Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кондратьев, Нормализаторы силовских 2-подгрупп
в конечных простых группах, *Матем. заметки*, 2005,
том 78, выпуск 3, 368–376

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 05:12:48

УДК 512.542

НОРМАЛИЗАТОРЫ СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ

А. С. Кондратьев

Завершается описание нормализаторов силовских 2-подгрупп в конечных простых группах.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Хорошо известно большое влияние свойств нормализаторов 2-подгрупп на строение конечной неразрешимой группы. Особый интерес вызывают нормализаторы силовских 2-подгрупп в группах, близких к конечным простым группам. Еще Ф. Холл (см. [1, лемма 4]) доказал самонормализуемость силовских 2-подгрупп в симметрических группах S_n . Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах лиева типа над полем характеристики 2 хорошо известны, это подгруппы Бореля. Р. Картер и П. Фонт [1] описали нормализаторы силовских 2-подгрупп в расширенных классических группах над конечными полями нечетной характеристики. Недавно автор и В. Д. Мазуров [2] попутно с описанием максимальных 2-сигнализаторов во всех конечных простых группах получили описание в них централизаторов силовских 2-подгрупп, а также выяснили строение нормализаторов силовских 2-подгрупп в конечных простых группах исключительного лиева типа над полем нечетной характеристики. Естественно возникающий вопрос о строении нормализаторов силовских 2-подгрупп в остальных конечных простых группах оставался до конца не решенным (см., например, [3, (6.3)]). В данной работе завершается решение этого вопроса. Доказаны следующие три теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – одна из конечных классических групп $GL_m(q)$, $GU_m(q)$, $Sp_{2m}(q)$, $GO_{2m+1}(q)$, $GO_{2m}^\pm(q)$, где $m \geq 1$ и q – степень нечетного простого числа p . Пусть T – силовская 2-подгруппа в G и $T^0 = T \cap O^{p'}(G)$. Тогда $N_G(T^0) = TC_G(T)$, за исключением следующих случаев:

- (а) $G = GL_2(q)$ или $GU_2(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $N_G(T^0)/Z(G) \cong S_4$;
- (б) $G = Sp_{2m}(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и факторгруппа $N_G(T^0)/T^0$ изоморфна элементарной абелевой 3-группе порядка 3^t , где число t находится из 2-адического разложения $m = 2^{s_1} + \dots + 2^{s_t}$, $s_1 > \dots > s_t \geq 0$;
- (в) $G = GO_3(q) \cong 2 \times PGL_2(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $N_G(T^0)/Z(G) \cong S_4$;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 04-01-00463 и № 04-01-81001.

- (г) $G = GO_2^\pm(q) \cong D_{2(q \mp 1)}$, $q \mp 1$ не является степенью 2 и $N_G(T^0) = G$;
- (д) $G = GO_4^+(q) \cong (SL_2(q) \circ SL_2(q)).2^2$, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $N_G(T^0) \cong GO_4^+(3)$;
- (е) $G = GO_5(q) \cong 2 \times (PSp_4(q).2)$, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $N_G(T^0)/Z(G) \cong GO_4^+(3)$.

Из теоремы 1 следует вышеупомянутый результат Картера и Фонга. Доказательство теоремы 1 основано на результатах М. Ашбахера [3], [4] о фундаментальных подгруппах в конечных группах лиева типа над полем нечетной характеристики, а также на результатах о стабилизаторах ортогональных разложений в конечных классических группах (см. [5], [6]).

По аналогии с доказательством теоремы 1 доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть T – силовская 2-подгруппа в S_n и $T^0 = T \cap A_n$. Тогда $N_{S_n}(T^0) = T$, за исключением следующих случаев:

- (а) $n = 3$ и $N_{S_3}(T^0) = S_3$;
- (б) $n = 4$ или 5 и $N_{S_n}(T^0) \cong S_4$.

Из теоремы 2 следует вышеупомянутый результат Холла.

С использованием [7] и теорем 1 и 2 легко доказывается

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – одна из конечных простых спорадических групп, $A = \text{Aut}(G)$, T – силовская 2-подгруппа в A и $T^0 = T \cap G$. Тогда $N_A(T^0) = T$, за исключением следующих случаев:

- (а) $G = A = J_1$ и $N_A(T^0) \cong 2^3.7.3 < \text{Hol}(2^3)$;
- (б) $G = J_2, J_3, Suz$ или HN , $|A : G| = 2$ и $N_A(T^0)/T^0 \cong S_3$.

