Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Нелинейное среднее в экономике, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 377–395

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:33:51

УДК 519

НЕЛИНЕЙНОЕ СРЕДНЕЕ В ЭКОНОМИКЕ

В. П. Маслов

Нелинейное осреднение по Колмогорову дополнено некоторой естественной аксиомой. Для этого осреднения доказана теорема о больших отклонениях, а также установлена связь с туннельным каноническим оператором.

Библиография: 17 названий.

1. Нелинейное осреднение по Колмогорову. Последовательность функций M_n определяет *регулярный* тип среднего, если удовлетворяются следующие условия (Колмогоров):

- I. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна и монотонна по каждому переменному; для определенности будем считать, что M возрастает по каждому переменному;
- II. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметричная функция¹;
- III. среднее от одинаковых чисел равно их общему значению: $M(x, x, \dots, x) = x$;
- IV. можно заменить некоторую группу значений их собственным средним, не меняя общего среднего:

$$M(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = M_{n+m}(x, \dots, x, y_1, \dots, y_n),$$

где $x = M(x_1, \dots, x_m)$.

ТЕОРЕМА 1 (Колмогоров). *При выполнении условий I–IV среднее $M(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид*

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi \left(\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)}{n} \right), \quad (1)$$

где φ – непрерывная строго монотонная функция, а ψ – обратная к ней.

Доказательство теоремы см. в работе [1].

2. Основная аксиома осреднения. Для устоявшейся системы довольно очевидно, что должна быть выполнена следующая аксиома:

- V. если к каждому x_k прибавить одну и ту же величину ω , то среднее увеличится на ту же величину ω .

¹В нашем случае симметрия следует из бозе-статистики денежных купюр.

Эту аксиому я обсуждал подробно с экономистом-практиком В. Н. Батуриным.

Очевидно, что нелинейное среднее от x_i в нормальных условиях также должно увеличиться на эту величину. Мы примем этот факт как *аксиому* V.

Эта аксиома приводит к однозначному решению в нелинейном случае, т.е. ей удовлетворяет естественно линейный случай (арифметическое среднее) и единственная с точностью до одной и той же константы, на которую мы можем умножить все доходы x_i , нелинейная функция.

На самом деле, доходы x_i исчисляются в какой-либо валюте и, вообще говоря, должны умножаться на некоторую величину β , которая отвечает покупательной способности этой валюты, так что указанная константа (параметр β) изначально должна входить в определение дохода. А следовательно, мы утверждаем, что существует единственная нелинейная функция, которая удовлетворяет аксиоме V.

Функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = C \exp(Dx) + B, \quad (2)$$

где $C, D \neq 0, B$ — числа, не зависящие от x .

3. Полукольцо: пример линейного самосопряженного оператора. Рассмотрим полукольцо, порожденное нелинейным средним, и пространство L_2 со значениями в этом полукольце.

Вначале рассмотрим уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Здесь h — малый параметр, малость которого мы пока не будем использовать.

Уравнение (3) линейно. Это означает, как известно, что если u_1 и u_2 — его решения, то линейная комбинация

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \quad (4)$$

является его решением. Здесь λ_1 и λ_2 — константы.

Теперь сделаем следующую замену. Положим

$$u = e^{-M/h}. \quad (5)$$

Тогда для новой неизвестной функции $M(x, t)$ получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)^2 - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Это известное уравнение иногда называют уравнением Бюргерса².

Решению u_1 уравнения (3) отвечает решение $M_1 = -h \ln u_1$ уравнения (6), а решению u_2 уравнения (3) отвечает решение $M_2 = -h \ln u_2$ уравнения (6). Решению (4) уравнения (3) отвечает решение $M = -h \ln(e^{-(M_1+\mu_1)/h} + e^{-(M_2+\mu_2)/h})$, где $\mu_i = -h \ln \lambda_i, i = 1, 2$.

Отсюда следует, что уравнение (6) тоже линейно, но линейно в пространстве функций, где введены следующие операции:

операция суммы $a \oplus b = -h \ln(e^{-a/h} + e^{-b/h})$;

операция умножения $a \odot \lambda = a + \lambda$.

²Обычное уравнение Бюргерса получается из этого дифференцированием по x и заменой $v = \partial M / \partial x$.

При этом замена $M = -h \ln u$ переводит нуль в бесконечность, а единицу – в нуль. Таким образом обобщенным нулем в этом новом пространстве будет ∞ : $\mathbf{0} = \infty$, а обобщенной единицей будет обычный нуль: $\mathbf{1} = 0$. Пространство функций, в котором введены операции $\oplus$ и $\odot$, с присоединенным к пространству нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$ изоморфно обычному пространству функций с обыкновенным умножением и сложением.

Можно себе представить, таким образом, что где-то на другой планете люди привыкли именно к вновь введенным операциям $\oplus$ и $\odot$, и с их точки зрения уравнение (6) является линейным.

То, что здесь было описано, разумеется, тривиально, и людям нашей планеты нет смысла перечислять арифметические операции, поскольку можно заменой функции перейти от уравнения (6) к уравнению (3), линейному в привычном для нас смысле. Однако “королевство кривых зеркал”, которое дает это полукольцо, оказывается, связано с “капиталистической” экономикой [2].

В пространстве функций со значениями в кольце $a \oplus b = -h \ln(e^{-a/h} + e^{-b/h})$, $\lambda \odot b = \lambda + b$ введем скалярное произведение

$$(M_1, M_2) = -h \ln \int e^{(M_1 + W_2)/h} dx.$$

Покажем, что оно обладает в этом пространстве билинейными свойствами, а именно:

$$(a \oplus b, c) = (a, c) \oplus (b, c), \quad (\lambda \odot a, c) = \lambda \odot (a, c).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (a \oplus b, c) &= -h \ln \left(\int \exp \left(\frac{-(-h \ln(e^{-a/h} + e^{-b/h}) + c)}{h} \right) dx \right) \\ &= -h \ln \left(\int (e^{-a/h} + e^{-b/h}) e^{-c/h} dx \right) \\ &= -h \ln \left(\int e^{-(a+c)/h} dx + \int e^{-(b+c)/h} dx \right) = (a, c) \oplus (b, c), \\ (\lambda \odot a, c) &= -h \ln \int e^{-(a+\lambda)/h} e^{-c/h} dx \\ &= -h \ln \left(e^{-\lambda/h} \int e^{-(a+c)/h} dx \right) = \lambda + \ln \int e^{-(a+c)/h} dx = \lambda \odot (a, c). \end{aligned} \tag{7}$$

