Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Козлов, Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 358–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:32:18

УДК 519.21

ВЕСОВЫЕ СРЕДНИЕ, СТРОГАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ И РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В. В. Козлов

Получено усиление известной теоремы Окстоби для строго эргодических преобразований, когда привычная сходимость по Чезаро заменяется более слабой сходимостью по Риссу или Вороному с монотонно возрастающими или убывающими весовыми коэффициентами. Этот общий результат позволяет, в частности, усилить классическую теорему Вейля о равномерном распределении дробных долей значений многочлена с иррациональным коэффициентом.

Библиография: 18 названий.

1. Определения. Пусть s_n , $n \geq 0$, – числовая последовательность. Мы будем рассматривать весовые средние следующего вида:

$$r_n = \frac{p_0 s_0 + \dots + p_n s_n}{p_0 + \dots + p_n}, \quad w_n = \frac{p_0 s_n + \dots + p_n s_0}{p_0 + \dots + p_n},$$

где $p_0 > 0$, $p_n \geq 0$ и $\sum p_n = \infty$. Числа p_n будем называть *весовыми коэффициентами* или просто *весами*.

С последовательностью r_n связан *метод* суммирования *Рисса*: если $r_n \rightarrow s$, то по определению

$$s_n \rightarrow s \quad (R, p_n).$$

Этот метод *регулярен*: если $s_n \rightarrow s$, то $r_n \rightarrow s$. По теореме Чезаро [1, теорема 14], если $p_{n+1} \geq p_n$ и $\sum p_n = \infty$, то метод Чезаро (когда все веса равны между собой) *включает* метод Рисса (R, p_n) . Если весовые коэффициенты p_n растут экспоненциально быстро, то (R, p_n) -метод эквивалентен обычной сходимости [1, теорема 15]. Чтобы метод Рисса (R, p_n) суммировал хотя бы некоторые расходящиеся последовательности, будем предполагать, что

$$\frac{p_n}{p_0 + \dots + p_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

С последовательностью w_n связан *метод* суммирования *Вороного*: если $w_n \rightarrow s$, то по определению

$$s_n \rightarrow s \quad (W, p_n).$$

Работа выполнена в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ”, № НШ-136.2003.1.

Условие (1.1) – это критерий регулярности метода Вороного. Любые два регулярных метода Вороного *совместны*: если $s_n \rightarrow s(W, p_n)$ и $s_n \rightarrow s'(W, p'_n)$, то $s = s'$. По теореме Харди [1, теорема 23] если выполнено (1.1), последовательность весовых коэффициентов p_n не возрастает и

$$p_0 = 1, \quad p_n > 0, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{p_n}{p_{n-1}}, \quad n > 0,$$

то метод Чезаро также включает метод Вороного (W, p_n) .

В эргодической теории обычно используют сходимость по Чезаро. В связи со сказанным выше возникает вопрос о том, можно ли в этой ситуации заменить метод Чезаро более слабым методом Рисса или Вороного? При положительном ответе мы бы получили более сильный вариант эргодических теорем.

В работе [2] указаны условия на линейные методы суммирования общего вида, при которых справедлива обобщенная *статистическая* эргодическая теорема. Они заведомо выполнены для методов Рисса и Вороного с монотонной последовательностью весовых коэффициентов (см. [3], где, в частности, дано простое доказательство статистической эргодической теоремы для монотонного случая).

С индивидуальной эргодической теоремой дело обстоит намного сложнее. В работе [4] теорема Биркгофа–Хинчина обобщена на случай средних Рисса, причем все $p_n \leq 1$ и p_n стремится к конечному пределу. Более простое доказательство указано в [5]. Однако (с точки зрения теории суммирования по Риссу) этот случай не представляет особого интереса: если $\lim p_n \neq 0$, то (R, p_n) эквивалентен методу Чезаро, если же p_n стремится к нулю *монотонно*, то (R, p_n) заведомо включает метод Чезаро. В работе [3] рассмотрена задача об усилении индивидуальной эргодической теоремы для преобразования Бернулли $x \rightarrow \{2x\}$ с использованием метода Рисса с монотонно возрастающими весами. Эта задача тесно связана с усиленными вариантами закона больших чисел. С помощью закона повторного логарифма Хинчина–Колмогорова показано, что сходимость по Чезаро можно заменить (R, p_n) -сходимостью, если p_n возрастают как $\exp[n/(\ln n)^\alpha]$, $\alpha > 1$. Не известно, справедлив ли этот результат при $\alpha = 1$.

