Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ф. Насрутдинов, Полулокальные групповые алгебры,
Матем. заметки, 2005, том 78, выпуск 3, 409–412

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 05:09:15

УДК 512.552.7

ПОЛУЛОКАЛЬНЫЕ ГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ

М. Ф. Насрутдинов

Пусть $k[G]$ – полулокальная групповая алгебра. Показано, что если k – алгебраически замкнутое поле, то всякий конечно порожденный плоский $k[G]$ -модуль проективен.

Библиография: 14 названий.

Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и правые унитарные модули над ними. Мы будем придерживаться обозначений и терминологии двухтомника Фейса [1] для теории колец и модулей, а также обзора [2] и книги [3] для теории групповых колец.

Пусть R – кольцо. Будем обозначать через $J(R)$ радикал Джекобсона кольца R . Кольцо R называется *полулокальным* (*локальным*, *квазилокальным*), если его факторкольцо $R/J(R)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей правых идеалов (является телом, простым артиновым кольцом, соответственно). В классической работе Басса [2] (см. также [1, т. 2]) было показано, что всякий плоский правый R -модуль проективен тогда и только тогда, когда R – полулокальное кольцо и его радикал Джекобсона T -нильпотентен слева, т.е. для всякой последовательности элементов $a_1, \dots, a_n, \dots$ из $J(R)$ существует k такое, что $a_k a_{k-1} \cdots a_1 = 0$. Такие кольца называются *совершенными* (справа). Естественно поставить вопрос о строении колец над которыми проективны все конечно порожденные плоские модули. К классу таких колец принадлежат полусовершенные кольца, квазилокальные кольца [5] и кольца, вложимые в тела [6]. Проективности конечно порожденных плоских модулей посвящены, в частности, работы [5]–[9].

В работе [10] (см. также [2]) показано, что групповая алгебра $k[G]$ группы G над полем k совершенное кольцо тогда и только тогда, когда G – конечная группа.

Мы рассматриваем вопрос при каких условиях проективен всякий конечно порожденный плоский модуль над полулокальными групповыми алгебрами.

Известно (см., например, [11]), что в случае поля нулевой характеристики групповая алгебра $k[G]$ полулокальна тогда и только тогда, когда группа G конечна. Для полей ненулевой характеристики вопрос о строении группы остается открытым. Так, например, полулокальна групповая алгебра $k[G]$ над полем характеристики p , где G – бесконечная конечно порожденная периодическая p -группа, построенная Е. С. Голодом, на основе теоремы Голода–Шафаревича.

Строение полулокальных групповых алгебр до конца не изучено. В работе [10] было показано, что если $R[G]$ – полулокальное групповое кольцо группы G над кольцом R , то

группа G периодическая (см. также [12], где теорема доказана для полугрупповых колец). При переходе к подкольцам полулокальность, вообще говоря, не сохраняется. Для этого достаточно рассмотреть поле рациональных чисел и кольцо целых чисел. Однако в работе [13] Окнинский доказал, что если $R[G]$ – полулокальное групповое кольцо группы G над кольцом R , то для любой подгруппы H группы G групповое кольцо $R[H]$ полулокально.

Если H – подгруппа группы G , то через $\omega(H)k[G]$ обозначают правый идеал $\sum_{h \in H} (1 - h)k[G]$ группового кольца $k[G]$. Если H – нормальная подгруппа, то $\omega(H)k[G]$ является ядром кольцевого гомоморфизма $k[G] \rightarrow k[G/H]$.

В выше приведенном примере с группой Голода фундаментальный идеал $\omega(G)k[G]$ совпадает с радикалом Джекобсона. То есть эта групповая алгебра является локальным кольцом.

Нами показано, что в случае алгебраически замкнутых полей полулокальная групповая алгебра $k[G]$ “локально” устроена подобным образом, т.е. в любой конечно порожденной подгруппе G_1 группы G существует подгруппа H конечного индекса такая, что $\omega(H)k[G_1]$ содержится в радикале Джекобсона кольца $k[G_1]$.

Как следствие получено, что в случае алгебраически замкнутых полей всякий конечно порожденный плоский модуль над полулокальной групповой алгеброй проективен.

Перейдем теперь к изложению результатов статьи.

Пусть $k[G]$ – групповая алгебра. Рассмотрим группу (относительно умножения) $\tilde{G} = \{g + J(k[G]) \mid g \in G\}$ и гомоморфизм групп $\theta: G \rightarrow \tilde{G}$. Ясно, что θ – эпиморфизм. Обозначим через $H = \text{Ker}(\theta)$ нормальную подгруппу группы G . Элемент $g \in H$ тогда и только тогда, когда $1 - g \in J(k[G])$. Заметим, что $\omega(H)k[G] \subseteq J(k[G])$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k[G]$ – полулокальная групповая алгебра группы G над полем k .

1. Если характеристика поля k равна p , то H является p -группой.
2. В случае поля нулевой характеристики группы G и $\tilde{G}$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in H$; тогда $1 - g \in J(k[G])$. Для любой подгруппы $H < G$ имеет место включение $k[H] \cap J(k[G]) \subseteq J(k[H])$ [2, лемма 6.3]. Поэтому, $1 - g \in J(k[\langle g \rangle])$, где $\langle g \rangle$ – циклическая подгруппа, порожденная g . Так как радикал Джекобсона групповой алгебры $k[\langle g \rangle]$ нильпотентен, то фундаментальный идеал $\omega(k[\langle g \rangle]) = J(k[\langle g \rangle])$ нильпотентен и поэтому [3, теорема 2.8] порядок элемента g есть некоторая степень p , где $p = \text{char } k$. В случае $\text{char } k = 0$ $k[\langle g \rangle]$ – полупростая алгебра и $J(k[\langle g \rangle]) = 0$. Доказательство окончено.