Приведем пример самосопряженного оператора в этом пространстве. Рассмотрим оператор

$$L: W \rightarrow W \odot \left(-h \ln \left(\frac{(W')^2}{h^2} - \frac{W''}{h} \right) \right).$$

А теперь проверим самосопряженность:

$$\begin{aligned}
 (W_1, LW_2) &= -h \ln \int e^{-(W_1+LW_2)/h} dx \\
 &= -h \ln \int \exp \left[- \left(W_1 + W_2 - h \ln \left(\frac{(W_2')^2}{h^2} - \frac{W_2''}{h} \right) \right) / h \right] dx \\
 &= -h \ln \int e^{-W_1/h} e^{-W_2/h} \left(\frac{(W_2')^2}{h^2} - \frac{W_2''}{h} \right) dx = -h \ln \int e^{-W_1/h} \frac{d^2}{dx^2} e^{-W_2/h} dx \\
 &= -h \ln \int \frac{d^2}{dx^2} e^{-W_1/h} e^{-W_2/h} dx = -h \ln \int e^{-W_1/h} \left(\frac{(W_1')^2}{h^2} - \frac{W_1''}{h} \right) e^{-W_2/h} dx \\
 &= -h \ln \int \exp \left[- \left(W_1 - h \ln \left(\frac{(W_1')^2}{h^2} - \frac{W_1''}{h} \right) \right) / h \right] dx \\
 &= -h \ln \int e^{-(LW_1+W_2)/h} dx = (LW_1, W_2). \tag{8}
 \end{aligned}$$

Также легко проверить линейность.

Построим разрешающий оператор уравнения Бюргерса: $L: W_0 \rightarrow W$, где W – решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию $W|_{t=0} = 0$.

Решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $u|_{t=0} = u_0$, имеет вид

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{-(x-\xi)^2/(2th)} u_0(\xi) d\xi.$$

Учитывая, что $u = e^{-W/h}$, $W = -h \ln u$, получаем разрешающий оператор L_t уравнения Бюргерса

$$L_t W_0 = -\frac{h}{\sqrt{2\pi h}} \ln \int e^{-((x-\xi)^2/(2th) + M(\xi)/h)} d\xi. \tag{9}$$

Оператор L_t самосопряжен в новом скалярном произведении.

4. Теорема о нелинейном среднем. Рассмотрим набор цен λ_i , где $i = 1, \dots, n$, и набор чисел g_i , равных числу финансовых инструментов (ФИ) – акций, облигаций и т.п. *разного типа*, имеющих цену λ_i . Цены λ_i по смыслу являются положительными величинами; кроме того, без ограничения общности будем считать, что цены пронумерованы так, что для них выполняются неравенства

$$0 < \lambda_1 < \lambda_i < \lambda_n \quad \text{для всех } i = 2, \dots, n-1. \tag{10}$$

Полное число разного типа ФИ обозначим через G . Это число выражается формулой

$$G = \sum_{i=1}^n g_i. \tag{11}$$

Обозначим число ФИ, купленных по цене λ_i , через k_i . Учитывая, что по цене λ_i продается g_i разных ФИ, получим, что количество разных способов совершить покупку k_i ФИ по цене λ_i выражается формулой

$$\gamma_i(k_i) = \frac{(k_i + g_i - 1)!}{k_i! (g_i - 1)!}. \tag{12}$$

Количество разных способов купить набор ФИ $\{k\}$, состоящий из $k_1, \dots, k_n$ ФИ, купленных по соответствующим ценам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, выражается с помощью (12) и равно

$$\gamma(\{k\}) = \prod_{i=1}^n \gamma_i(k_i) = \prod_{i=1}^n \frac{(k_i + g_i - 1)!}{k_i! (g_i - 1)!}. \quad (13)$$

Расход денег покупателя при покупке набора ФИ $\{k\}$ равен

$$\mathcal{B}(\{k\}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i. \quad (14)$$

Произведем нелинейное осреднение расхода (14) по BR (budget restraint):

$$M(\beta, N) = -\frac{1}{\beta N} \ln \left(\frac{N! (G-1)!}{(N+G-1)!} \sum_{\{k_i=N\}} \gamma(\{k\}) \exp(-\beta \mathcal{B}(\{k\})) \right), \quad (15)$$

где β – положительный параметр.

Разобьем произвольным образом ФИ на m непересекающихся групп, $m \leq n$. Это означает, что возьмем каким-либо способом две последовательности i_α и j_α , где $\alpha = 1, \dots, m$, удовлетворяющие условиям

$$i_\alpha \leq j_\alpha, \quad i_{\alpha+1} = j_\alpha + 1, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad i_1 = 1, \quad j_m = n, \quad (16)$$

и будем считать, что ФИ попадает в группу с номером α , если номер i его цены λ_i удовлетворяет условию $i_\alpha \leq i \leq j_\alpha$. Заметим, что выбрать последовательности i_α и j_α , удовлетворяющие условиям (16), можно множеством способов.

Число ФИ, попадающих в группу с номером α выражается формулой

$$G_\alpha = \sum_{i=i_\alpha}^{j_\alpha} g_i, \quad (17)$$

а число ФИ, купленных из группы с номером α при покупке набора $\{k\} = k_1, \dots, k_n$, выражается формулой

$$N_\alpha = \sum_{i=i_\alpha}^{j_\alpha} k_i. \quad (18)$$

Набор $\{k\}$ удовлетворяет условию (31); следовательно, набор чисел N_α удовлетворяет равенству

$$\sum_{\alpha=1}^m N_\alpha = N, \quad (19)$$

а также из (11) следует, что для G_α выполняется равенство

$$\sum_{\alpha=1}^m G_\alpha = G. \quad (20)$$

При этом G зависит от N так, что выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G}{N} = \tilde{g} > 0. \quad (21)$$

Кроме того, будем считать, что разбиение $\Phi\mathbf{I}$ на группы (16) удовлетворяет следующему условию: m не зависит от N , а G_α зависят от N так, что выполняются равенства

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G_\alpha}{N} = \tilde{g}_\alpha > 0 \quad \text{для всех } \alpha = 1, \dots, m. \quad (22)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_\alpha}{N} \approx \bar{n}_\alpha > 0, \quad \sum \bar{n}_\alpha = 1.$$

Величины $\tilde{g}_\alpha$ и $\tilde{g}$ в силу (20) связаны соотношением

$$\sum_{\alpha=1}^m \tilde{g}_\alpha = \tilde{g}. \quad (23)$$

Обозначим

$$\mathcal{N}_\alpha(\beta, N) = \sum_{i=i_\alpha}^{j_\alpha} \frac{g_i}{\exp(\beta(\lambda_i + \nu)) - 1}, \quad (24)$$