В настоящей работе исследуется более простая задача об усреднении для *строго эргодических* преобразований. Пусть M – компактное метрическое пространство, T – гомеоморфизм M . По теореме Крылова–Боголюбова T сохраняет некоторую борелевскую меру на M . Если нормированная *инвариантная* относительно T борелевская мера единственна, то непрерывное преобразование T называется *строго эргодическим*.

Ясно, что строго эргодический гомеоморфизм T эргодичен по отношению к своей единственной инвариантной борелевской мере μ . Однако далеко не каждое непрерывное эргодическое преобразование будет строго эргодическим. Например, у строго эргодического преобразования нет периодических точек. В противном случае имеется дополнительная инвариантная борелевская мера, сосредоточенная на периодической траектории гомеоморфизма T .

Укажем характерное свойство строго эргодического преобразования (теорема Окс-тоби [6]): для любой непрерывной функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f d\mu \quad (C). \quad (1.2)$$

Символ $\rightrightarrows$ обозначает равномерную сходимость. Ввиду обратимости преобразования T соотношение (1.2) справедливо и при $n \rightarrow -\infty$.

Например, пусть T – гомеоморфизм окружности $M = \{x \bmod 2\pi\}$, сохраняющий ориентацию. Ясно, что $Tx = x + f(x)$, где f – непрерывная 2π -периодическая функция. Как показал Пуанкаре, для всех x

$$f(T^n x) \longrightarrow 2\pi\lambda \quad (C). \quad (1.3)$$

Число λ называется *числом вращения* гомеоморфизма T . Если T не имеет периодических точек, то оно строго эргодическое (см., например, [7]). В этом случае согласно (1.2)

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_M f d\mu.$$

Соотношение (1.2) можно распространить на более широкий класс функций. Будем говорить, что функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ является *$\mathcal{R}$ -интегрируемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся две непрерывные функции f_1 и f_2 такие, что

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \quad \text{для всех } x \in M, \quad (1.4)$$

$$\int_M (f_2 - f_1) d\mu < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Очевидно, что $\mathcal{R}$ -интегрируемая функция ограничена и все непрерывные функции $\mathcal{R}$ -интегрируемы.

Интеграл $\mathcal{R}$ -интегрируемой функции определяется следующим естественным образом. Рассмотрим последовательность ε_n , стремящуюся к нулю. Соответствующие последовательности непрерывных функций, удовлетворяющих условиям (1.4) и (1.5), обозначим $f_1^{(n)}$ и $f_2^{(n)}$. Легко показать, что пределы последовательностей интегралов от $f_1^{(n)}$ и $f_2^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ существуют и совпадают; это число будем называть *$\mathcal{R}$ -интегралом* f по борелевской мере μ и обозначать через $\int_M f d\mu$. Нетрудно убедиться в корректности определения $\mathcal{R}$ -интеграла: оно не зависит от выбора последовательностей $\varepsilon_n, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$.

Пусть, например, M является многомерным тором $\mathbb{T}^k$, а μ – стандартная борелевская мера на $\mathbb{T}^k$. В этом случае класс $\mathcal{R}$ -интегрируемых функций будет совпадать с классом функций, интегрируемых по Риману.

Теорему Окстоби можно слегка обобщить.

