Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Матевосян, И. В. Филимонова, Об усреднении полулинейных параболических операторов в перфорированном цилиндре, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 396–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:31:52

УДК 517.95

ОБ УСРЕДНЕНИИ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ПЕРФОРИРОВАННОМ ЦИЛИНДРЕ

О. А. Матевосян, И. В. Филимонова

В работе для полулинейного параболического уравнения второго порядка с младшим членом, растущим по неизвестной функции степенным образом, доказывается, что последовательность решений в перфорированном цилиндре стремится к решению в неперфорированном цилиндре, если радиусы выброшенных шаров, в параболической метрике, стремятся к нулю со скоростью, зависящей от показателя степени в младшем члене.

Библиография: 15 названий.

Изучению вопросов теории усреднения для перфорированных областей посвящено много работ (см. [1]–[3]), в которых на поведение решений при приближении к дырам ставятся какие-либо ограничения, например, – граничные условия. Однако для усреднения решений уравнений с достаточно сильным нелинейным поглощением такие ограничения не нужны. Подобная ситуация была обнаружена и в теории устранения особенностей. В связи с этим отметим работы [4]–[7]. Вопросы усреднения полулинейных эллиптических задач в перфорированных областях были изучены в работах [8], [9] с использованием оценки Кондратьева–Ландиса [10, § 1, п. 3]. Доказательства теорем настоящей работы основываются на аналогичной оценке решения полулинейного параболического уравнения через расстояние от точки до границы области в соответствующей метрике, полученной в работе [11].

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$, $|u_x|^2 = \sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2$, $u_t = \partial u / \partial t$, $0 \leq t < T < \infty$; кроме того,

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – замыкание Ω ;

$Q = \Omega \times (0, T)$ – цилиндр в пространстве точек $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, $0 < T < \infty$;

$S(Q) = \partial\Omega \times [0, T]$ – боковая поверхность цилиндра $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$; $\Gamma(Q) = S(Q) \cup \Upsilon_0(\Omega)$ – параболическая граница цилиндра $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $\Upsilon_t(\Omega) = \overline{\Omega} \times \{t\}$ $\forall t \in [0, T]$;

$Q(x_0, t_0, R, T) = B(x_0, R) \times [t_0, t_0 + T]$ – цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$ радиуса R и высоты T , где $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в точке x_0 .

Отметим, что цилиндр $Q(x_0, t_0, R, R^2)$ является шаром в параболической метрике, т.е. в метрике, в которой расстояние между точками определяется следующим образом:

$$\text{dist}[(x_1, t_1), (x_2, t_2)] = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + |t_1 - t_2|},$$

центр которого находится в точке с координатами $(x_0, t_0 + R/2)$.

Обозначим

$\mathcal{C}(Q)$ – совокупность непрерывных в Q функций;

$L_{p,r}(Q)$ – пространство, состоящее из всех измеримых на Q функций с конечной нормой

$$\|u; L_{p,r}(Q)\| = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(x, t)|^p dx \right)^{r/p} dt \right)^{1/r}, \quad p \geq 1, \quad r \geq 1;$$

$L_{p,r}(Q)$ будем обозначать через $L_p(Q)$ и норму $\|\cdot; L_{p,r}(Q)\|$ через $\|\cdot; L_p(Q)\|$ при $p = r$;

$W_p^{1,1}(Q)$ – пространство Соболева, состоящее из элементов $L_p(Q)$, имеющих обобщенные производные по x и по t с нормой

$$\|u; W_p^{1,1}(Q)\| = \|u; L_p(Q)\| + \|u_x; L_p(Q)\| + \|u_t; L_p(Q)\|;$$

$W_p^{1,0}(Q)$ – пространство Соболева, состоящее из элементов $L_p(Q)$, имеющих обобщенные производные по x с нормой

$$\|u; W_p^{1,0}(Q)\| = \|u; L_p(Q)\| + \|u_x; L_p(Q)\|.$$

Пусть $L, \mathcal{L}$ – операторы вида

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad \mathcal{L} \equiv L - \frac{\partial}{\partial t},$$

где $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, коэффициенты $a_{ij}(x, t): \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$ – ограниченные измеримые функции такие, что $a_{ij}(x, t) \equiv a_{ji}(x, t)$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, и выполняются условия

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (1)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$.