где $\delta > 0$ – произвольный параметр, а ν определяется из уравнения

$$N = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\exp(\beta(\lambda_i + \nu)) - 1}. \quad (25)$$

Далее будем использовать обозначение

$$\Gamma(\beta, N) = \frac{(N + G - 1)!}{N! (G - 1)!} \exp(-\beta N M(\beta, N)). \quad (26)$$

Можно рассматривать также $\beta < 0$, причем при $\beta < 0$ выбирается решение уравнения (25), удовлетворяющее условию $\nu < -\lambda_n$, а при $\beta > 0$ выбирается решение, удовлетворяющее условию $\nu > -\lambda_1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие (22) и $\Delta = aN^{3/4+\delta}$, где a и $\delta < 1/3$ – не зависящие от N положительные параметры. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ не зависимо от N при $N \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\beta, N)} \sum_{\{k_i\}=N, \sum_{\alpha=1}^m (N_\alpha(\{k\}) - \mathcal{N}_\alpha(\beta, N))^2 \geq \Delta} \gamma(\{k\}) \exp(-\beta \mathcal{B}(\{k\})) \\ & = O\left(\exp\left(-\frac{(1-\varepsilon)a^2 N^{1/2+2\delta}}{2\tilde{g}d}\right)\right), \end{aligned} \quad (27)$$

где d определяется формулой

$$d = \begin{cases} \frac{\exp(-\beta(\lambda_1 + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_1 + \nu)) - 1)^2} & \text{при } \beta < 0, \\ \frac{\exp(-\beta(\lambda_n + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_n + \nu)) - 1)^2} & \text{при } \beta > 0. \end{cases} \quad (28)$$

То есть вклад в средний расход покупателя от числа купленных ФИ N_α (порядка N), которое отличается от $\mathcal{N}_\alpha(\beta, N)$ на величину порядка $O(N^{3/4+\delta})$, является величиной экспоненциально малой.

Таким образом, в случае когда ФИ разбиваются на достаточно большие группы (условие (22)), для данного нелинейного среднего расхода покупателя число купленных ФИ группы α в большинстве случаев равно приблизительно $\mathcal{N}_\alpha(\beta, N)$, что является аналогом закона больших чисел.

Для определения β предлагается следующий способ. Пусть задан набор фактических покупок N_α^f группы финансовых инструментов $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим следующую функцию от β :

$$DN(\beta) = \sum_{\alpha=1}^m (N_\alpha^f - \mathcal{N}_\alpha(\beta, \nu_\alpha))^2, \quad (29)$$

где $\mathcal{N}_\alpha(\beta, \nu_\alpha)$ выражается по формуле (24). В качестве β выбирается значение, при котором функция (29) минимальна.

Минимум этой величины, которая может быть определена, например, на фондовой бирже, показывает степень случайности разложения ФИ по портфелям трейдеров. Если минимум равен нулю, то распределение по портфелям случайно (см. [3]).

Прежде чем приступить к доказательству, докажем несколько утверждений и лемм.

Предположим, что покупатель располагает суммой денег B (budget restraint), но при этом не обязательно потратит всю эту сумму на покупки, и предположим, что он покупает N ФИ. Полное число разных вариантов покупок, при которых покупается N ФИ и тратится сумма, не превышающая B , выражается формулой [4]

$$\sigma(B, N) = \sum_{\{k=N\}} \gamma(\{k\}) \Theta(B - \mathcal{B}(\{k\})). \quad (30)$$

Здесь $\mathcal{B}(\{k\}) \leq B$, $\mathcal{B}(\{k\})$ определяется формулой (14), $\Theta(x)$ – функция Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

а $\sum_{\{k\}}^N$ обозначает сумму по всем наборам $\{k\}$ целых неотрицательных чисел $k_1, \dots, k_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^n k_i = N. \quad (31)$$

Заметим, что в силу (10) для любого набора $\{k\}$, удовлетворяющего (31), соответствующий расход (14) удовлетворяет неравенствам

$$0 < N\lambda_1 \leq \mathcal{B}(\{k\}) \leq N\lambda_n. \quad (32)$$

Число вариантов покупки $\sigma(B, N)$ (30) является кусочно-постоянной функцией переменной B и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\sigma(B, N) &\leq \sigma(B', N) && \text{при } B \leq B', \\ \sigma(B, N) &= 0 && \text{при } B < N\lambda_1, \\ \sigma(B, N) &= \sigma(N\lambda_n, N) && \text{при } B \geq N\lambda_n.\end{aligned}$$

Эти свойства $\sigma(B, N)$ следуют непосредственно из определений (30) и неравенства (32).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любого положительного β и любого N выполняется тождество

$$\int_0^\infty e^{-\beta B} d\sigma(B, N) = \Gamma(\beta, N). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (30) в левую часть равенства (33) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\int_0^\infty e^{-\beta B} d\sigma(B, N) = \sum_{\{k\}}^N \gamma(\{k\}) \int_0^\infty e^{-\beta B} d\Theta(B - \mathcal{B}(\{k\})). \quad (34)$$

Теперь воспользуемся равенством

$$\int_0^\infty e^{-\beta B} d\Theta(B - B_0) = e^{-\beta B_0}, \quad (35)$$

которое справедливо для любых положительных β и B_0 . Учитывая (35), получим из (34) следующее равенство:

$$\int_0^\infty e^{-\beta B} d\sigma(B, N) = \sum_{\{k\}}^N \gamma(\{k\}) \exp(-\beta \mathcal{B}(\{k\})). \quad (36)$$

Из (15) и (26) следует, что выражение в правой части равенства (36) равно $\Gamma(\beta, N)$. Таким образом, утверждение доказано.