ТЕОРЕМА 1. *Преобразование T строго эргодическое тогда и только тогда, когда для любой $\mathcal{R}$ -интегрируемой функции f*

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f d\mu \quad (C).$$

Подмножество $D \subset M$ будем называть *$\mathcal{R}$ -измеримым*, если его характеристическая функция $f = 1_D$ будет $\mathcal{R}$ -интегрируемой. Положим

$$\text{mes } D = \int_M 1_D d\mu.$$

Ясно, что $\text{mes } M = 1$ ввиду предположения о нормированности меры μ .

В качестве функции f из теоремы 1 можно взять характеристическую функцию *любой* $\mathcal{R}$ -измеримой области D . Введем последовательность s_n , $n \geq 0$, по следующему правилу: $s_n = 1$, если $x_k = T^k x \in D$, и $s_n = 0$ в противном случае. Пусть $\nu(n) = \sum_0^n s_k$. Тогда для строго эргодического преобразования будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n} = \text{mes } D.$$

Таким образом, траектория x_k , $k \geq 0$, любой точки $x \in M$ проводит в области D время, пропорциональное в среднем мере этой области. Это – общее определение *равномерно распределенной* последовательности *по Вейлю* (см., например, [8]).

Если только что введенная последовательность s_k сходится к $\text{mes } D$ в смысле (R, p_n) -сходимости при любом выборе $\mathcal{R}$ -измеримой области D , то последовательность точек $x_k \in M$, $k \geq 0$, естественно назвать (R, p_n) -*равномерно распределенной* (кратко (R, p_n) -р.р.). Аналогично вводятся (W, p_n) -равномерно распределенные последовательности.

2. Теоремы. Сначала покажем, как можно усилить теорему Окстоби с использованием методов суммирования Рисса и Вороного, *включенных* в метод Чезаро.

ТЕОРЕМА 2. Пусть T – строго эргодический гомеоморфизм компактного метрического пространства M и f – $\mathcal{R}$ -интегрируемая функция на M . Тогда

а) если $q_{n+1} \leq q_n$ и $\sum q_n = \infty$, то

$$f(T^n x) \Rightarrow \int_M f d\mu \quad (W, q_n); \quad (2.1)$$

б) если $p_{n+1} \geq p_n$ и выполнено (1.1), то

$$f(T^n x) \Rightarrow \int_M f d\mu \quad (R, p_n). \quad (2.2)$$

Пусть, например, T – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности без периодических точек. Тогда предельное соотношение (1.3) можно усилить, заменяя метод Чезаро сколь угодно слабыми методами Рисса и Вороного. В [9] этот факт установлен в общем случае, когда у гомеоморфизма T могут быть периодические точки.

В качестве еще одного примера рассмотрим *сложный косой сдвиг* на k -мерном торе $\mathbb{T}^k = \{x_1, \dots, x_k \bmod 1\}$, задаваемый формулой

$$Tx = ((x_1 + \alpha) \bmod 1, (x_2 + p_{2,1}x_1) \bmod 1, \dots, (x_k + p_{k,1}x_1, \dots, p_{k,k-1}x_{k-1}) \bmod 1), \quad (2.3)$$

где $\alpha, p_{i,j}$ – вещественные числа. Это преобразование, очевидно, сохраняет стандартную меру на $\mathbb{T}^k$ (меру Хаара на $\mathbb{T}^k$ как на коммутативной группе Ли). Как показано в [7], если α иррационально, а $p_{j,j-1} \neq 0$ для всех $2 \leq j \leq k$, то преобразование (2.3) строго эргодично. Следовательно, для каждой точки $x \in \mathbb{T}^k$ ее траектория (последовательность точек $T^n x$, $n \geq 0$) равномерно распределена по Вейлю.

Пусть $\pi_j: \mathbb{T}^k \rightarrow \{x_j \bmod 1\}$ – естественная проекция k -мерного тора на окружность:

$$\pi_j(x_1, \dots, x_k) = x_j.$$

Ясно, что каждая траектория $T^n x$, $n \geq 0$, при проектировании π_j переходит в последовательность точек, равномерно распределенную по $\text{mod } 1$ (в смысле классического определения). Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве f взять функции, периодически зависящие лишь от одной переменной x_j .