Будем изучать решение задачи

$$\mathcal{L}u(x, t) = f(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T), \quad (2)$$

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma(Q) = S(Q) \cup \Upsilon_0(\Omega), \quad (3)$$

где $\varphi(x, t) \in W_2^{1,1}(Q)$, а функция $f(x, t, u): \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ предполагается измеримой и такой, что композиция $f(x, t, u(x, t))$ является измеримой локально ограниченной функцией переменных (x, t) при любой функции $u(x, t) \in W_2^{1,1}(Q) \cap C(Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(x, t) \in W_{2, \text{loc}}^{1,1}(Q) \cap C(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (2), (3), если для любой функции $\psi(x, t) \in \dot{W}_2^{1,0}(Q)$ она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij}(x, t) u_{x_j} \psi_{x_i} dx dt + \int_Q u_t(x, t) \psi(x, t) dx dt + \int_Q f(x, t, u) \psi(x, t) dx dt = 0 \quad (4)$$

и при любой функции $\chi(x, t) \in C^\infty(Q)$, равной нулю в окрестности $\Upsilon_T(\Omega)$, выполнено включение $\chi(x, t)(u(x, t) - \varphi(x, t)) \in \dot{W}_2^{1,1}(Q)$.

Вопросы разрешимости, а также единственности решения задачи (2), (3), изучены в [12, гл. V, § 6].

1. Пусть в области Q лежат m цилиндров вида $Q(y_{k,\varepsilon}, t_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon, T_\varepsilon)$ с центрами в точках $y_{k,\varepsilon}$ одинакового радиуса R_ε и высотами T_ε , $\varepsilon = m^{-1}$ – малый параметр, m – натуральное число; $k = 1, \dots, m$. Отметим, что R_ε и T_ε связаны соотношением $T_\varepsilon = (R_\varepsilon)^2$, т.е. $Q(y_{k,\varepsilon}, t_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon, R_\varepsilon^2)$ – шары в параболической метрике радиусов R_ε с центрами в точках $(y_{k,\varepsilon}, t_{k,\varepsilon} + R_\varepsilon/2)$. Будем так же предполагать, что расстояние между центрами этих шаров не меньше, чем $4R_\varepsilon$.

Положим $Q_\varepsilon = Q \setminus Q(R_\varepsilon, T_\varepsilon)$, где $Q(R_\varepsilon, T_\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^m Q(y_{k,\varepsilon}, t_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon, T_\varepsilon)$.

Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ – решение задачи

$$\mathcal{L}u_\varepsilon(x, t) = a(x, t)|u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x, t), \quad (x, t) \in Q_\varepsilon, \quad (5)$$

$$u_\varepsilon(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S(Q), \quad (6)$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

где $a(x, t)$ – ограниченная измеримая функция, $a(x, t) \geq a_0 = \text{const} > 0$, $\varphi(x) \in W_2^{1,1}(Q_\varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u_\varepsilon(x, t) \in W_{2, \text{loc}}^{1,1}(Q_\varepsilon) \cap C(Q_\varepsilon)$ называется *обобщенным решением задачи* (5)–(7), если для любой функции $\psi(x, t) \in \dot{W}_2^{1,0}(Q_\varepsilon)$ она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{Q_\varepsilon} a_{ij}(x, t) u_{x_j} \psi_{x_i} dx dt + \int_{Q_\varepsilon} u_t(x, t) \psi(x, t) dx dt \\ + \int_{Q_\varepsilon} a(x, t) |u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1} u_\varepsilon(x, t) \psi(x, t) dx dt = 0, \end{aligned}$$

принимает значение $u_0(x)$ при $t = 0$ и при любой функции $\chi(x, t) \in C^\infty(Q)$, равной нулю в окрестностях $Q(R_\varepsilon, T_\varepsilon)$ и $\Upsilon_T(\Omega)$, выполнено включение $\chi(x, t)(u_\varepsilon(x, t) - \varphi(x, t)) \in \dot{W}_2^{1,1}(Q_\varepsilon)$.

Для задачи (5)–(7) не выполняются, вообще говоря, теоремы единственности, так как на границах дырок перфорированной области Q_ε не заданы никакие граничные условия. Мы покажем, что при некоторых условиях предел решений задачи (5)–(7) будет существовать, причем этот предел не зависит от выбора последовательности $u_\varepsilon(x, t)$; здесь $u_\varepsilon(x, t)$ – любое решение задачи (5)–(7).

Пусть $u(x, t)$ – решение следующей задачи:

$$\mathcal{L}u(x, t) = a(x, t)|u(x, t)|^{\sigma-1}u(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (8)$$

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S(Q), \quad (9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma > (n+2)/n$ и

$$R_\varepsilon = \varepsilon^\alpha, \quad T_\varepsilon = \varepsilon^{2\alpha}, \quad \text{где } \alpha > \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)n-2}. \quad (11)$$

Тогда решение задачи (5)–(7) стремится к решению задачи (8)–(10) в следующем смысле: для любого положительного постоянного d

$$\sup_{(x,t) \in Q_{\varepsilon,d}} |u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (12)$$

где

$$Q_{\varepsilon,d} = \{(x, t) \in Q_\varepsilon : \text{dist}[(x, t), \partial Q(R_\varepsilon, T_\varepsilon)] > 2d \text{ и } |t - t_{k,\varepsilon}| > d; k = 1, \dots, m\}.$$

Отметим, что при этом общий объем дырок $\text{Vol}[Q(R_\varepsilon, T_\varepsilon)]$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если в перфорированной области Q_ε существует множество, отделенное от всех дырок фиксированной постоянной, то на этом множестве сходимость будет равномерной.