Введем следующую функцию $\zeta(\beta, \nu)$, определенную для всех $\nu > -\lambda_1$ и $\beta > 0$:

$$\zeta(\beta, \nu) = \sum_{N=0}^{\infty} \Gamma(\beta, N) e^{-\beta N\nu}. \quad (37)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любых $\nu > -\lambda_1$ и $\beta > 0$ справедливо равенство

$$\zeta(\beta, \nu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \exp(-\beta(\lambda_i + \nu)))^{g_i}}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формулам (15), (26) имеем

$$\sum_{N=0}^{\infty} \Gamma(\beta, N) e^{-\beta N \nu} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta N \nu} \sum_{\{k\}}^N \gamma(\{k\}) \exp(-\beta \mathcal{B}(\{k\})). \quad (39)$$

Учитывая явный вид $\gamma(\{k\})$ (13) и $\mathcal{B}(\{k\})$ (14), получим, что сумма в равенстве (39) распадается на произведение сумм:

$$\sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta N \nu} \sum_{\{k\}}^N \gamma(\{k\}) \exp(-\beta \mathcal{B}(\{k\})) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{(k_i + g_i - 1)!}{k_i! (g_i - 1)!} e^{-\beta(\lambda_i + \nu) k_i} \right). \quad (40)$$

Воспользуемся теперь равенством

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + g - 1)!}{k! (g - 1)!} x^k = \frac{1}{(1 - x)^g}, \quad (41)$$

справедливым для любого натурального g и любого x такого, что $|x| < 1$. Так как $\nu > -\lambda_1$ и $\beta > 0$, в силу (41) из (37), (39), (40) следует (38). Утверждение доказано.

Для доказательства некоторых свойств функции $\Gamma(\beta, N)$ (см. (26)) используется следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Функции $z_n(x_1, \dots, x_n; N)$, имеющие вид*

$$z_l(x_1, \dots, x_l; N) = \sum_{\{k\}}^N \exp\left(\sum_{i=1}^l x_i k_i\right) \quad (42)$$

при произвольных целых l и N , удовлетворяющих условиям $l \geq 2$ и $N \geq 1$, и при всех действительных $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяют неравенству

$$z_l(x_1, \dots, x_l, N)^2 > z_l(x_1, \dots, x_l, N - 1) z_l(x_1, \dots, x_l, N + 1). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы по индукции. Сначала докажем, что (43) справедливо при $l = 2$. Если $l = 2$ и $x_2 = x_1$, то при всех целых неотрицательных N функция (42) равна

$$z_2(x_1, x_1; N) = \sum_{k=0}^N e^{x_1 N} = (N + 1) e^{x_1 N},$$

и выполнение (43) в этом случае проверяется элементарно. Если $l = 2$ и $x_2 \neq x_1$, то для всех целых неотрицательных N функция (42) имеет вид

$$z_2(x_1, x_2; N) = \sum_{k=0}^N e^{x_1 k + x_2 (N - k)} = e^{x_2 N} \frac{1 - e^{(x_1 - x_2)(N + 1)}}{1 - e^{x_1 - x_2}}. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43), получим после несложных преобразований, что выполнение неравенства (43) в этом случае эквивалентно выполнению следующего неравенства:

$$\frac{1}{2}(e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1}) > 1. \quad (45)$$

Однако неравенство (45) справедливо для всех не равных друг другу чисел x_1 и x_2 в силу выпуклости функции $y(x) = \exp(x)$. Таким образом, справедливость (43) для $l = 2$ доказана. Предположим теперь, что неравенство (43) доказано при $l = k$, где $k \geq 2$, и докажем, что отсюда следует справедливость этого неравенства при $n = l + 1$. Заметим, что функции (42) обладают следующим свойством, которое элементарно следует из явного вида этих функций:

$$z_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}; N) = e^{x_{k+1}} \sum_{m=0}^N z_k(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k; m), \quad (46)$$

где $\tilde{x}_i = x_i - x_{k+1}$, $i = 1, \dots, n$. Подстановка (46) в неравенство (43) после несложных преобразований приводит к тому, что выполнение неравенства (43) при $n = k + 1$ эквивалентно справедливости неравенства

$$z_k(\tilde{x}; 0)z_k(\tilde{x}; N) + \sum_{m=0}^{N-1} (z_k(\tilde{x}; k+1)z_k(\tilde{x}; N) - z_k(\tilde{x}; k)z(\tilde{x}; N+1)) > 0, \quad (47)$$

где $z_k(\tilde{x}; m)$ обозначает $z_k(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k; m)$. По предположению неравенство (43) справедливо при $n = k$; отсюда следует, что для всех $k = 0, \dots, N - 1$ выполняется

$$z_k(\tilde{x}; k+1)z_k(\tilde{x}; N) - z_k(\tilde{x}; k)z(\tilde{x}; N+1) > 0, \quad (48)$$

а это означает, что все слагаемые в левой части неравенства (47) положительные, т.е. неравенство (47) выполняется. Таким образом, справедливость (43) при $l = k + 1$ доказана и, следовательно, утверждение леммы также доказано по индукции.

Следствием леммы 1 является выпуклость логарифма функции $\Gamma(\beta, N)$ (26) по дискретной переменной N .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. При всех натуральных N и всех положительных β выполняются неравенства

$$\Gamma(\beta, N)^2 > \Gamma(\beta, N-1)\Gamma(\beta, N+1), \quad (49)$$

$$\Gamma(\beta, N-1) < e^{\beta\lambda_1}\Gamma(\beta, N). \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этих неравенств достаточно заметить, что $\Gamma(\beta, N)$ (26) согласно формуле (15) может быть записано в виде

$$\Gamma(\beta, N) = \sum_{\{k\}}^N \gamma(\{k\}) \exp(-\beta \mathcal{B}(\{k\})). \quad (51)$$

Правая часть равенства (51) равна функции (42) при

$$l = G, \quad x_1 = \dots = x_{g_1} = -\beta \lambda_1, \quad x_{g_1+1} = \dots = x_{g_1+g_2} = -\beta \lambda_2, \quad \dots, \\ x_{G-g_n+1} = \dots = x_G = -\beta \lambda_G; \quad (52)$$

это равенство следует из формулы

$$\sum_{0 \leq m_1, \dots, m_g}^{m_1 + \dots + m_g = k} 1 = \frac{(k + g - 1)!}{k! (g - 1)!}.$$

Таким образом, (49) следует из (43), а для доказательства (50) достаточно воспользоваться равенством (46).

Из свойства (49) следует еще одно свойство $\Gamma(\beta, N)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. При любом заданном положительном β для любого неотрицательного целого N существует $\nu > -\lambda_1$ такое, что для всех $N' \neq N$

$$\Gamma(\beta, N) e^{-\beta N \nu} > \Gamma(\beta, N') e^{-\beta N' \nu}. \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (49) выберем любое ν , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\Gamma(\beta, N+1)}{\Gamma(\beta, N)} \right) < \nu < \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\Gamma(\beta, N)}{\Gamma(\beta, N-1)} \right). \quad (54)$$

Из (50) следует, что такое ν удовлетворяет неравенству $\nu > -\lambda_1$. Кроме того, из (49) и (54) следует выполнение неравенств

$$e^{-\beta(N'+1)\nu} \Gamma(\beta, N'+1) > e^{-\beta N' \nu} \Gamma(\beta, N') \quad \text{для всех } N', \quad 0 \leq N' \leq N-1, \\ e^{-\beta(N'+1)\nu} \Gamma(\beta, N'+1) < e^{-\beta N' \nu} \Gamma(\beta, N') \quad \text{для всех } N', \quad N \leq N'. \quad (55)$$

Однако, справедливость неравенств (55) означает выполнение неравенства (53) при всех $N' \neq N$. Утверждение доказано.