Положим теперь $x = 0$. Можно доказать (см. [7], [10]), что

$$\pi_k(T^n x)|_{x=0} = \{P(n)\}, \quad (2.4)$$

где $P(z)$ – многочлен от z степени k , причем коэффициент при z^k иррационален, если α иррационально. Верно и обратное утверждение: для любого многочлена P степени k с иррациональным коэффициентом при старшей степени найдется сложный кривой сдвиг k -мерного тора вида (2.3), у которого число α иррационально, $p_{j,j-1} \neq 0$ и справедлива формула (2.4). Отсюда (по Фюрстенбергу [7]) вытекает замечательный результат Вейля о равномерном распределении дробных частей многочлена со старшим иррациональным коэффициентом. Первоначальное доказательство Вейля основано на совершенно других идеях (см. [11]). Общий случай, когда имеется иррациональный коэффициент при z^k , $k \geq 1$, легко сводится к этому случаю.

Используя теорему 2, редукцию Фюрстенберга и условие строгой эргодичности косоуго сдвига (2.3), приходим к следующему усилению теоремы Вейля.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $P(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$ – многочлен, у которого один из коэффициентов $a_0, \dots, a_{k-1}$ – иррациональное число. Тогда

- а) если $q_{n+1} \leq q_n$ и $\sum q_n = \infty$, то последовательность $\{P(n)\}$ будет (W, q_n) -р.р.;
- б) если $p_{n+1} \geq p_n$ и выполнено (1.1), то последовательность $\{P(n)\}$ будет (R, p_n) -р.р.

ЗАМЕЧАНИЕ. Г. Вейль привел обобщение своей теоремы о равномерном распределении дробных частей многочлена с использованием метода Рисса (R, p_n) , у которого весовые коэффициенты p_n либо монотонно убывают, либо монотонно возрастают как степени n [11, теорема 10]. Однако, этот результат ничего нового не дает, поскольку в первом случае (R, p_n) -метод включает метод Чезаро, а во втором – (R, p_n) -метод эквивалентен методу Чезаро.

Используя обобщенный критерий Вейля равномерного распределения (см. [8]), получаем

СЛЕДСТВИЕ. При указанных в теореме 3 предположениях относительно многочлена $P(z)$ и весовых коэффициентов

$$e^{2\pi i P(n)} \rightarrow 0 \quad (W, q_n), \quad e^{2\pi i P(n)} \rightarrow 0 \quad (R, p_n). \quad (2.5)$$

Было бы интересным найти прямые доказательства этих предельных соотношений. В непрерывном случае они доказываются достаточно просто [12]. Для многочлена первой степени соотношения (2.5) фактически содержатся в работах [13], [14].

В заключение этого пункта дополним теорему Окстоби одним утверждением, касающемся поведения суммы

$$\sigma_n(x) = f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x), \quad x \in M. \quad (2.6)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть T – строго эргодический гомеоморфизм компактного метрического пространства M и f – непрерывная функция на M . Тогда найдется точка x_+ (соответственно x_-) на M такая, что

$$\sigma_n(x_+) - n \int_M f d\mu \geq 0 \quad \left(\text{соответственно} \quad \sigma_n(x_-) - n \int_M f d\mu \leq 0 \right)$$

для всех целых n .

Это утверждение – обобщение одной старой теоремы Боля об интегралах квазипериодических функций [15]. Задача, рассмотренная Болем, очевидно, сводится к анализу эргодических сдвигов многомерного тора. Боль предполагал дополнительно, что суммы (2.6) неограничены как функции от n . Однако в [16] показано, что это условие является лишним.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда

а) если $q_{k+1} \geq q_k$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_k f(T^{n-k} x_{\pm}) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_k \right) \int_M f d\mu \geq 0 \quad (\leq 0)$$

для всех n ;

б) если $p_{k+1} \leq p_k$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k f(T^k x_{\pm}) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k \right) \int_M f d\mu \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (2.7)$$

для всех n .