ЛЕММА 1. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 1$ имеет место неравенство

$$||a|^{\sigma-1}a - |b|^{\sigma-1}b| \geq C_\sigma |a - b|^\sigma = C_\sigma |a - b|^{\sigma-1} |a - b|,$$

где C_σ – некоторая положительная постоянная, зависящая от σ , но не зависящая от a и b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для разности $w_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)$ имеем

$$\mathcal{L}w_\varepsilon(x, t) - a(x, t)(|u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x, t) - |u(x, t)|^{\sigma-1}u(x, t)) = 0.$$

Умножим это равенство на $\text{sgn } w_\varepsilon(x, t)$ и применим лемму 1; тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \text{sgn } w_\varepsilon(x, t) \mathcal{L}w_\varepsilon(x, t) - a(x, t) ||u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x, t) - |u(x, t)|^{\sigma-1}u(x, t)| \\ &\leq \text{sgn } w_\varepsilon(x, t) \mathcal{L}w_\varepsilon(x, t) - C_\sigma a_0 |u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^\sigma \\ &= \text{sgn } w_\varepsilon(x, t) \mathcal{L}w_\varepsilon(x, t) - C_\sigma a_0 |w_\varepsilon(x, t)|^\sigma, \quad (x, t) \in Q_\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $w_\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\text{sgn } w_\varepsilon(x, t) \mathcal{L}w_\varepsilon(x, t) - b_0 |w_\varepsilon(x, t)|^\sigma \geq 0, \quad (x, t) \in Q_\varepsilon, \quad (13)$$

с граничным условием

$$w_\varepsilon(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S(Q) = \partial\Omega \times [0, T], \quad (14)$$

и с нулевым начальным условием

$$w_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (15)$$

здесь $b_0 = C_\sigma a_0$.

Согласно теореме 8.2 работы [11] для решений полулинейных параболических уравнений вида (8) имеет место оценка

$$|w_\varepsilon(x, t)| \leq C(\min(R^2, T))^{1/(1-\sigma)}, \quad (16)$$

где R, T – соответственно радиус и высота цилиндра, в котором определено решение $u(x, t)$ уравнения (8). Аналогично работе [10] эту оценку можно получить и для решений неравенств вида (13). Буквой C , здесь и далее, будем обозначать любую положительную постоянную, не зависящую от x, t и ε .

Предположим, что $u_\varepsilon(x, t)$ не стремится к $u(x, t)$ в смысле (12) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда найдется положительная постоянная C_0 такая, что для любого $\varepsilon_0 = m_0^{-1}$ существуют $\varepsilon = m^{-1} < \varepsilon_0$ и $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in Q_{\varepsilon, d}$ такие, что $|w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)| > C_0$, т.е. $w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) > C_0$ либо $w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) < -C_0$. Будем считать, что первый случай реализуется при различных ε бесконечно много раз (для второго случая $w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) < -C_0$ рассмотрение аналогично).

Обозначим через $\Gamma(x, t, x_0, t_0)$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, имеющее особенность в точке (x_0, t_0) , т.е. $\mathcal{L}\Gamma(x, t) = \delta(x_0, t_0)$. Известно [13] (см. также [14]), что такое фундаментальное решение существует и удовлетворяет неравенствам

$$C_1 \frac{\exp(-C_3|x - x_0|^2/(t - t_0))}{(t - t_0)^{n/2}} \leq \Gamma(x, t, x_0, t_0) \leq C_1 \frac{\exp(-C_4|x - x_0|^2/(t - t_0))}{(t - t_0)^{n/2}}, \quad (17)$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 зависят от λ из условия (1).

Положим

$$g_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \Gamma(x, t, y_{k, \varepsilon}, t_{k, \varepsilon} - T_\varepsilon). \quad (18)$$

Рассмотрим функцию

$$v_\varepsilon(x, t) = w_\varepsilon(x, t) - h_\varepsilon(x, t), \quad (19)$$

где $h_\varepsilon(x, t) = (C_0/2)(g_\varepsilon(x, t)/g_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon))$. Тогда выполняется $v_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) = C_0/2 > 0$.

Покажем, используя принцип максимума, что это невозможно.