Теперь докажем еще одну лемму, которая позволит оценить нелинейное осреднение (15) с помощью равенства (37). Пусть p_l , $l = 0, 1, \dots$, — последовательность чисел, удовлетворяющих условиям

$$p_l \geq 0 \quad \text{для всех } l = 0, 1, \dots, \quad \sum_{l=0}^{\infty} p_l = 1, \quad (56)$$

а так же

$$\bar{l} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} l p_l < \infty, \quad (57)$$

$$Dl \equiv \sum_{l=0}^{\infty} (l - \bar{l})^2 p_l < \infty. \quad (58)$$

Из условий (56) следует, что числа p_l ограничены сверху, и из них можно выбрать максимальное. То есть существует индекс, который далее обозначим через L , такой, что выполняется условие

$$p_L \geq p_l \quad \text{для всех } l = 0, 1, \dots. \quad (59)$$

ЛЕММА 2. Для произвольной последовательности чисел p_l , $l = 0, 1, \dots$, удовлетворяющей условиям (56)–(59), справедливы неравенства

$$|L - \bar{l}| \leq (3Dl)^{3/4}, \quad (60)$$

$$p_L \geq \frac{1}{\sqrt{27Dl}}. \quad (61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\Delta > 0$ выполняется неравенство Чебышева

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_l \Theta(|l - \bar{l}| - \Delta) \leq \sum_{l=0}^{\infty} p_l \frac{(l - \bar{l})^2}{\Delta^2} = \frac{Dl}{\Delta^2}. \quad (62)$$

Из (62) и (56), (59) следует, что для любого $\Delta > 0$ имеет место цепочка неравенств

$$2\Delta p_L \geq \sum_{|l - \bar{l}| < \Delta} p_l \geq 1 - \frac{Dl}{\Delta^2}. \quad (63)$$

Из (63) получаем

$$p_L \geq \frac{1}{2\Delta} \left(1 - \frac{Dl}{\Delta^2} \right) \quad \text{для любого } \Delta > 0. \quad (64)$$

Элементарное исследование на максимум по переменной Δ функции, стоящей в правой части неравенства (64), показывает, что эта функция достигает максимального значения $1/\sqrt{27Dl}$ при $\Delta = \sqrt{3Dn}$. Неравенство (61), таким образом, доказано. Возьмем теперь $\Delta = |L - \bar{l}|$; тогда из (62) и (56) следует

$$p_L \leq \sum_{l=0}^{\infty} p_l \Theta(|l - \bar{l}| - |L - \bar{l}|) \leq \frac{Dl}{(L - \bar{l})^2}. \quad (65)$$

Учитывая (61), из (65) получим неравенство (60).

Каждой группе соответствует свое нелинейное осреднение расхода; аналогично (15) осреднение расхода на ФИ из группы с номером α выражается формулой

$$M_\alpha(\beta, N_\alpha) = -\frac{1}{\beta N_\alpha} \ln \left(\frac{N_\alpha! (G_\alpha - 1)!}{(N_\alpha + G_\alpha - 1)!} \sum_{\{k\}_\alpha}^{N_\alpha} \prod_{i=i_\alpha}^{j_\alpha} (\gamma_i(k_i) e^{-\beta \lambda_i k_i}) \right), \quad (66)$$

где $\gamma_i(k_i)$ выражается формулой (12), а $\sum_{\{k\}_\alpha}^{N_\alpha}$ обозначает сумму по всем наборам $\{k\}_\alpha$ целых неотрицательных чисел $k_{i_\alpha}, \dots, k_{j_\alpha}$, удовлетворяющим условию (18). Аналогично (26) и (37) для всех неотрицательных целых N_α , для всех $\beta > 0$ и всех $\nu > -\lambda_1$ определяются функции $\Gamma_\alpha(\beta, N_\alpha)$ и $\zeta_\alpha(\beta, \nu)$:

$$\Gamma_\alpha(\beta, N_\alpha) = \frac{(N_\alpha + G_\alpha - 1)!}{N_\alpha! (G_\alpha - 1)!} \exp(-\beta N_\alpha M_\alpha(\beta, N_\alpha)), \quad (67)$$

$$\zeta_\alpha(\beta, \nu) = \sum_{N_\alpha=0}^{\infty} \Gamma_\alpha(\beta, N_\alpha) e^{-\beta N_\alpha \nu}. \quad (68)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Имеют место равенства*

$$\Gamma(\beta, N) = \sum_{\{N_\alpha\}}^N \prod_{\alpha=1}^m \Gamma_\alpha(\beta, N_\alpha), \quad (69)$$

$$\zeta(\beta, \nu) = \prod_{\alpha=1}^m \zeta_\alpha(\beta, \nu), \quad (70)$$

$$\zeta_\alpha(\beta, \nu) = \prod_{i=i_\alpha}^{j_\alpha} \frac{1}{(1 - \exp(-\beta(\lambda_i + \nu)))^{g_i}}, \quad (71)$$

где $\sum_{\{N_\alpha\}}^N$ обозначает сумму по всем наборам $\{N_\alpha\}$ целых неотрицательных чисел $N_1, \dots, N_m$, удовлетворяющим условию (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (70) и (71) следуют из (38). Для доказательства (69) достаточно воспользоваться формулой (51) и учесть, что для всех $\Gamma_\alpha(\beta, N_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, m$, имеют место аналогичные формулы, а также учесть, что в формуле (51) слагаемые суммы в силу явного вида $\gamma(\{k\})$ (13) и $\mathcal{B}(\{k\})$ (14) распадаются на произведение.

