-1}, xz^lx^r = z^lx^rz, a = x^{-1}, b = z^{-1} \rangle \\ &\rightarrow \langle a, b \mid a^k = b^{k-1}, a^{-1}b^{-l}a^{-r} = b^{-l}a^{-r}b^{-1} \rangle \\ &\rightarrow \langle a, b \mid a^k = b^{k-1}, ab^{-l}a^{-r} = b^{-l}a^{-r}b \rangle \\ &\rightarrow \langle a, b \mid a^k = b^{k-1}, ab^{k-1-l}a^{k-r} = b^{k-1-l}a^{k-r}b \rangle \\ &\sim K^-(k.k-r.k-1-l). \end{aligned}$$

В последнем соотношении последнего кода сокращается b^{k-1} слева с b^{k-1} справа и a^k слева с a^k справа.

Из этой леммы и приведенного выше примера следует, что тривиализуемы также коды $K^-(k.k-1.1)$ и $K^-(2p+1.p+1.p)$. Найти тривиализацию последнего кода без применения леммы 10 не легко.

При $k = 4$ согласно лемме 11 остается исследовать только коды $K^-(4.r.1)$, $r = 1, 2, 3$; из них не тривиализован только код $K^-(4.1.1)$. При $k = 5$ получаем 6 кодов $K^-(5.r.l)$,

$r = 1, 2$. Здесь не тривиализованы коды $K^-(5.1.1)$, $K^-(5.2.1)$ и $K^-(5.2.3)$. Любопытно, что последний код эквивалентен коду $K^-(6.2.1)$. Докажем это. Имеем

$$\begin{aligned} K^-(5.2.3) &\sim K^-(5.3.1) \sim K^-(5.3.-3) \sim \langle x, y \mid x^5 y = y x^4, x^3 y^2 = y x^3 \rangle, \\ R_1 &\rightarrow x^5 y = y x^3 x \rightarrow x^5 y = x^3 y^2 x \rightarrow x^2 y = y^2 x, \quad R_2 \rightarrow x^{-3} y x^3 = y^2, \\ R_1 &\rightarrow y = x^{-2} y^2 x \rightarrow x^{-1} y x^2 = x^{-3} y^2 x^3 \rightarrow x^{-1} y x^2 = y^4 \\ &\rightarrow y x^2 = x y^4 \rightarrow x^{-1} y x = x^4 y^{-1}, \\ R_2 &\rightarrow x^{-2} x^{-1} y x x^2 = y^2 \rightarrow x^{-2} y^4 x^{-1} x^2 = y^2 \rightarrow y^4 x = x^2 y^2 \\ &\rightarrow y^5 x = y x^2 y^2 \rightarrow y^5 x = x y^6 \rightarrow y^6 x^{-1} y^{-5} x. \end{aligned}$$

Мы получили код

$$\langle y, x \mid y^6 x^{-1} y^{-5} x, y^4 x^{-2} y^{-1} x \rangle.$$

Замена образующей x на x^{-1} (Q^* -преобразование) преобразует его в код $K^-(6.4.-1)$, эквивалентный коду $K^-(6.4.4)$ и коду $K^-(6.2.1)$.

Это все, что мы можем пока сказать о кодах серии (K^-) . Другой путь решения проблемы Эндрюса–Кэртиса может заключаться в исследовании кодов ранга 2 с суммой длин соотношений 13 и шестью вхождениями одной образующей (коды этого семейства с не более, чем пятью вхождениями одной образующей, определяющие единичную группу, тривиализуемы). Несмотря на внешнюю простоту этот путь кажется более трудным, так как из этого семейства еще не выделены коды, определяющие единичную группу, а в множестве кодов, определяющих единичную группу, скорее всего, есть коды m -сложности 2 [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hog-Angeloni C., Metzler W., Sieradski A. J. Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [2] Ivanov S. G. Codes of m -complexity 1 // Proc. Steklov. Institute Math. Suppl. 2. 2001. P. 61–70.
- [3] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
- [4] Сбродова Е. А. Коды m -сложности 2 // Международная конференция–школа по геометрии и анализу, посвященная памяти А. Д. Александрова. Тезисы докл. Новосибирск, 2002. С. 64–65.

Челябинский государственный университет
E-mail: ivanov@csu.ru

Поступило
28.11.2002
Исправленный вариант
29.06.2004