Из теорем 1–3 и [2, теоремы 6 и 7] непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – конечная простая неабелева группа и S – силовская 2-подгруппа в G . Тогда $N_G(S) = S$, за исключением следующих случаев:

- (а) G – группа лиева типа над полем характеристики 2 и $N_G(S)$ – подгруппа Бореля в G , отличная от S ;
- (б) $G \cong L_2(q)$, $3 < q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $N_G(S) \cong A_4$;
- (в) $G \cong L_m^\pm(q)$, $m \geq 3$, q нечетно и $S \neq N_G(S) = S \times C_1 \times \dots \times C_{t-1}$, где число $t \geq 2$ находится из 2-адического разложения $m = 2^{s_1} + \dots + 2^{s_t}$, $s_1 > \dots > s_t \geq 0$, а $C_1, \dots, C_{t-2}, C_{t-1}$ – циклические группы порядков $(q \mp 1)_{2^t}, \dots, (q \mp 1)_{2^2}, (q \mp 1)_{2^1}/(q \mp 1, m)_{2^t}$ соответственно (здесь $L_m^+(q)$ и $L_m^-(q)$ обозначают соответственно группы $L_m(q)$ и $U_m(q)$);
- (г) $G \cong PSp_{2m}(q)$, $m \geq 2$, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и факторгруппа $N_G(S)/S$ изоморфна элементарной абелевой 3-группе порядка 3^t , где число t находится из 2-адического разложения $m = 2^{s_1} + \dots + 2^{s_t}$, $s_1 > \dots > s_t \geq 0$;
- (д) $G \cong E_6^\pm(q)$, q нечетно и $N_G(S) = S \times C$, где C – неединичная циклическая группа порядка $(q \mp 1)_{2^t}/(q \mp 1, 3)$ (здесь $E_6^+(q)$ и $E_6^-(q)$ обозначают соответственно группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$);
- (е) $G \cong {}^2G_2(q)$ или J_1 и $N_G(S) \cong 2^3.7.3 < \text{Hol}(2^3)$;
- (ж) $G \cong J_2, J_3, Suz$ или HN и $|N_G(S) : S| = 3$.

Заметим, что теорему 7 из [2] для случая классических групп можно получить из доказательства теоремы 1.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны; их можно найти в [7]–[9]. Если группа G действует на множестве X и $Y \subset X$, то через G_Y и $G_{(Y)}$ обозначим соответственно глобальный и поточечный стабилизатор подмножества Y в G , через $C_X(G)$ – множество всех фиксируемых G точек из X , а через G^X – группу подстановок, индуцируемую G на X , т.е. $G^X \cong G/G_{(X)}$. Если A и B – группы и n – натуральное число, то через $A.B$ (соответственно $A : B$) обозначается расширение (соответственно расщепляемое расширение) группы A посредством группы B , через $A \circ B$ – некоторое их нетривиальное центральное произведение, через A^n – прямое произведение n изоморфных A групп. Если n – натуральное число и r – простое число, то n и r^n будут обозначать также соответственно циклическую группу порядка n и элементарную абелеву r -группу порядка r^n . Если A – конечная группа и r – простое число, то через $O^{r'}(A)$ обозначается подгруппа, порожденная всеми r -элементами группы A .

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $q = p^f$ обозначает натуральную степень нечетного простого числа p и $I = G$ – одна из классических групп $GL_n(q)$, $GU_n(q)$, $Sp_n(q)$, $GO_n^\delta(q)$, где δ – пустой символ при нечетном n и $\delta = \pm$ при четном n . Пусть V – ассоциированное с I векторное пространство размерности n над полем порядка q или q^2 в случае $I = GU_n(q)$, снабженное (при $I \neq GL_n(q)$) соответствующей формой, такое, что I можно отождествить при выборе подходящей базы в V с соответствующей группой $I(V) \in \{GL(V), GU(V), Sp(V), GO^\delta(V)\}$, совпадающей с группой всех невырожденных линейных преобразований пространства V , сохраняющих (при $I \neq GL_n(q)$) заданную форму. Группа I называется (*полной*) *группой изометрий* пространства V . Положим также

$$S = S(V) = I(V) \cap SL(V) \in \{SL(V), SU(V), Sp(V), SO^\delta(V)\}$$

и

$$\Omega = \Omega(V) = O^{p'}(S(V)).$$

Через

$$\begin{aligned} PI(V) &\in \{PGL(V), PGU(V), PSp(V), PGO^\delta(V)\}, \\ PS(V) &\in \{PSL(V), PSU(V), PSp(V), PSO^\delta(V)\} \end{aligned}$$

и

$$P\Omega(V) \in \{PSL(V), PSU(V), PSp(V), P\Omega^\delta(V)\}$$

обозначим образы групп $I(V)$, $S(V)$ и $\Omega(V)$ соответственно при естественном гомоморфизме группы I на факторгруппу $I/Z(I)$. Для краткости обозначим через $GL^\delta(V)$, $SL^\delta(V)$ и $L^\delta(V)$ соответственно группы $GL(V)$, $SL(V)$ и $PSL(V)$ при $\delta = +$ и $GU(V)$, $SU(V)$ и $PSU(V)$ при $\delta = -$.