Среднее число ФИ, купленных из группы с номером α при покупке в целом N ФИ, в зависимости от β определяется следующим образом:

$$\bar{N}_\alpha(\beta, N) = \frac{1}{\Gamma(\beta, N)} \sum_{\{k\}}^N N_\alpha(\{k\}) \gamma(\{k\}) \exp(-\beta \mathcal{B}(\{k\})), \quad (72)$$

где $N_\alpha(\{k\})$ зависит от набора $\{k\}$ согласно формуле (18). При рассмотрении средних (72) также нам понадобятся следующие функции:

$$\tilde{N}(\beta, \nu) = \frac{1}{\zeta(\beta, \nu)} \sum_{N=0}^{\infty} N \Gamma(\beta, N) e^{-\beta N \nu}, \quad (73)$$

$$D\tilde{N}(\beta, \nu) = \frac{1}{\zeta(\beta, \nu)} \sum_{N=0}^{\infty} (N - \bar{N}(\beta, \nu))^2 \Gamma(\beta, N) e^{-\beta N \nu}, \quad (74)$$

$$\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu) = \frac{1}{\zeta(\beta, \nu)} \sum_{\{k\}} N_\alpha(\{k\}) \gamma(\{k\}) \exp(-\beta(\mathcal{B}(\{k\}) + \nu N(\{k\}))), \quad (75)$$

$$D\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu) = \frac{1}{\zeta(\beta, \nu)} \sum_{\{k\}} (N_\alpha(\{k\}) - \tilde{N}_\alpha(\beta, \nu))^2 \gamma(\{k\}) \exp(-\beta(\mathcal{B}(\{k\}) + \nu N(\{k\}))), \quad (76)$$

где $N(\{k\})$ зависит от набора $\{k\}$ по формуле (31), а $\sum_{\{k\}}$ обозначает сумму по всем наборам $\{k\}$ целых неотрицательных чисел $k_1, \dots, k_n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для величин (73)–(76) имеют место тождества

$$\tilde{N}(\beta, \nu) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\exp(\beta(\lambda_i + \nu)) - 1}, \quad (77)$$

$$D\tilde{N}(\beta, \nu) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i \exp(\beta(\lambda_i + \nu))}{(\exp(\beta(\lambda_i + \nu)) - 1)^2}, \quad (78)$$

$$\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu) = \sum_{i=i_\alpha}^{j_\alpha} \frac{g_i}{\exp(\beta(\lambda_i + \nu)) - 1}, \quad (79)$$

$$D\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu) = \sum_{i=i_\alpha}^{j_\alpha} \frac{g_i \exp(\beta(\lambda_i + \nu))}{(\exp(\beta(\lambda_i + \nu)) - 1)^2}. \quad (80)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что величины (73) и (74) можно записать в виде

$$\tilde{N}(\beta, \nu) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln(\zeta(\beta, \nu)), \quad (81)$$

$$D\tilde{N}(\beta, \nu) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{N}(\beta, \nu), \quad (82)$$

в чем можно убедиться дифференцированием $\zeta(\beta, \nu)$ (37). После чего, подставляя (38) в (81) и (82), получим (77) и (78). Теперь, учитывая явный вид $\gamma(\{k\})$ (13) и $\mathcal{B}(\{k\})$ (14), а также формулы (66), (67) и (70), запишем выражения (75), (76) в виде, аналогичном (73), (74):

$$\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu) = \frac{1}{\zeta_\alpha(\beta, \nu)} \sum_{N_\alpha=0}^{\infty} N_\alpha \Gamma_\alpha(\beta, N_\alpha) e^{-\beta N_\alpha \nu}, \quad (83)$$

$$D\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu) = \frac{1}{\zeta_\alpha(\beta, \nu)} \sum_{N_\alpha=0}^{\infty} (N_\alpha - \bar{N}_\alpha(\beta, \nu))^2 \Gamma_\alpha(\beta, N_\alpha) e^{-\beta N_\alpha \nu}. \quad (84)$$

Следовательно, для величин (75) и (76) имеют место формулы, аналогичные формулам (81) и (82), только $\zeta(\beta, \nu)$ надо заменить на $\zeta_\alpha(\beta, \nu)$; подставляя в эти формулы (71), получим (79) и (80). Утверждение доказано.

Для доказательства экспоненциальной оценки в утверждении теоремы 2 используется следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Для всех положительных Δ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta(\beta, \nu)} \sum_{\{k\}} \Theta \left(\sum_{\alpha=1}^m |N_\alpha - \tilde{N}_\alpha(\beta, \nu)| - \Delta \right) \gamma(\{k\}) \exp(\beta(\mathcal{B}(\{k\}) + \nu N(\{k\}))) \\ & \leq 2^m \exp \left(-\frac{\Delta^2}{2Gd} \right), \end{aligned} \quad (85)$$

где d определяется формулой (28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующими свойствами функции гиперболического косинуса $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$:

$$\prod_{\alpha=1}^m \cosh(x_\alpha) \geq \left(\cosh\left(\frac{\Delta}{m}\right) \right)^m \quad \forall x_\alpha : \sum_{\alpha=1}^m |x_\alpha| \geq \Delta, \quad \frac{1}{\cosh(x)} \leq 2e^{-x}. \quad (86)$$

Неравенства (86) позволяют написать с помощью формулы (69) следующее (экспоненциальное) неравенство Чебышева:

$$\begin{aligned} & \sum_{\{k\}} \Theta \left(\sum_{\alpha=1}^m |N_\alpha - \tilde{N}_\alpha(\beta, \nu)| - \Delta \right) \gamma(\{k\}) \exp(\beta(\mathcal{B}(\{k\}) + \nu N(\{k\}))) \\ & \leq 2^m e^{-c\Delta} \prod_{\alpha=1}^m \left(\sum_{N_\alpha=0}^{\infty} \Gamma_\alpha(\beta, N_\alpha) e^{\beta \nu N_\alpha} \cosh(c(N_\alpha - \tilde{N}_\alpha(\beta, \nu))) \right), \end{aligned} \quad (87)$$

где c — произвольное положительное число. Учитывая теперь (68) и (70), перепишем (87) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta(\beta, \nu)} \sum_{\{k\}} \Theta \left(\sum_{\alpha=1}^m |N_\alpha - \tilde{N}_\alpha(\beta, \nu)| - \Delta \right) \gamma(\{k\}) \exp(\beta(\mathcal{B}(\{k\}) + \nu N(\{k\}))) \\ & \leq 2^m e^{-c\Delta} \prod_{\alpha=1}^m \frac{1}{2\zeta_\alpha(\beta, \nu)} \left(\exp(-c\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu)) \zeta_\alpha\left(\beta, \nu + \frac{c}{\beta}\right) \right. \\ & \quad \left. + \exp(c\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu)) \zeta_\alpha\left(\beta, \nu - \frac{c}{\beta}\right) \right). \end{aligned} \quad (88)$$