Используя предположение, что параболическое расстояние между точками $(y_{k, \varepsilon}, t_{k, \varepsilon})$ при малых ε больше, чем $4R_\varepsilon$, согласно (16) на границах цилиндров $Q(y_{k, \varepsilon}, t_{k, \varepsilon}, 2R_\varepsilon, 4T_\varepsilon)$, коаксиальных с $Q(y_{k, \varepsilon}, t_{k, \varepsilon}, R_\varepsilon, T_\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$|w_\varepsilon(x, t)| < CR_\varepsilon^{2/(1-\sigma)}. \quad (20)$$

Из нижней оценки (17) заключаем, что на границах цилиндров $Q(y_{k,\varepsilon}, t_{k,\varepsilon}, 2R_\varepsilon, 4T_\varepsilon)$ имеют место неравенства

$$g_\varepsilon(x, t) > \varepsilon C_1 \frac{\exp(-4C_3|R_\varepsilon|^2/(t - t_{k,\varepsilon} + T_\varepsilon))}{(t - t_{k,\varepsilon} + T_\varepsilon)^{n/2}} > \varepsilon C_1 \frac{\exp(-8C_3|R_\varepsilon|^2/T_\varepsilon)}{(5T_\varepsilon)^{n/2}}. \quad (21)$$

Потребуем выполнения соотношения

$$R_\varepsilon^{2/(1-\sigma)} = o\left(\varepsilon C_1 \frac{\exp(-8C_3|R_\varepsilon|^2/T_\varepsilon)}{(T_\varepsilon/2)^{n/2}}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (22)$$

Так как показатель экспоненты в силу условия теоремы ограничен, это соотношение равносильно $R_\varepsilon^{2/(1-\sigma)} = o(\varepsilon T_\varepsilon^{-n/2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. когда $1 - \alpha n < 2\alpha/(1 - \sigma)$. Таким образом, получаем, что при $\sigma > (n + 2)/n$ для выполнения (22) необходимо, чтобы $\alpha > (\sigma - 1)/((\sigma - 1)n - 2)$.

Так как точка $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in Q_{\varepsilon,d}$, то $g_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) < c/d^{n/2}$. Поэтому в силу (22) на границах цилиндров $Q(y_{k,\varepsilon}, t_{k,\varepsilon}, 2R_\varepsilon, 4T_\varepsilon)$ будет выполнено неравенство $w_\varepsilon(x, t) < g_\varepsilon(x, t)$, т.е. выполнено $v_\varepsilon(x, t) < 0$.

Для того, чтобы исключить из области точки особенностей фундаментальных решений, дополним цилиндры радиусов $2R_\varepsilon$ внутренностями параболоидов

$$t - t_{k,\varepsilon} + T_\varepsilon = \frac{1}{4}(|x - y_{k,\varepsilon}|)^2.$$

На границах параболоидов показатель экспоненты постоянен и, следовательно,

$$g(x, t) > \varepsilon \frac{k}{(t - t_{k,\varepsilon} + T_\varepsilon)^{n/2}} > \varepsilon \frac{4k}{(R_\varepsilon)^n} = \varepsilon \frac{4k}{(T_\varepsilon)^{n/2}}.$$

Поэтому на границах параболоидов также выполнено $v_\varepsilon(x, t) < 0$.

При $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$ согласно (14) и (18) имеем $w_\varepsilon(x, t) = 0$, $g_\varepsilon(x, t) \geq 0$ и поэтому $v_\varepsilon(x, t) \leq 0$ при $(x, t) \in S(Q)$. При $t = 0$: $w_\varepsilon(x, t) = g_\varepsilon(x, t) = 0$, имеем $v_\varepsilon(x, t) \leq 0$.

Кроме того, из оценок (16), (17) с учетом определения (18) следует, что $w_\varepsilon(x, t) \rightarrow 0$ и $g_\varepsilon(x, t) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Таким образом, из принципа максимума заключаем, что $v_\varepsilon(x, t) \leq 0$ на параболической границе $\Gamma(Q)$.

Определим множество $D \equiv \{(x, t) \in Q_\varepsilon : v_\varepsilon(x, t) > 0\} \neq \emptyset$. Обозначим D_0 компоненту связности множества D , содержащую точку $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$.

Покажем, что $\mathcal{L}v_\varepsilon(x, t) > 0$ при $(x, t) \in D$. Действительно, по определению множества D

$$u_\varepsilon(x, t) - u(x, t) = w_\varepsilon(x, t) > h_\varepsilon(x, t) > 0,$$

т.е. $u_\varepsilon(x, t) > u(x, t)$ при $(x, t) \in D$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v_\varepsilon(x, t) &= \mathcal{L}(u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)) - \mathcal{L}h_\varepsilon(x, t) \\ &= a(x, t)[|u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x, t) - |u(x, t)|^{\sigma-1}u(x, t)] > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку $v_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) > 0$ согласно (19), $v_\varepsilon(x, t) < 0$ при $x \in \partial(Q(R_\varepsilon, T_\varepsilon))$, $v_\varepsilon(x, 0) < 0$ и $v_\varepsilon(x, t) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то функция $v_\varepsilon(x, t)$ достигает локального максимума во

внутренней точке области D_0 , что с учетом (23) противоречит принципу максимума для функции $v_\varepsilon(x, t)$.