Разложение $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ в виде ортогональной (относительно заданной на V формы) суммы (прямой суммы при $I = GL(V)$) подпространств $U_1, \dots, U_m$ называется *ортогональным разложением*.

Если $n = 1$, то $I = GL_1^\delta(q)$ или $GO_1(q)$, т.е. I – циклическая группа порядка $q - \delta 1$ или 2 соответственно, откуда $\Omega = 1$, и поэтому в этом случае теорема верна.

Если $n = 2$, то $I = GL_2^\delta(q)$, $Sp_2(q)$ или $GO_2^\delta(q)$, откуда ввиду [6, предложение 2.9.1] группа I изоморфна $((q - \delta 1) \circ SL_2(q)).2$, $SL_2(q)$ или $D_{2(q - \delta 1)}$ соответственно, причем

$PGL_2^\delta(q) \cong PGL_2(q)$, и поэтому справедливость теоремы в этом случае вытекает из хорошо известного описания подгрупп в $PSL_2(q)$ (см. [10, глава 12]) и диэдральности силовской 2-подгруппы в $PGL_2(q)$.

Если $I = GO_3(q)$, то по [6, предложение 2.9.1] $I = Z(I) \times SO_3(q) \cong 2 \times PGL_2(q)$, и поэтому в этом случае теорема верна.

Пусть $I = GO_4^+(q)$. Тогда ввиду [6, предложения 2.5.6, 2.5.8, 2.9.1 и 2.9.4] $I = (L_1 \circ L_2)\langle s, r \rangle$, где $L_1 \cong L_2 \cong SL_2(q)$, $\Omega = L_1 \circ L_2$, $S = \Omega\langle s \rangle$, $|I : S| = |S : \Omega| = 2$, отражение r переставляет подгруппы L_1 и L_2 , а элемент s индуцирует на L_1 и L_2 внешний диагональный автоморфизм. Отсюда видно, что в этом случае теорема верна.

Пусть $I = GO_4^-(q)$. Тогда ввиду [6, таблица 2.1.С и предложение 2.9.1] $|I : S| = |S : \Omega| = 2$ и $\Omega \cong L_2(q^2)$. Отсюда видно, что в этом случае теорема верна.

В дальнейшем мы будем предполагать n не меньше 3, 4, 5 в случаях $I = GL_n^\delta(q)$, $Sp_n(q)$, $GO_n^\delta(q)$ соответственно. Хорошо известно (см., например, [6, предложения 2.1.3 и 2.9.1]), что тогда $P\Omega$ – неабелева простая группа.

Приведем необходимые нам понятия и результаты Ашбахера [3], [4], связанные с фундаментальными подгруппами группы Ω , рассматриваемой как группа лиева типа над полем порядка q .

Пусть U – длинная корневая подгруппа в Ω , U^- – противоположная ей подгруппа и $K = \langle U, U^- \rangle$. Тогда подгруппа K изоморфна $SL_2(q)$. Класс сопряженных с K подгрупп в Ω называется множеством *фундаментальных подгрупп* в Ω . Пусть T – фиксированная силовская подгруппа в I и $T^0 = T \cap \Omega$. Положим

$$\Delta = \text{Fun}_\Omega(T^0) = \{K^x \mid x \in \Omega, K^x \cap T^0 \in \text{Syl}_2(K^x)\}.$$

Тогда Δ – максимальное множество попарно коммутирующих фундаментальных подгрупп из Ω . Из определения множества Δ непосредственно видно, что $N_\Omega(T^0) \leq N_\Omega(\Delta)$.

Пусть $I = GL^\delta(V)$ или $Sp(V)$ и $n = 2k + a$ с $0 \leq a \leq 1$. По [3, (2.1)] существует ортогональное разложение

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

такое, что $\dim V_i = 2$ для $1 \leq i \leq k$, $\dim V_0 = a$ и $\Delta = \{K_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, где $K_i = S(V_i)$ и $I(V_i)$ обозначает подгруппу из $I(V)$, действующую точно на V_i как ее соответствующая полная группа изометрий и централизующую каждое подпространство V_j при $j \neq i$. Кроме того, $N_\Omega(\Delta)^\Delta \cong S_k$. Положим $\mathcal{D} = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ и $W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Так как $[S(V_i), V] = V_i$ и $I(V_i)S = I$ для $1 \leq i \leq k$, а $V_0 = \bigcap_{i=1}^k C_V(S(V_i))$, то $N_I(T^0) \leq N_I(\Delta) \leq I_{\mathcal{D}}$.