Далее используем тождество

$$\begin{aligned} & \ln \left(\zeta_\alpha\left(\beta, \nu + \frac{c}{\beta}\right) \right) = \ln(\zeta_\alpha(\beta, \nu)) + \frac{c}{\beta} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln(\zeta_\alpha(\beta, \nu)) \\ & + \int_{\nu}^{\nu+c/\beta} d\nu' \left(\nu + \frac{c}{\beta} - \nu' \right) \frac{\partial^2}{\partial \nu'^2} \ln(\zeta_\alpha(\beta, \nu')), \end{aligned} \quad (89)$$

справедливое в силу двукратной дифференцируемости функции (71) по переменной ν . В силу явного вида функции $\zeta_\alpha(\beta, \nu)$ (71) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln(\zeta_\alpha(\beta, \nu)) = \beta^2 \sum_{i=i_\alpha}^{j_\alpha} \frac{g_i \exp(-\beta(\lambda_i + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_i + \nu)) - 1)^2} \leq \beta^2 G_\alpha d, \quad (90)$$

где d выражается формулой (28). Используя неравенство (90) и формулы (79), (81), получим из (89) следующее неравенство:

$$-c\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu) + \ln \left(\zeta_\alpha\left(\beta, \nu + \frac{c}{\beta}\right) \right) - \ln(\zeta_\alpha(\beta, \nu)) \leq \frac{G_\alpha}{2} dc^2. \quad (91)$$

В силу (91) и (20) из (88) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta(\beta, \nu)} \sum_{\{k\}} \Theta \left(\sum_{\alpha=1}^m |N_{\alpha} - \tilde{N}_{\alpha}(\beta, \nu)| - \Delta \right) \gamma(\{k\}) \exp(\beta(\mathcal{B}(\{k\}) + \nu N(\{k\}))) \\ & \leq 2^m \exp \left(-c\Delta + \frac{Gdc^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (92)$$

Выражение в правой части неравенства (92) содержит произвольный положительный параметр c ; минимальное значение этого выражения достигается при $c = \Delta/d$, и оно равно $2^m \exp(-\Delta^2/2d)$, а значит, (85) следует из (92). Утверждение доказано.

Будем считать, что λ_1 и λ_n не зависят от N ; согласно (10) это означает, что цены λ_i , $i = 1, \dots, n$, лежат в независящем от N диапазоне. Характер зависимости n от N никак ограничивать не будем, на полученных результатах эта зависимость не сказывается; заметим только, что согласно (11) для n имеет место неравенство $n \leq G$. Оговоренные условия допускают большой произвол в выборе λ_i и g_i , а также в разбиении Φ И на группы. В связи с этим написать асимптотику нелинейных осреднений (15) и (66) и средних (72) в пределе при $N \rightarrow \infty$ в общем случае невозможно; однако оказывается, что можно доказать некоторые свойства этих величин в таком предельном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно утверждению 4 выберем для заданных β и N такое ν' , что для него выполняется неравенство (53). В силу формул (37), (38) и (73), (74), (77), (78) последовательность

$$p_l = \frac{\Gamma(\beta, l) e^{\beta l \nu'}}{\zeta(\beta, \nu')}$$

является последовательностью, для которой применима лемма 2. Это означает, что для заданных β , N и соответствующего им ν' выполняются неравенства

$$|\tilde{N}(\beta, \nu') - N| \leq (3D\tilde{N}(\beta, \nu'))^{3/4}, \quad (93)$$

$$1 > \frac{\Gamma(\beta, N) e^{\beta N \nu'}}{\zeta(\beta, \nu')} \geq \frac{1}{\sqrt{27D\tilde{N}(\beta, \nu')}}. \quad (94)$$

Заметим теперь, что функция $\tilde{N}(\beta, \nu)$ (77) обладает следующими свойствами при всех $\nu > -\lambda_1$, если $\beta < 0$, и всех $\nu < -\lambda_n$, если $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\beta, \nu) & \geq 0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{N}(\beta, \nu) = 0, \quad \lim_{\nu \rightarrow -\lambda_1 + 0} \tilde{N}(\beta, \nu) = \lim_{\nu \rightarrow -\lambda_n - 0} \tilde{N}(\beta, \nu) = +\infty, \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \nu}(\beta, \nu) & = \sum_{i=1}^n \frac{g_i \exp(-\beta(\lambda_i + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_i + \nu)) - 1)^2} > 0, \\ \left| \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \nu}(\beta, \nu) \right| & \leq \begin{cases} -\frac{\beta G \exp(-\beta(\lambda_1 + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_1 + \nu)) - 1)^2} & \text{при } \beta < 0, \\ \frac{\beta G \exp(-\beta(\lambda_n + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_n + \nu)) - 1)^2} & \text{при } \beta > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (95)$$

В силу (95), во-первых, уравнение (25) имеет решение $\nu > -\lambda_1$ для любых $\beta < 0$ и $\nu < -\lambda_n$ для любых $\beta > 0$; обозначим это решение через $\nu(\beta, N)$. Во-вторых, из (93) и (95) следует, что

$$\nu' = \nu(\beta, N) + O\left(\frac{1}{N^{1/4}}\right), \quad (96)$$

так как для $D\tilde{N}(\beta, \nu)$ (78) согласно (10) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \frac{-\beta G \exp(-\beta(\lambda_n + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_n + \nu)) - 1)^2} &\leq D\tilde{N}(\beta, \nu) \leq \frac{-\beta G \exp(-\beta(\lambda_1 + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_1 + \nu)) - 1)^2} && \text{при } \beta < 0, \\ \frac{\beta G \exp(-\beta(\lambda_1 + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_1 + \nu)) - 1)^2} &\leq D\tilde{N}(\beta, \nu) \leq \frac{\beta G \exp(-\beta(\lambda_n + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_n + \nu)) - 1)^2} && \text{при } \beta > 0, \end{aligned} \quad (97)$$

а G растет как N по условию (21). Учтем теперь, что для $\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu)$ выполняется (79) и они, следовательно, обладают свойствами, аналогичными (95). Тогда из (96), (79), (95) и определения $\mathcal{N}_\alpha(\beta, N)$ (24) следует, что

$$|\mathcal{N}_\alpha(\beta, N) - \tilde{N}_\alpha(\beta, \nu')| = O(N^{3/4}). \quad (98)$$