Докажем, например, (2.7). Согласно преобразованию Абеля и теореме 4

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} p_k f(T^k x_{\pm}) &= (p_0 - p_1)\sigma_1(x_+) + \cdots + (p_{n-2} - p_{n-1})\sigma_{n-1}(x_+) + p_{n-1}\sigma_n(x_+) \\ &\geq [(p_0 - p_1) + \cdots + (n-1)(p_{n-2} - p_{n-1}) + np_{n-1}] \int_M f d\mu \\ &= (p_0 + \cdots + p_{n-1}) \int_M f d\mu, \end{aligned}$$

что и требовалось.

С другой стороны, если непрерывная функция f не постоянна, то для почти всех $x \in M$ разность

$$\sigma_n(x) - n \int_M f d\mu \quad (2.8)$$

бесконечно много раз меняет знак при $n \rightarrow \infty$. Это есть следствие одного общего результата, установленного в работе [17] для общих эргодических преобразований. Интересно отметить, что множество точек $x \in M$, для которых разность (2.8) меняет знак лишь конечное число раз, может оказаться всюду плотным в M . Соответствующий пример для эргодического поворота окружности указан в [16]. В этом примере f – непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция.

Теорема об осцилляциях разности (2.8) обобщена в работе [18] для средних Рисса (Вороного) с неубывающими (невозрастающими) весами. Непрерывный аналог этого результата получен ранее в [12].

3. Доказательства. Сначала докажем теорему 2 для непрерывных функций. Воспользуемся следующим известным результатом: функции вида

$$f(x) = g(Tx) - g(x), \quad (3.1)$$

где g – непрерывная функция на M , всюду плотны (в метрике равномерной сходимости) в линейном пространстве непрерывных функций с нулевым средним, т.е.

$$\int_M f d\mu = 0$$

(см., например, [10]). Для определенности далее рассмотрим средние Рисса. После подстановки (3.1) ввиду монотонности весовых коэффициентов будем иметь

$$\frac{|\sum_0^n p_k f(T^k x)|}{\sum_0^n p_k} = \frac{|\sum_0^n p_k (g(T^{k+1}x) - g(T^k x))|}{\sum_0^n p_k} \leq \frac{2p_n \|g\|}{\sum_0^n p_k}, \quad (3.2)$$

где $\|g\| = \max |g(x)|$ – норма в пространстве непрерывных функций. Ясно, что правая часть (3.2) равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ согласно условию (1.1).

Далее, если $f = \text{const}$, то (2.2), очевидно, выполнено. Вычитая из произвольной непрерывной функции f ее среднее значение по мере μ , аппроксимируем ее функциями вида (3.1): для заданного $\varepsilon > 0$ найдем непрерывную функцию $f_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(Tx) - g_\varepsilon(x)$ такую, что

$$\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Поэтому

$$\left\| \frac{\sum_0^n p_k f(T^k x)}{\sum_0^n p_k} \right\| = \left\| \frac{\sum_0^n p_k f(T^k x)}{\sum_0^n p_k} - \frac{\sum_0^n p_k f_\varepsilon(T^k x)}{\sum_0^n p_k} \right\| + \left\| \frac{\sum_0^n p_k f_\varepsilon(T^k x)}{\sum_0^n p_k} \right\|. \quad (3.4)$$

Первое слагаемое справа, очевидно, меньше ε ввиду неравенства (3.3). Согласно уже доказанному, второе слагаемое также не превосходит ε при $n \geq N(\varepsilon)$. Следовательно, при $n \geq N(\varepsilon)$ правая часть (3.4) не превосходит 2ε для всех $x \in M$.