Пусть $I = GL^\delta(V)$. Тогда по [6, предложения 4.1.4 и 4.2.9]

$$N_I(\Delta) = I_{\mathcal{D}} = I(V_0) \times ((GL^\delta(V_1) \times \cdots \times GL^\delta(V_k)) : S_k) \cong (q - \delta 1)^a \times (GL_2^\delta(q) \wr S_k),$$

$$I^{\mathcal{D}} = S^{\mathcal{D}} \cong S_k, \quad I_{\mathcal{D}}/C_{I_{\mathcal{D}}}(\langle \Delta \rangle) \cong PGL_2(q) \wr S_k$$

и

$$S_{(\mathcal{D})}/C_{S_{(\mathcal{D})}}(\langle \Delta \rangle) \cong L_2(q)^k \cdot 2^{k-1+a},$$

причем

$$N_{S_{(\mathcal{D})}}(K_i)/C_{S_{(\mathcal{D})}}(K_i) \cong PGL_2(q), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Ввиду самонормализуемости силовских 2-подгрупп в группах S_k и $PGL_2(q)$ отсюда следует, что $N_I(T^0) = TCI(T)$, т.е. теорема в этом случае верна.

Пусть $I = Sp(V)$. Тогда $I = S$ и $T = T^0$. По [6, предложение 4.2.10]

$$N_I(\Delta) = I_{\mathcal{D}} = (Sp(V_1) \times \cdots \times Sp(V_k)) : S_k \cong Sp_2(q) \wr S_k, \\ I^{\mathcal{D}} \cong S_k \quad \text{и} \quad I_{\mathcal{D}}/Z(\langle \Delta \rangle) \cong L_2(q) \wr S_k.$$

Так как силовские 2-подгруппы в S_k самонормализуемы, можно считать, что

$$N_I(T) \leq (N_{K_1}(T \cap K_1) \times \cdots \times N_{K_k}(T \cap K_k)) : (T \cap S_k).$$

Если $q \not\equiv \pm 3 \pmod{8}$, то $N_{K_i}(T \cap K_i) = T \cap K_i$, $1 \leq i \leq k$, откуда $N_I(T) = T$ и теорема верна. Пусть $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $k = 2^{s_1} + \cdots + 2^{s_t}$, $s_1 > \cdots > s_t \geq 0$. Тогда $N_{K_i}(T \cap K_i) \cong SL_2(3)$ и $T \cap S_k \cong H_{s_1} \times \cdots \times H_{s_t}$, где H_s обозначает последовательное сплетение группы порядка 2 с самой собой s раз. Пусть x_i – элемент порядка 3 из $N_{K_i}(T \cap K_i)$. Тогда можно считать, что группа $T \cap S_k$ нормализует множество $\{x_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ и имеет на нем орбиты с длинами $2^{s_1}, \dots, 2^{s_t}$. В каждой такой орбите группа $T \cap S_k$ фиксирует единственный элемент. Отсюда следует утверждение теоремы (случай (б)).

Пусть $I = GO^{\delta}(V)$ и $n = 4k + a$ с $0 \leq a \leq 4$, $\delta = +$ при $a = 0$ и $\delta = -$ при $a = 4$. По [3, (2.2)] существует ортогональное разложение

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

такое, что V_i имеет размерность 4 и знак $+$ для $1 \leq i \leq k$, $\dim V_0 = a$ и $\Delta = \{K_i, K_i^* \mid 1 \leq i \leq k\}$, где $K_i \circ K_i^* \cong \Omega^+(V_i)$ и $I(V_i)$ обозначает подгруппу из $I(V)$, действующую точно на V_i как полная группа изометрий $GO_4^+(q)$ и централизующую каждое подпространство V_j при $j \neq i$. Кроме того, группа $N_{\Omega}(\Delta)^{\Delta}$ изоморфна $2^k \cdot S_k$ при $a \neq 0$ и $2^{k-1} \cdot S_k$ при $a = 0$, причем $N_{\Omega}(\Delta)^{\Delta}$ действует на Δ импримитивно с системой импримитивности $\Gamma = \{\{K_i, K_i^*\} \mid 1 \leq i \leq k\}$ и индуцирует на Γ группу подстановок S_k .