Пусть теперь $\Delta = aN^{3/4+\delta}$, где a и δ – произвольные положительные параметры, не зависящие от N . Если выполнено условие

$$|\tilde{N}_\alpha(\beta, \nu') - N_\alpha| \geq \Delta,$$

то при достаточно больших N выполнено условие

$$\sum_{\alpha=1}^m |\mathcal{N}_\alpha(\beta, N) - N_\alpha| \geq \Delta' = \Delta - \sum_{\alpha=1}^m |\mathcal{N}_\alpha(\beta, N) - \tilde{N}_\alpha(\beta, \nu')|.$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{\{k\}} \Theta \left(\sum_{\alpha=1}^m |N_\alpha - \mathcal{N}_\alpha(\beta, \nu)| - \Delta \right) \gamma(\{k\}) \exp(\beta(\mathcal{B}(\{k\}) + \nu N(\{k\}))) \\ \leq \sum_{\{k\}} \Theta \left(\sum_{\alpha=1}^m |N_\alpha - \tilde{N}_\alpha(\beta, \nu')| - \Delta' \right) \gamma(\{k\}) \exp(\beta(\mathcal{B}(\{k\}) + \nu N(\{k\}))). \end{aligned} \quad (99)$$

В силу (98) и (43) для любого не зависящего от N параметра $\varepsilon > 0$ и для всех положительных a и δ при $N \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\sqrt{N} \exp\left(-\frac{\Delta'^2}{2Gd}\right) = O\left(\exp\left(-\frac{(1-\varepsilon)a^2 N^{1/2+2\delta}}{2\tilde{g}d}\right)\right). \quad (100)$$

Из (85), (94) и (100) следует (27). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь рассмотрен случай $\beta > 0$. Совершенно аналогично рассматривается случай $\beta < 0$. Если везде брать $\nu < -\alpha_n$, то можно получить те же результаты.

5. Туннельный канонический оператор в экономике. Равновесные цены определяются из условия равенства спроса и предложения по каждому продукту и ресурсу. Аналогично определяются следующие пары: потоки продуктов и услуг – цены; потоки труда разных видов – ставки зарплаты; потоки природных ресурсов – ренты; процент ссуды – объем ссуд.

Асимптотика M и $\widetilde{M}$ дается туннельным каноническим оператором в фазовом пространстве пар [5].

Мы будем рассматривать фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}$, где интенсивные величины будут играть роль координат, а экстенсивные – импульсов. В экономике роль значений случайной величины λ_i могут играть цены соответствующих товаров, а N_i – например, число проданных, т.е. число людей, купивших данный товар, или процент, выплачиваемый i -м банком и т.д. Очевидно, что цена зависит от спроса, т.е. $\lambda_i(N_i)$ в двухмерном фазовом пространстве – это кривая. В двухмерном фазовом пространстве каждой точке (вектору) λ_i , $i = 1, \dots, n$, отвечает некоторый вектор $N_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $i = 1, \dots, n$. В более общем случае это N -мерное многообразие (поверхность), где “координаты” и “импульсы” локально зависят от n параметров; при этом выполняется некоторое условие: скобки Лагранжа от “координат” и “импульсов” по этим параметрам равны нулю. Поэтому автор назвал такое многообразие лагранжевым. По-другому можно сказать, что форма $\sum N_i d\lambda_i$ замкнута (см. послесловие [6] и [7]). Значит, $\int N_i d\lambda_i$ не зависит от пути и, как в механике $\int p dq$ (p – импульс, q – координата), называется действием.

Производитель приобретает ресурсы и преобразовывает вектор затрат ресурсов в вектор выпусков потребительских благ. Потребитель приобретает эти блага. Соответственно определяются вышеизложенными равенствами равновесные цены на ресурсы и цены на потребительские блага [8]–[17].

Кроме таких равновесных цен могут еще образовываться вертикальные пары на отдельные потребительские блага и пары продавец – покупатель, т.е. постоянный продавец – постоянный покупатель, и соответственно образуются цены, связанные с этими парами. Аналогом в квантовой статистике являются куперовские пары.

Эта конструкция требует привлечение метода ультраторического квантования в абстрактной алгебраической форме, которая могла бы быть применима в экономике. Эта теория приводит и к образованию “вертикальных” кластеров. Этот метод разработан в другой работе.

Автор выражает глубокую благодарность Г. В. Ковалю за помощь и В. Н. Батурину за поддержку и обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колмогоров А. Н. // Избранные труды по математике и механике, 1985. С. 136–137.
- [2] Маслов В. П. Аксиомы нелинейного осреднения в финансовой математике и динамика курса акций // Теор. вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. № 4. С. 800–810.
- [3] ‘Zero Intelligence’ Trading Closely Mimics Stock Market // <http://www.newscientist.com/article.ns?id=dn6948>. Katharine Davis: NewScientist, 05/02/01; см. также другие сайты по ссылке “Zero Intelligence”.
- [4] Вьюгин В. В., Маслов В. П. Теорема о концентрации для энтропии и свободной энергии // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41. № 2. С. 72–88.
- [5] Маслов В. П. Геометрическое “квантование” термодинамики и статистические поправки в критических точках // ТМФ. 1994. Т. 101. № 3. С. 433–441.

- [6] Хединг Дж. Введение в метод фазового интервала // Послесловие к книге: Маслов В. П. Метод ВКБ в многомерном случае. М.: Мир, 1965.
- [7] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965.
- [8] Маслов В. П. Аппроксимационные вероятности, закон квазистабильного рынка и фазовый переход из “конденсатного” состояния // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 6. С. 727–732.
- [9] Маслов В. П. Интегральные уравнения и фазовые переходы в вероятностных играх. Аналогия со статистической физикой // Теор. вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. № 2. С. 482–502.
- [10] Маслов В. П. Эконофизика и квантовая статистика // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 6. С. 883–891.
- [11] Маслов В. П. Зависимость покупательной способности и среднего дохода населения от числа покупателей на специализированном рынке и в регионе. Законы эконофизики // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 2. С. 164–168.
- [12] Маслов В. П. Расходы покупателей и скорость оборота при нелинейном финансовом осреднении. Законы эконофизики // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 2.
- [13] Маслов В. П. Нелинейное финансовое осреднение, эволюционный процесс и законы эконофизики // Теор. вероятн. и ее примен. 2004. Т. 49. № 2. С. 34.
- [14] Маслов В. П. Квазистабильная экономика и ее связь с термодинамикой сверхтекучей жидкости. Дефолт как фазовый переход нулевого рода. 1 // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11. № 4. С. 690–732; 2 // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12. № 1. С. 3–40.
- [15] Батурин В. Н., Лебедев С. Г., Маслов В. П., Садовников Б. И., Чеботарев А. М. Реконструкция Парето-распределения в области высоких доходов // Экономическая наука современной России. 2005. № 3.
- [16] Maslov V. P. Quantum economics // Russian J. Math. Phys. 2005. V. 12. № 2. P. 219–231.
- [17] Маслов В. П. Капиталистическая математика // Manuscript at www.viktor-maslov.narod.ru, 2005.