Пусть теперь функция f $\mathcal{B}$ -интегрируема. Тогда согласно (1.4) для всех n и всех x

$$\frac{\sum_0^n p_k f_1(T^k x)}{\sum_0^n p_k} \leq \frac{\sum_0^n p_k f(T^k x)}{\sum_0^n p_k} \leq \frac{\sum_0^n p_k f_2(T^k x)}{\sum_0^n p_k}.$$

Согласно уже доказанному левая и правая части этого неравенства отличаются от $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ не более, чем на ε при $n \geq n_0(\varepsilon)$; здесь и далее черта для краткости обозначает интеграл по мере μ по всему M .

Далее, $\bar{f}_1 \leq \bar{f} \leq \bar{f}_2$ и $\bar{f}_2 - \bar{f}_1 \leq \varepsilon$ (согласно (1.5)). Поэтому $\bar{f}_2 - \bar{f} \leq \varepsilon$, $\bar{f} - \bar{f}_1 \leq \varepsilon$. Следовательно, при $n \geq n_0$

$$\left| \frac{\sum_0^n p_k f(T^k x)}{\sum_0^n p_k} - \int_M f d\mu \right| \leq 3\varepsilon,$$

что и требовалось.

Эти рассуждения использовали круг идей, лежащих в основе известного доказательства Рисса статистической эргодической теоремы и доказательства Вейля равномерного распределения дробных частей значений линейной функции. Укажем еще один путь доказательства теоремы 2, намеченный в краткой заметке [9].

Докажем, например, соотношение (2.1):

$$\frac{q_n f(x) + \dots + q_0 f(T^n x)}{q_0 + \dots + q_n} \Rightarrow \int_M f d\mu. \quad (3.5)$$

Положим $T^n x = z$ или, что то же самое, $x = T^{-n} z$. Тогда (3.5) принимает вид

$$f(T^{-n} z) \Rightarrow \int_M f d\mu \quad (R, q_n), \quad (3.6)$$

Так как q_n не возрастают и $\sum q_n = \infty$, то (R, q_n) -метод включает метод Чезаро. Поэтому (3.6) является следствием теоремы Окстоби (с учетом того, что T^{-1} также строго эргодическое преобразование M).

Однако z зависит не только от x , но и от n . Таким образом, простой ссылки на теорему о включении методов Рисса недостаточно. Надо доказать больше: если последовательность непрерывных функций $s_n(x)$, $x \in M$, равномерно сходится к $s(x)$ по Чезаро, то $s_n(x) \Rightarrow s(x) \quad (R, q_n)$.

Докажем это в интересующем нас случае, когда $s_n(x) = f(T^n x)$. Пусть

$$t_m = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_m}{m}, \quad u_m = \frac{q_0 s_0 + q_1 s_1 + \dots + q_m s_m}{q_0 + q_1 + \dots + q_m}. \quad (3.7)$$

Тогда

$$u_m = \sum c_{m,n} t_n, \quad (3.8)$$

где

$$c_{m,n} = \begin{cases} \frac{n(q_n - q_{n+1})}{\sum_0^m q_j}, & \text{если } n < m, \\ \frac{mq_m}{\sum_0^m q_j}, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n > m. \end{cases}$$

Так как $\sum_0^m q_j \rightarrow 0$, то

$$c_{m,n} \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

при $m \rightarrow \infty$ и фиксированном n . Далее, $c_{m,n} \geq 0$ (поскольку веса q_n не возрастают) и

$$\sum_{n \geq 0} c_{m,n} = 1. \quad (3.10)$$

Для доказательства (3.10) достаточно в (3.7) положить $s_j = 1$. Тогда $t_m = 1$ и $u_m = 1$; подставляя эти значения в (3.8), получим (3.10).

Пусть $a = \max_M |f(x)|$. Тогда $|t_m| \leq a$ для всех $m \geq 0$. Нам уже известно, что $t_m(x) \Rightarrow s(x)$ и что $u_m(x) \rightarrow s(x)$ для каждого $x \in M$. Вычитая из обеих частей (3.8) $s(x)$ и используя (3.10), приходим к выводу, что нам достаточно доказать утверждение в случае, когда $s(x) \equiv 0$.