Положим $\mathcal{D} = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ и $W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Так как $[N(V_i), V] = V_i$ и $I(V_i)\Omega = I$ для $1 \leq i \leq k$, а $V_0 = \bigcap_{i=1}^k C_V(\Omega(V_i))$, то $N_I(T_0) \leq N_I(\Delta) \leq I_{\mathcal{D}}$.

Пусть сначала $I = GO^+(V)$ и $a = 0$, т.е. $n = 4k \geq 8$. Тогда по [6, предложение 4.2.11]

$$N_I(\Delta) = I_{\mathcal{D}} = (GO^+(V_1) \times \cdots \times GO^+(V_k)) : S_k \cong GO_4^+(q) \wr S_k, \\ I^{\mathcal{D}} = \Omega^{\mathcal{D}} \cong S_k, \quad I_{(\mathcal{D})}\Omega = I, \quad I_{(\mathcal{D})}/\Omega_{(\mathcal{D})} \cong I/\Omega \cong 2^2, \\ I_{(\mathcal{D})} = GO^+(V_1) \times \cdots \times GO^+(V_k) \cong (\Omega^+(V_1) \times \cdots \times \Omega^+(V_k)).2^{2k}.$$

Отсюда

$$\Omega_{(\mathcal{D})} \cong (\Omega^+(V_1) \times \cdots \times \Omega^+(V_k)).2^{2(k-1)},$$

причем

$$N_{\Omega_{(\mathcal{D})}}(K_i)/C_{\Omega_{(\mathcal{D})}}(K_i) \cong N_{\Omega_{(\mathcal{D})}}(K_i^*)/C_{\Omega_{(\mathcal{D})}}(K_i^*) \cong PGL_2(q), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Отсюда следует, что $N_I(T^0) = T$, т.е. теорема в этом случае верна.

Пусть теперь $I = GO(V)$, $n \geq 5$ и $a = 1$ или 3 . Тогда $I_{\mathcal{O}}$ содержится в стабилизаторе $I_{\{V_0, W\}}$ в I ортогонального разложения $V = V_0 \oplus W$, который ввиду [6, предложение 4.1.1] равен $GO(V_0) \times GO^+(W)$.

Если $a = 1$, то по [6, предложение 4.1.6] в $GO(V_0) \setminus SO(V_0)$ и $GO^+(W) \setminus SO^+(W)$ существуют такие отражения r_0 и r соответственно, что

$$\Omega_{\{V_0, W\}} = \Omega(W)\langle r_0 r \rangle \cong \Omega_{4k}^+(q).2.$$

При $k = 1$ ввиду [6, предложение 2.9.1] получаем исключительный случай (е) теоремы. При $k > 1$ по уже рассмотренному случаю $a = 0$ получаем, что $N_I(T^0) = T$, т.е. теорема в этом случае также верна.

Если $a = 3$, то по [6, предложение 4.1.6] соответственно в $GO(V_0) \setminus SO(V_0)$ и $GO^+(W) \setminus SO^+(W)$ существуют такие отражения r_0 и r , а в $SO(V_0) \setminus \Omega(V_0)$ и $SO^+(W) \setminus \Omega^+(W)$ существуют такие элементы s_0 и s , что

$$I_{\{V_0, W\}} = (\Omega(V_0) \times \Omega(W))\langle s_0 s, r_0 r \rangle \cong (\Omega_3(q) \times \Omega_{4k}^+(q)).2^2.$$

Но ввиду [6, предложение 2.9.1] $SO(V_0) = \Omega(V_0)\langle s_0 \rangle \cong PGL_2(q)$. Отсюда по уже рассмотренному случаю $a = 0$ получаем, что $N_I(T^0) = T$, т.е. теорема в этом случае верна.

Пусть, наконец, $I = GO^\delta(V)$, $n \geq 6$ и $a = 2$ или 4 . Тогда опять $I_{\mathcal{O}}$ содержится в стабилизаторе $I_{\{V_0, W\}}$ в I ортогонального разложения $V = V_0 \oplus W$, который ввиду [6, предложение 4.1.6] равен $GO^\delta(V_0) \times GO^+(W)$, причем, соответственно в $GO^\delta(V_0) \setminus SO^\delta(V_0)$ и $GO^+(W) \setminus SO^+(W)$, существуют такие отражения r_0 и r , а в $SO^\delta(V_0) \setminus \Omega^\delta(V_0)$ и $SO^+(W) \setminus \Omega^+(W)$ существуют такие элементы s_0 и s , что

$$\Omega_{\{V_0, W\}} = (\Omega^\delta(V_0) \times \Omega^+(W))\langle s_0 s, r_0 r \rangle \cong (\Omega_a^\delta(q) \times \Omega_{4k}^+(q)).2^2.$$