Следовательно, наше предположение неверно, т.е. $u_\varepsilon(x, t)$ стремится к $u(x, t)$ в смысле (12) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана.

Для объема шара радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\text{Vol}[B(0, R)] = \mu_n R^n,$$

где постоянная μ_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ – зависит только от n . Оценим общий объем дырок:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{k=1}^m Q(y_{k,\varepsilon}, t_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon, T) \right| &\leq m \text{Vol}[Q(0, 0, R_\varepsilon, T)] \\ &= T_\varepsilon \mu_n m R_\varepsilon^n \sim \varepsilon^{-1+(2+n)\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

если только $\alpha > 1/(n+2)$.

Отметим, что не сложно модернизировать доказательство теоремы 1 для случая, когда $R_\varepsilon \sim \varepsilon^\alpha$ и $T_\varepsilon \sim \varepsilon^{2\alpha}$.

Пусть коэффициенты оператора не зависят от t и $n > 2$. Из оценки (16), так как $w(x, t)$ обращается в нуль при $t = 0$, можно исключить зависимость от T . Действительно, $w(x, t)$ всегда можно считать решением в достаточно высоком цилиндре фиксированного радиуса, если доопределить $w(x, t)$ нулем при $t < 0$. Рассматривая фундаментальные решения эллиптического оператора, можно доказать следующую теорему для перфорированных областей, из которых вместо шаров выкидываются цилиндры.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $n > 2$, $\sigma > n/(n-2)$ и

$$R_\varepsilon \sim \varepsilon^\alpha \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{где } \alpha > \frac{\sigma - 1}{(n-2)\sigma - n}.$$

Тогда решение задачи (5)–(7) стремится к решению задачи (8)–(10) в следующем смысле: для любого положительного постоянного d

$$\sup_{x \in \Omega_{\varepsilon,d}, t \in [0,T]} |u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где

$$\Omega_{\varepsilon,d} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial B(y_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon)) > d; k = 1, \dots, m\}.$$

Доказательство проводится так же, как в работах [8], [9] для эллиптических операторов.

2. Пусть теперь в области Q лежат m цилиндров вида $Q(y_{k,\varepsilon}, 0, R_\varepsilon, T)$ с центрами в точках $y_{k,\varepsilon}$ одинакового радиуса R_ε и высотами T , $\varepsilon = m^{-1}$ – малый параметр, m – натуральное число; $k = 1, \dots, m$. Будем предполагать, что расстояние между центрами этих шаров не менее, чем $8R_\varepsilon$.

Пусть $Q_\varepsilon = Q \setminus Q(R_\varepsilon, T)$, $Q(R_\varepsilon, T) = \bigcup_{k=1}^m Q(y_{k,\varepsilon}, 0, R_\varepsilon, T)$.

ЛЕММА 2 (обобщенное неравенство Юнга). Пусть $a, b, \beta > 0$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$ab \leq \frac{\alpha}{\beta} a^{1/\alpha} + \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha/(1-\alpha)} b^{1/(1-\alpha)}.$$

В частности, при $\alpha = 1/2$ имеем $2ab \leq a^2/\beta + \beta b^2$.

Положим $Q(4R_\varepsilon, T) = \bigcup_{k=1}^m Q(y_{k,\varepsilon}, 0, 4R_\varepsilon, T)$.

ТЕОРЕМА 2. При любом $\sigma > 1$ и $R_\varepsilon = O(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\gamma > 1/(n-2)$, выполнено

$$\int_{Q \setminus Q(4R_\varepsilon, T)} \frac{|\nabla(u_\varepsilon(x, t) - u(x, t))|^2 + |u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^{\sigma+1}}{1 + |u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2} dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\theta_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega)$ такую, что $0 \leq \theta_\varepsilon(x) \leq 1$, $x \in \Omega$,

$$\theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,\varepsilon}, 4R_\varepsilon), \\ 0, & x \in \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,\varepsilon}, 2R_\varepsilon), \end{cases}$$

$|\nabla \theta_\varepsilon(x)| < C_\Omega/R_\varepsilon$, $x \in \Omega$; здесь C_Ω зависит от области Ω и не зависит от ε .