Пусть теперь $R = k[G]$ – групповая алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики p и G – конечно порожденная группа. Рассмотрим кольцо $k[G/H] \cong k[G]/\omega(H)k[G]$. Как эпиморфный образ полулокального кольца оно полулокально и $\omega(H)k[G] \subseteq J(k[G])$. Если $1 - gH \in J(k[G/H]) = J(k[G])/\omega(H)k[G]$, то $1 - g \in J(k[G])$. Значит, для группы G/H и групповой алгебры $k[G/H]$ отображение θ изоморфизм.

Отображение θ вкладывает G/H в линейную группу (в произведение линейных групп). По теореме Шура (см., например, [14, теорема 52.1.3]) о локальной конечности периодической линейной группы получим конечность группы G/H . Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если $k[G]$ – полулокальная групповая алгебра конечно порожденной группы G над алгебраически замкнутым полем k характеристики p , то в группе G существует нормальная p -подгруппа H конечного индекса такая, что $\omega(H)k[G] \subseteq J(k[G])$.

Следуя работе [7], кольцо R будем называть (правым) FGFP-кольцом, если проективен любой конечно порожденный плоский R -модуль. Свойство кольца быть FGFP-кольцом наследуется подкольцами. При некоторых предположениях можно поднять свойство быть FGFP-кольцом с подкольца на все кольцо. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [7, предложение 1.2]. Пусть S и R – кольца и $\varphi: S \rightarrow R$ кольцевой гомоморфизм, сохраняющий единицу и кольцо R , рассматриваемое как правый S -модуль, является конечно порожденным плоским S -модулем. Тогда если S является FGFP-кольцом, то и R является FGFP-кольцом.

ТЕОРЕМА 3. Если $k[G]$ – полулокальная групповая алгебра группы G над алгебраически замкнутым полем k , то любой конечно порожденный плоский $k[G]$ -модуль проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала теорему для конечно порожденных групп. Если H – подгруппа конечного индекса, то $k[G]$ – свободный, конечно порожденный $k[H]$ -модуль. Поэтому по предложению 1, сформулированному выше, достаточно доказать, что $k[H]$ является FGFP-кольцом.

Рассмотрим группу H теоремы 2. Так как $\omega(H)k[H] = J(k[H])$, то $k[H]$ – локальное кольцо. Локальные кольца являются FGFP-кольцами (см., например, [5]) и теорема в этом случае доказана.

Согласно теореме 3 и следствия 4 работы [8] всякий n -порожденный плоский модуль над полулокальным кольцом R проективен тогда и только тогда, когда для любых матриц $r, \varepsilon \in \mathbb{R}_n$ таких, что $r^2 = \varepsilon r$, выполняется равенство $r\varepsilon^{-1}r = r$.

Пусть r, ε – матрицы порядка n над кольцом $k[G]$ такие, что $r^2 = \varepsilon r$. Рассмотрим подгруппу G_1 , порожденную носителями всех элементов матриц r, ε . Групповая алгебра $k[G_1]$ – полулокальная групповая алгебра конечно порожденной группы G_1 , для которой теорема справедлива. Поэтому в $k[G_1]$, а значит и в $k[G]$, выполняется равенство $r\varepsilon^{-1}r = r$ и теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1, 2. М.: Мир, 1977, 1979.
- [2] Залесский А. Е., Михалев А. В. Групповые кольца // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1973.
- [3] Бовди А. А. Групповые кольца. Киев: УМК ВО, 1988.
- [4] Bass H. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. P. 466–488.
- [5] Сахаев И. И., Чирков Ч. В. Проективность конечно порожденных плоских модулей над полулокальным кольцом с единственным примитивным идеалом // Изв. вузов. Матем. 1970. № 6. С. 100.
- [6] Puninski G., Rothmaler Ph. When every finitely generated flat modules projective // J. Algebra. 2004. V. 277. P. 542–558.
- [7] Jondrup S. On finitely generated flat modules // Math. Scand. 1970. V. 26. P. 233–240.

- [8] Сахаев И. И. О группе $K_0(\text{АП})$ для полулокальных колец // Math. Nachr. 1987. V. 130. P. 157–175.
- [9] Сахаев И. И. О проективности конечно порожденных плоских модулей над полулокальными кольцами // Матем. заметки. 1985. Т. 37. №2. С. 152–161.
- [10] Woods S. M. On perfect group rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 27. № 1. P. 49–52.
- [11] Okninski J. Spectrally finite and semilocal group rings // Commun. Algebra. 1980. V. 8. P. 533–541.
- [12] Жучин А. В. О полулокальных полугрупповых кольцах // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. №1. С. 139–147.
- [13] Okninski J. Semilocal skew group rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. №4. P. 552–554.
- [14] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1980.

Казанский государственный университет
E-mail: marat.nasrutdinov@ksu.ru

Поступило
23.07.2004
Исправленный вариант
31.03.2005