Но ввиду [6, предложение 2.9.1]

$$GO^\delta(V_0) = \Omega(V_0)\langle s_0, r_0 \rangle \cong D_{2(q-\delta_1)}$$

при $a = 2$, а

$$GO^\delta(V_0) = GO^-(V_0) = \Omega^-(V_0)\langle s_0, r_0 \rangle \quad \text{и} \quad PGO^-(V_0) \cong L_2(q^2).2^2$$

при $a = 4$. Так как $q^2 \equiv 1 \pmod{8}$, то силовская 2-подгруппа в $L_2(q^2)$ самонормализуема. Отсюда по уже рассмотренному случаю $a = 0$ получаем, что $N_I(T^0) = T$, т.е. теорема и в этом случае верна.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $S_n = S(X)$ и $A_n = A(X)$ – соответствующая знакопеременная группа. Если $H \leq S_n$, то положим $H^0 = H \cap A_n$. При $Y \subset X$ будем отождествлять $S(Y)$ с поточечным стабилизатором $S(X)_{(X \setminus Y)}$ подмножества $X \setminus Y$ в $S(X)$. В случаях $n \leq 5$ теорема, очевидно, справедлива (см., например, [7]). Поэтому будем считать, что $n \geq 6$. Пусть $n = 4k + a$ с $0 \leq a \leq 3$ и $X = \{1, 2, \dots, n\} = X_1 \cup \dots \cup X_k \cup X_0$, где $X_i = \{4(i-1) + 1, 4(i-1) + 2, 4(i-1) + 3, 4(i-1) + 4\}$ для $1 \leq i \leq k$ и $X_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^k X_i$. Положим $\mathcal{D} = \{X_0, X_1, \dots, X_k\}$. Хорошо известно, что

$$S(X)_{\mathcal{D}} = S(X_0) \times ((S(X_1) \times \dots \times S(X_k)) : S_k) \cong S_a \times (S_4 \wr S_k),$$

причем $S(X)^{\mathcal{D}} = A(X)^{\mathcal{D}} \cong S_k$, $S(X_i)A(X) = S(X)$ для $1 \leq i \leq k$ и

$$S(X)_{(\mathcal{D})} = S(X_0) \times S(X_1) \times \dots \times S(X_k) \cong S(X_0) \times ((A(X_1) \times \dots \times A(X_k)).2^k).$$

Очевидно, что $S(X)_{\mathcal{D}}$ содержит некоторую силовскую 2-подгруппу T из $S(X)$. Ясно, что T^0 – силовская 2-подгруппа из $A(X)$, содержащая силовские 2-подгруппы из $A(X_i)$ для $1 \leq i \leq k$. Положим $K_i = A(X_i)$ для $1 \leq i \leq k$ и $K = K_1$. По аналогии с соответствующим понятием М. Ашбахера назовем класс сопряженных с K подгрупп в $A(X)$ множеством *фундаментальных подгрупп* в $A(X)$. Положим

$$\Delta = \text{Fun}_{A(X)}(T^0) = \{K^x \mid x \in A(X), K^x \cap T^0 \in \text{Syl}_2(K^x)\}.$$

Из предыдущего ясно, что $\{K_i \mid 1 \leq i \leq k\} \subseteq \Delta$. Предположим, что существует элемент $g \in A(X)$ такой, что $K^g \in \Delta$ и $K^g \neq K_i$ для всех i . Тогда $K^g = A(g(X_1))$ и $g(X_1) \neq X_i$ для всех i . Кроме того, по определению множества Δ имеем включение

$$\langle O_2(K_i), O_2(K^g) \rangle \leq T^0$$

для всех i . Предположим, что $X_i \cap g(X_1) \neq \emptyset$ для некоторого i , и покажем существование таких инволюций $a \in O_2(K_i)$ и $b \in O_2(K^g)$, что порядок элемента ab делится на 3 в противоречие с предыдущим включением. Без ограничения общности можно считать, что $i = 1$. Положим $a = (12)(34)$ и подберем подходящую инволюцию b .

Пусть сначала $|X_i \cap g(X_1)| = 1$. Тогда можно считать, что $X_i \cap g(X_1) = \{1\}$ и $g(X_1) = \{1, i, j, k\}$, где $i, j, k \in X \setminus X_1$. Положим $b = (1i)(jk)$. Тогда $ab = (i21)(34)(jk)$, откуда $|ab| = 6$.