Рассмотрим функцию

$$\psi(x, t) = \theta_\varepsilon^p(x) \eta(u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)), \quad (24)$$

где

$$\eta(\tau) = \begin{cases} \tau, & |\tau| \leq 1, \\ |\tau|^{q-1}\tau, & |\tau| > 1, \end{cases}$$

$q > -1$ такое, что $\sigma > (n+2q)/(n-2)$ (отметим, что такое q можно подобрать при любом $\sigma > 1$); $p = p(q) > 2$ — решение уравнения $p = (p-2)(\sigma+q)/(1+q)$, т.е.

$$p = 2 \frac{\sigma+q}{\sigma-1}; \quad (25)$$

требуемое неравенство $p > 2$ выполнено при требуемом условии на $q > -1$.

Отметим также, что функцию $\psi(x, t)$ можно подставлять в интегральное тождество из определения обобщенного решения, так как она принадлежит классу $W_2^{1,0}(Q_\varepsilon)$ в силу правила цепного дифференцирования [15] и обращается в нуль на границе ∂Q_ε , на границе ∂Q за счет того, что разность $u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)$ обращается в нуль на ∂Q , а на границе дырок за счет множителя $\theta_\varepsilon^p(x)$. Отметим также, что поскольку на всех дырках этот множитель равен нулю, в интегральном тождестве мы можем в качестве области интегрирования писать Q .

Как и в доказательстве теоремы 1, обозначим $w_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)$. Для уравнения

$$Lw_\varepsilon(x, t) - \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial t} = a(x, t)(|u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x, t) - |u(x, t)|^{\sigma-1}u(x, t))$$

запишем интегральное тождество, взяв в качестве пробной функции $\psi(x, t)$ из (24); получим

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial t} \right) \psi(x, t) dx dt \\ &= \int_Q a(x, t) (|u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1} u_\varepsilon(x, t) - |u(x, t)|^{\sigma-1} u(x, t)) \psi(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначим

$$Q_1 = \{(x, t) \in Q : |u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)| \leq 1\} \subset Q$$

и

$$Q_2 = \{(x, t) \in Q : |u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)| > 1\} \subset Q.$$

Оценим правую часть равенства (26), используя лемму 1 при $a = u_\varepsilon(x, t)$, $b = u(x, t)$:

$$\begin{aligned} & \int_Q a(x, t) (|u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1} u_\varepsilon(x, t) - |u(x, t)|^{\sigma-1} u(x, t)) \psi(x, t) dx dt \\ &= \int_{Q_1} a(x, t) (|u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1} u_\varepsilon(x, t) - |u(x, t)|^{\sigma-1} u(x, t)) w_\varepsilon(x, t) \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &+ \int_{Q_2} a(x, t) (|u_\varepsilon(x, t)|^{\sigma-1} u_\varepsilon(x, t) - |u(x, t)|^{\sigma-1} u(x, t)) |w_\varepsilon(x, t)|^{q-1} w_\varepsilon(x, t) \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &\geq a_0 C_\sigma \int_{Q_1} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+1} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt + a_0 C_\sigma \int_{Q_2} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt. \end{aligned} \quad (27)$$

После тождественных преобразований и интегрирования по частям в левой части равенства (26) получим

$$\begin{aligned} & J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \\ &\equiv - \int_{Q_1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial x_j} \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial x_i} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &- \int_{Q_1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial x_j} w_\varepsilon(x, t) p \theta_\varepsilon^{p-1}(x) \frac{\partial \theta_\varepsilon(x)}{\partial x_i} dx dt \\ &- \int_{Q_2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial x_j} q |w_\varepsilon(x, t)|^{q-1} \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial x_i} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &- \int_{Q_2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial x_j} |w_\varepsilon(x, t)|^{q-1} w_\varepsilon(x, t) p \theta_\varepsilon^{p-1}(x) \frac{\partial \theta_\varepsilon(x)}{\partial x_i} dx dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Оценим первое и третье слагаемые правой части тождества (28), учитывая (1):

$$J_1 \leq -\frac{1}{\lambda} \int_{Q_1} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx dt, \quad (29)$$

$$J_3 \leq -\frac{q}{\lambda} \int_{Q_2} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 |w_\varepsilon(x, t)|^{q-1} \theta_\varepsilon^p(x) dx. \quad (30)$$