Так как $t_n(x) \Rightarrow 0$, то $|t_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$. Оценим правую часть (3.8):

$$|u_m| \leq \left| \sum_{n=0}^N c_{m,n} t_n \right| + \left| \sum_{n=N}^{\infty} c_{m,n} t_n \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N c_{m,n} \right| a + \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \right| \varepsilon = \left| \sum_{n=0}^N c_{m,n} \right| a + \varepsilon.$$

Согласно (3.9) при уже выбранном значении ε первая сумма справа (обозначим ее через σ) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, $|\sigma| < \varepsilon$ для всех $m \geq M(\varepsilon, N) = M(\varepsilon)$. Поэтому при $m \geq M(\varepsilon)$

$$|t_m(x)| < 2\varepsilon,$$

что и требовалось.

Наконец, докажем теорему 4. Без ущерба общности будем рассматривать непрерывные функции с нулевым средним значением. Пусть сначала функция f имеет вид (3.1). Тогда, очевидно,

$$\sigma_n(x) = g(x) - g(T^n x).$$

Если x_+ — точка максимума непрерывной функции g на компакте M , то $\sigma_n(x_+) \geq 0$ для всех целых n . В общем случае найдется последовательность непрерывных функций $f_m: M \rightarrow \mathbb{R}$, $m \geq 1$, вида (3.1), равномерно сходящаяся к функции f . Согласно уже доказанному, найдутся точки $x_m \in M$ такие, что

$$\sigma_n^m(x_m) = f_m(x_m) + \dots + f_m(T^{n-1}x_m) \geq 0$$

для всех n . Ввиду компактности M из последовательности x_m можно выделить подпоследовательность x_{m_k} , сходящуюся к некоторой точке x_+ . Для любого фиксированного n

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma_n^{m_k}(x_{m_k}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(f_{m_k}(T^j x_{m_k}) - f(T^j x_{m_k}) \right) + \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x_{m_k}) \\ &\rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x_+) = \sigma_n(x_+) \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$, что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [2] Hanson D. L., Pledger G. On the mean ergodic theorem for weighted averages // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 1969. V. 13. № 13. P. 141–149.
- [3] Козлов В. В. Суммирование расходящихся рядов и эргодические теоремы // Тр. семина. им. И. Г. Петровского. 2002. Т. 22. С. 142–168.
- [4] Baxter G. An ergodic theorem with weighted averages // J. Math. Mech. 1964. V. 13. № 3. P. 481–488.
- [5] Chacon R. V. Ordinary means imply recurrent means // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 796–797.

- [6] Oxtoby J. C. Ergodic sets // Bull. Amer. Math. Soc. 1952. V. 58. № 2. P. 116–136.
- [7] Furstenberg H. Strict ergodicity and transformation of the torus // Amer. J. Math. 1961. V. 83. № 4. P. 573–601.
- [8] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
- [9] Козлов В. В., Мадсен Т. Числа вращения Пуанкаре и средние Рисса и Вороного // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 2. С. 314–315.
- [10] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [11] Вейль Г. О равномерном распределении чисел по модулю один // Избранные труды. М.: Наука, 1984. С. 58–93.
- [12] Козлов В. В. О равномерном распределении на торе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2004. № 2. С. 22–29.
- [13] Cigler J. Methods of summability and uniform distribution mod 1 // Compos. Math. 1964. V. 16. P. 44–51.
- [14] Doroidar A. F. A note on the generalized uniform distribution (mod 1) // J. Natur. Sci. Math. 1971. V. 11. P. 185–189.
- [15] Bohl P. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie // J. Reine Angew. Math. 1906. V. 131. № 4. P. 268–321.
- [16] Козлов В. В. Об интегралах квазипериодических функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1978. № 1. С. 106–115.
- [17] Halász G. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1976. V. 28. № 3–4. P. 289–395.
- [18] Сорокин А. А. Об осцилляциях средних Рисса и Вороного // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2005. № 2. С. 13–17.