Пусть теперь $|X_i \cap g(X_1)| = 2$. Тогда можно считать, что $X_i \cap g(X_1) = \{1, 2\}$ и $g(X_1) = \{1, 2, i, j\}$, где $i, j \in X \setminus X_1$. Положим $b = (1i)(2j)$. Тогда $ab = (1i3)(2j4)$, откуда $|ab| = 3$.

Пусть наконец $|X_i \cap g(X_1)| = 3$. Тогда можно считать, что $X_i \cap g(X_1) = \{1, 2, 3\}$ и $g(X_1) = \{1, 2, 3, i\}$, где $i \in X \setminus X_1$. Положим $b = (12)(3i)$. Тогда $ab = (3i4)$, откуда $|ab| = 3$.

Мы доказали, что пересечение $g(X_1)$ с $\bigcup_{i=1}^k X_i$ пустое, т.е. $g(X_1) \subseteq X_0$; противоречие с тем, что $|X_1| = 4$, а $|X_0| \leq 3$. Итак, $\Delta = \{K_i \mid 1 \leq i \leq k\}$. Из определения множества Δ непосредственно видно, что $N_{A(X)}(T^0) \leq N_{A(X)}(\Delta)$. Так как $C_X(A(X_i)) = X \setminus X_i$ и $S(A_i)A(X) = S(X)$ для $1 \leq i \leq k$, а $X_0 = \bigcap_{i=1}^k C_X(A(X_i))$, то $N_{S(X)}(T^0) \leq N_{S(X)}(\Delta) = S(X)_{\mathcal{D}}$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, получим, что

$$N_{A(X)_{(\mathcal{D})}}(K_i)/C_{A(X)_{(\mathcal{D})}}(K_i) \cong S_4$$

для $1 \leq i \leq k$. Отсюда следует, что $N_{S(X)}(T^0) = T$.

Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Пусть G – одна из конечных простых спорадических групп, $A = \text{Aut}(G)$, T – силовская 2-подгруппа в A и $T^0 = T \cap G$. При доказательстве теоремы мы будем ссылаться в основном на [7]. В частности, из [7] видно, что $|A : G| \leq 2$.

Для случая $G \cong J_1$ утверждение теоремы непосредственно следует из [7].

Пусть $G \cong J_2$ или J_3 . Тогда в G есть 2-скованная максимальная подгруппа M нечетного индекса, изоморфная $2_-^{1+4} : A_5$, причем $N_A(M) \cong 2_-^{1+4} : S_5$. Поэтому можно считать, что $Z(M) = Z(T^0)$, откуда ввиду теоремы 2 следует утверждение теоремы для этих случаев.

Пусть $G \cong M_{22}$, M_{23} или McL . Тогда по [11] изоморфный тип группы T^0 единствен, $|Z(T^0)| = 2$ и в T^0 есть точно две нормальные элементарные подгруппы E_1 и E_2 порядка 16. Ввиду [7] нормализаторы в G подгрупп E_1 и E_2 соответственно изоморфны $2^4 : A_6$ и $2^4 : S_5$ при $G \cong M_{22}$, $2^4 : A_5$ и $2^4 : (3 \times A_5) : 2$ при $G \cong M_{23}$, а при $G \cong McL$ в G есть максимальная подгруппа M нечетного индекса, изоморфная $2 \cdot A_8$, откуда ввиду теоремы 2 следует утверждение теоремы для этих случаев.

Если $G \cong M_{24}$, то по [12, (2.2)] в T^0 есть точно две нормальные элементарные подгруппы порядка 64, нормализаторы которых в G ввиду [7] соответственно изоморфны $2^6 : 3 \cdot S_6$ и $2^6 : (L_3(2) \times S_3)$, откуда следует утверждение теоремы для этого случая.

Если $G \cong Co_3$, то по [13, лемма 2.1] $|Z(T^0)| = 2$, а ввиду [7] $N_G(Z(T^0)) \cong 2 \cdot S_6(2)$, откуда следует утверждение теоремы для этого случая.

Пусть $G \cong M_{11}$, M_{12} , HS , He , Ru , Co_2 , Th , Co_1 , J_4 , Fi'_{24} , B или M . Тогда ввиду [7] в G есть 2-скованная максимальная подгруппа M нечетного индекса, изоморфная соответственно $Q_8 : S_3 \cong GL_2(3)$, $2_+^{1+4} \cdot S_3$, $(4 \circ Q_8 \circ Q_8) : S_5$, $2_+^{1+6} \cdot L_3(2)$, $2 \cdot 2^{4+6} : S_5$, $2_+^{1+8} : S_6(2)$, $2_+^{1+8} \cdot A_9$, $2_+^{1+12} \cdot O_8^+(2)$, $2_+^{1+12} \cdot 3 \cdot M_{22} : 2$, $2_+^{1+12} \cdot 3U_4(3)$, $2_2 \cdot 2_+^{1+22} \cdot Co_2$ или $2_+^{1+22} \cdot Co_1$. Поэтому можно считать, что $Z(M) = Z(T^0)$, откуда ввиду теорем 1 и 2 и предыдущего следует утверждение теоремы для этих случаев.