Для оценки второго и четвертого слагаемых правой части тождества (28) используется неравенство Юнга при $\alpha = 1/2$, $a = |\nabla w_\varepsilon(x, t)|$, $b = |\nabla \theta_\varepsilon(x)|$. Выбирая $\beta = p\lambda^2/\theta_\varepsilon(x)$ и $\beta = p\lambda^2|w_\varepsilon(x, t)|/(q\theta_\varepsilon(x))$ при каждом (x, t) , соответственно получаем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq p\lambda \int_{Q_1} |\nabla w_\varepsilon(x, t)| |\nabla \theta_\varepsilon(x)| \theta_\varepsilon^{p-1}(x) dx dt \\ &\leq p\lambda \int_{Q_1} \theta_\varepsilon^{p-1}(x) \left(\frac{\theta_\varepsilon(x)}{2p\lambda^2} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 + \frac{p\lambda^2}{2\theta_\varepsilon(x)} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \right) dx dt \\ &= \frac{1}{2\lambda} \int_{Q_1} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx dt + C_4 \int_{Q_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx dt, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} J_4 &\leq p\lambda \int_{Q_2} |\nabla w_\varepsilon(x, t)| |\nabla \theta_\varepsilon(x)| |w_\varepsilon(x, t)|^q \theta_\varepsilon^{p-1}(x) dx dt \\ &\leq p\lambda \int_{Q_2} \theta_\varepsilon^{p-1}(x) |w_\varepsilon(x, t)|^q \\ &\quad \times \left(\frac{q\theta_\varepsilon(x)}{2p\lambda^2|w_\varepsilon(x, t)|} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 + \frac{p\lambda^2|w_\varepsilon(x, t)|}{2q\theta_\varepsilon(x)} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \right) dx dt \\ &= \frac{q}{2\lambda} \int_{Q_2} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 |w_\varepsilon(x, t)|^{q-1} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &\quad + C_5 \int_{Q_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x, t)|^{q+1} \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx dt, \end{aligned} \quad (32)$$

где $C_4 = p^2\lambda^3/2$, $C_5 = p^2\lambda^3/(2q)$.

Теперь оценим второе слагаемое правой части неравенства (32), полагая в неравенстве Юнга $a = |w_\varepsilon(x, t)|^{q+1}\theta_\varepsilon^{p-2}(x)$, $b = |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2$ при $\alpha = (1+q)/(\sigma+q)$ и выбрав $\beta = 2C_5\alpha/(a_0C_\sigma)$; с учетом (25) получаем

$$\begin{aligned} C_5 \int_{Q_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x, t)|^{q+1} \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx dt \\ \leq \frac{a_0C_\sigma}{2} \int_{Q_2} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt + C_6 \int_{Q_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^p dx dt, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} C_6 &= C_5 \frac{\sigma-1}{\sigma+q} \left(\frac{2C_5}{a_0C_\sigma} \frac{1+q}{\sigma+q} \right)^{(q+1)/(\sigma-1)} \\ &= \frac{\sigma-1}{\sigma+q} \left(\frac{2(1+q)}{a_0C_\sigma(\sigma+q)} \right)^{(q+1)/(\sigma-1)} C_5^{(\sigma+q)/(\sigma-1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь член, содержащий производные по t . Для этого заметим, что функция $\eta(\tau)$, входящая в определение $\psi(x, t)$, обладает первообразной

$$\eta_1(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tau^2, & |\tau| \leq 1, \\ \frac{1}{q+1}|\tau|^{q+1}, & |\tau| > 1. \end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{q+1} |\tau|^{q+1} \right)_\tau &= \frac{1}{2} \frac{2}{q+1} (|\tau|^{2((q+1)/2)})_\tau = \frac{1}{2} (|\tau|^2)_\tau \cdot (|\tau|^2)^{(q-1)/2} \\ &= \frac{1}{2} \tau \cdot (|\tau|^2)^{(q-1)/2} = \eta(\tau). \end{aligned}$$

Поэтому член, содержащий производные по t , мы можем записать так:

$$\begin{aligned} - \int_Q \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial t} \psi(x, t) dx dt &= - \int_Q \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial t} \eta(w_\varepsilon(x, t)) \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &= - \int_Q \frac{\partial}{\partial t} (\eta_1(w_\varepsilon(x, t)) \theta_\varepsilon^p(x)) dx dt \\ &= - \int_\Omega (\eta_1(w_\varepsilon(x, t)) \theta_\varepsilon^p(x)) \Big|_0^T dx \leq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Последнее выполняется, поскольку $\eta_1(x, t) \theta_\varepsilon^p(x)$ положительно и обращается в нуль при $t = 0$.