Пусть $G \cong Suz$. Тогда ввиду [7] $|A : G| = 2$ и в G есть 2-скованная максимальная подгруппа M нечетного индекса, изоморфная $2_-^{1+6} \cdot PSp_4(3)$, причем $N_A(M) \cong 2_-^{1+6} \cdot SO_5(3)$. Поэтому можно считать, что $Z(M) = Z(T^0)$, откуда ввиду теоремы 1 следует утверждение теоремы для этого случая.

Пусть $G \cong HN$. Тогда ввиду [7] $|A : G| = 2$ и в G есть 2-скованная максимальная подгруппа M нечетного индекса, изоморфная $2_+^{1+8} \cdot (A_5 \wr 2)$, причем $N_A(M) \cong 2_+^{1+8} \cdot (A_5 \times A_5) \cdot 2^2$. Поэтому можно считать, что $Z(M) = Z(T^0)$ и $N_A(T^0) \leq N_A(M)$. По [8, (23.10)] $\text{Aut}(2_+^{1+8}) \cong GO_8^+(2)$, а по [7] в $GO_8^+(2)$ имеется единственный класс сопряженных максимальных подгрупп, содержащих подгруппу вида $(A_5 \times A_5) \cdot 2^2$, а именно, подгрупп, изоморфных $S_5 \wr 2$. Теперь легко проверить, что

$$N_A(M)/O_2(N_A(M)) \cong PGO_4^+(3),$$

откуда ввиду теоремы 1 следует утверждение теоремы для этого случая.

Если $G \cong Fi_{22}$, то по [7] максимальные подгруппы нечетного индекса в G изоморфны $2^{10} \cdot M_{22}$, $2^{5+8} : (S_3 \times A_6)$ или $(2 \times 2_+^{1+8}) : SO_5(3)$, откуда ввиду теорем 1 и 2 и предыдущего следует утверждение теоремы для этого случая.

Пусть $G \cong Fi_{23}$. Тогда по [7] максимальные подгруппы нечетного индекса в G изоморфны $2 \cdot Fi_{22}$, $2^2 \cdot U_6(2) \cdot 2$, $2^{11} \cdot M_{22}$, $2^{6+8} : (S_3 \times A_7)$ или $(2^2 \times 2_+^{1+8}) \cdot 3 \cdot SO_5(3)$, откуда ввиду теорем 1 и предыдущего можно считать, что $N_G(T^0) < 2^2 \cdot U_6(2) \cdot 2$. Но

по [7] в группе $U_6(2)$ есть максимальная подгруппа нечетного индекса, изоморфная $2_+^{1+8}.SO_5(3)$, откуда ввиду теоремы 1 следует утверждение теоремы для этого случая.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Carter R., Fong P. The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups // J. Algebra. 1964. V. 1. № 1. P. 139–151.
- [2] Кондратьев А.С., Мазуров В.Д. 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 5. С. 594–623.
- [3] Aschbacher M. On finite groups of Lie type and odd characteristic // J. Algebra. 1980. V. 66. № 2. P. 400–424.
- [4] Aschbacher M. A characterization of Chevalley groups over fields of odd order // Ann. Math. 1977. V. 106. № 2–3. P. 353–468; Correction // Ann. Math. 1980. V. 111. № 3. P. 411–414.
- [5] Aschbacher M. On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. V. 76. P. 469–514.
- [6] Kleidman P. B., Liebeck M. W. The Subgroup Structure of Finite Classical Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [7] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [8] Aschbacher M. Finite Group Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [9] Carter R. Simple Groups of Lie Type. London: Wiley, 1972.
- [10] Dickson L. E. Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory. New York: Dover, 1958.
- [11] Gorenstein D., Harada K. On finite groups with Sylow 2-subgroups of type $\hat{A}_n$, $n = 8, 9, 10$ and 11 // J. Algebra. 1971. V. 19. № 2. P. 185–227.
- [12] Held D. The simple groups related to M_{24} // J. Algebra. 1969. V. 13. № 1. P. 253–296.
- [13] Solomon R. Finite groups with Sylow 2-subgroups of type 3 // J. Algebra. 1974. V. 28. № 1. P. 182–198.

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Поступило
23.08.2004