Учитывая равенства (26), (28) и оценки (29)–(34), имеем

$$\begin{aligned} &\int_Q \left(Lw_\varepsilon(x, t) \psi(x, t) - \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial t} \psi(x, t) \right) dx dt \\ &\leq \int_Q Lw_\varepsilon(x, t) \psi(x, t) dx dt \\ &\leq -\frac{1}{2\lambda} \int_{Q_1} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx dt - \frac{q}{2\lambda} \int_{Q_2} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 |w_\varepsilon(x, t)|^{q-1} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &\quad + C_4 \int_{Q_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx dt + \frac{a_0 C_\sigma}{2} \int_{Q_2} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &\quad + C_6 \int_{Q_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^p dx dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Объединяя (26), (27) и (35), получаем

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\lambda} \int_{Q_1} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx dt - \frac{q}{2\lambda} \int_{Q_2} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 |w_\varepsilon(x, t)|^{q-1} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &\quad + C_4 \int_{Q_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx dt + \frac{a_0 C_\sigma}{2} \int_{Q_2} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\ &\quad + C_6 \int_{Q_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx dt \\ &\geq a_0 C_\sigma \int_{Q_1} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+1} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt + a_0 C_\sigma \int_{Q_2} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned}
& C_4 \int_{Q_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx dt + C_6 \int_{Q_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^p dx dt \\
& \geq a_0 C_\sigma \int_{Q_1} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+1} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt + \frac{1}{2\lambda} \int_{Q_2} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\
& \quad + \frac{a_0 C_\sigma}{2} \int_{Q_2} |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt + \frac{q}{2\lambda} \int_{Q_2} |\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 |w_\varepsilon(x, t)|^{q-1} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\
& \geq C_7 \int_Q \frac{|w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+1}}{1 + |w_\varepsilon(x, t)|^2} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt + C_8 \int_Q \frac{|\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2}{1 + |w_\varepsilon(x, t)|^2} \theta_\varepsilon^p(x) dx dt \\
& \geq C_9 \int_{Q \setminus Q(4R_\varepsilon, T)} \frac{|\nabla w_\varepsilon(x, t)|^2 + |w_\varepsilon(x, t)|^{\sigma+1}}{1 + |w_\varepsilon(x, t)|^2} dx dt, \tag{36}
\end{aligned}$$

где $C_7 = a_0 C_\sigma / 2$, $C_8 = \min\{1/(2\lambda), q/(2\lambda)\}$, $C_9 = \min\{C_7, C_8\}$.

К предпоследнему неравенству мы пришли из следующих соображений: если число $0 \leq a \leq 1$, то выполнено неравенство $1 \geq 1/(1+a^2)$; если же $a > 1$, то выполнено $a^{q-1} > 1/a^2 > 1/(1+a^2)$ при $q > -1$.

Теперь докажем, что

$$\int_{Q_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \tag{37}$$

и

$$\int_{Q_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^p dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \tag{38}$$

Действительно, так как $p > 2$, то

$$\begin{aligned}
\int_{Q_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx dt & \leq \int_Q |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 dx dt \\
& \leq C_{10} m R_\varepsilon^n \left(\frac{1}{R_\varepsilon} \right)^2 = O(\varepsilon^{-1+(n-2)\gamma}) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, если только $\gamma > 1/(n-2)$; где $C_{10} = T C_\Omega^2 \mu_n 2^n$. Имеем

$$\begin{aligned}
\int_{Q_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^p dx dt & \leq \int_Q |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^p dx dt \leq C_{11} m R_\varepsilon^n \left(\frac{1}{R_\varepsilon} \right)^p \\
& = C_{11} \varepsilon^{-1} R_\varepsilon^{n-p} = O(\varepsilon^{-1+(n-p)\gamma}) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как $\gamma > 1/(n-p) > 1/(n-2)$; здесь $C_{11} = T C_\Omega^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} \mu_n 2^n$, μ_n — объем единичного n -мерного шара.

Из (36)–(38) следует справедливость теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [2] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
- [3] Марченко В. А., Хруслев Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
- [4] Brézis H., Friedman A. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions // J. Math. Pures Appl. (9). 1983. V. 62. № 1. P. 73–97.
- [5] Brézis H., Peletier L. A., Terman D. A very singular solution of the heat equation with absorption // Arch. Rat. Mech. Anal. 1986. V. 95. № 3. P. 185–209.
- [6] Kamin S., Peletier L. A. Singular solutions of the heat equation with absorption // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 95. № 2. P. 205–210.
- [7] Ильин А. М., Олейник О. А., Калашников А. С. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.
- [8] Матевосян О. А., Пикулин С. В. Об усреднении слабонелинейных дивергентных эллиптических операторов в перфорированном кубе // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 3. С. 390–398.
- [9] Матевосян О. А., Пикулин С. В. Об усреднении полулинейных эллиптических операторов в перфорированных областях // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 101–114.
- [10] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135. № 3. С. 346–360.
- [11] Чистяков В. В. О свойствах решений полулинейных параболических уравнений второго порядка // Труды семинара И. Г. Петровского. 1991. Т. 15. С. 70–107.
- [12] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [13] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 931–954; Нэш Дж. О непрерывности решений параболических и эллиптических уравнений // Математика. 1960. Т. 4. № 1. С. 31–52.
- [14] Aronson D. G. Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 890–896.
- [15] Гильбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: matevossian@cswebmail.com, filimi@yandex.ru

Поступило
09.06.2003