Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, Особенности коранга 1 устойчивых гладких отображений и особые касательные гиперплоскости пространственной кривой, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 413–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:18:24

УДК 515.164.15+514.755.24

ОСОБЕННОСТИ КОРАНГА 1 УСТОЙЧИВЫХ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ОСОБЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

В. Д. Седых

Пусть γ – гладкая замкнутая кривая общего положения в $\mathbb{R}P^3$. Обозначим через C число ее точек уплощения, а через T – число плоскостей, касающихся γ в трех различных точках. Рассмотрим соприкасающиеся плоскости кривой γ в точках уплощения. Пусть N – общее число точек, в которых γ трансверсально пересекает эти соприкасающиеся плоскости. Тогда $T \equiv [N + \theta(\gamma)C]/2 \pmod{2}$, где $\theta(\gamma)$ – число нестягиваемых компонент кривой γ . Это сравнение обобщает известную теорему Фридмана о том, что если гладкая связная замкнутая кривая общего положения в $\mathbb{R}^3$ не имеет точек уплощения, то число ее тройных касательных плоскостей четно. Мы приводим также многомерные аналоги указанной формулы и показываем, что эти результаты являются следствиями некоторых общих фактов о топологии особенностей коранга 1 устойчивых гладких отображений многообразий одинаковой размерности.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Рассмотрим C^∞ -гладкую замкнутую кривую γ в n -мерном вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$. Эта кривая может иметь несколько связанных компонент, каждая из которых задается гладким отображением $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Число нестягиваемых компонент кривой γ обозначим через $\theta(\gamma)$.

Напомним, что *соприкасающейся* гиперплоскостью кривой γ в точке x называется любая гиперплоскость в $\mathbb{R}P^n$, которую кривая пересекает в x с кратностью, не меньшей n . Любая кривая имеет, по меньшей мере, одну соприкасающуюся гиперплоскость в каждой своей точке. Точка, в которой соприкасающаяся гиперплоскость кривой не единственна, называется точкой *вырождения*. Точка кривой в $\mathbb{R}P^n$ называется точкой *уплощения*, если кратность пересечения кривой со своей соприкасающейся гиперплоскостью в этой точке больше n .

Снабдим C^∞ -топологией пространство W всех гладких замкнутых кривых в $\mathbb{R}P^n$. Мы будем говорить, что данное утверждение справедливо для кривой *общего положения*, если существует открытое всюду плотное подмножество в пространстве W такое, что указанное утверждение верно для всех кривых из этого подмножества.

Кривая γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$ не имеет точек вырождения, иммерсирована, если $n = 2$, и вложена при $n > 2$. Число $\mathcal{S}_\gamma^0(A_n)$ ее точек уплощения конечно и

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00104.

$\mathcal{S}_\gamma^0(A_n) \equiv (n+1)\theta(\gamma) \pmod{2}$. Кривая γ может пересекать любую гиперплоскость только в конечном числе точек (взятых с учетом кратностей). Она может касаться гиперплоскости не более, чем в n геометрически различных точках, причем сумма кратностей этих касаний не больше n . Число $\mathcal{S}_\gamma^0(nA_1)$ всех n -касательных гиперплоскостей кривой γ (которые касаются ее в n различных точках) конечно.

Рассмотрим случай $n = 3$. Пусть $T = \mathcal{S}_\gamma^0(3A_1)$, $C = \mathcal{S}_\gamma^0(A_3)$ и N – общее число точек трансверсального пересечения кривой γ со своими соприкасающимися плоскостями в точках уплощения. Тогда $T \equiv N/2 \pmod{2}$ для любой гладкой связной замкнутой кривой γ общего положения в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}P^3$.

Эта формула была получена в [1] как обобщение теоремы [2], согласно которой число тройных касательных плоскостей гладкой связной замкнутой кривой общего положения и без точек уплощения в $\mathbb{R}^3$ четно. В настоящей статье мы обобщаем эти результаты на произвольные гладкие замкнутые кривые общего положения в $\mathbb{R}P^3$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любой гладкой замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^3$*

$$T \equiv \frac{N + \theta(\gamma)C}{2} \pmod{2}. \quad (1)$$

В частности, если кривая γ не имеет точек уплощения, то число ее тройных касательных плоскостей четно.

В работе приводится также многомерный аналог теоремы 1.1. А именно, рассмотрим гиперплоскости в $\mathbb{R}P^n$, которые касаются данной кривой γ в $n-2$ точках с кратностями 1 (в $n-3$ точках) и 3. Пусть $\mathcal{S}_\gamma^0(A_3 + (n-3)A_1)$ – число всех таких гиперплоскостей, а $\mathcal{S}_\gamma^1(A_3 + (n-3)A_1)$ – число гиперплоскостей (указанного типа), у каждой из которых число точек трансверсального пересечения с кривой γ сравнимо с $2n - \theta(\gamma)$ по модулю 4. У замкнутой кривой γ общего положения числа $\mathcal{S}_\gamma^0(A_3 + (n-3)A_1)$ и $\mathcal{S}_\gamma^1(A_3 + (n-3)A_1)$ конечны. Если $n = 3$, то число $\mathcal{S}_\gamma^1(A_3)$ сравнимо с $[N + \theta(\gamma)C]/2$ по модулю 2.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любой гладкой замкнутой кривой γ общего положения в пространстве $\mathbb{R}P^n$ нечетной размерности $n \geq 3$*

$$\mathcal{S}_\gamma^0(nA_1) \equiv \mathcal{S}_\gamma^1(A_3 + (n-3)A_1) \pmod{2}. \quad (2)$$

В частности, если $\mathcal{S}_\gamma^0(A_3 + (n-3)A_1) = 0$, то число n -касательных гиперплоскостей кривой γ четно.

Формула (1) имеет и другие многомерные обобщения. Приведем еще одно.

Пусть $n \geq 3$ нечетно. Обозначим через $\mathcal{S}_\gamma^0(2A_{(n-1)/2} + A_1)$ число гиперплоскостей, которые касаются кривой $\gamma \subset \mathbb{R}P^n$ в трех точках с кратностями $(n-1)/2$ (в двух точках) и 1. Через $\mathcal{S}_\gamma^1(A_n)$ обозначим число точек уплощения кривой γ , удовлетворяющих следующему условию: если π – соприкасающаяся гиперплоскость кривой в такой точке, то число точек трансверсального пересечения γ с π сравнимо с $1 - n - \theta(\gamma)$ по модулю 4. У замкнутой кривой γ общего положения, числа $\mathcal{S}_\gamma^0(2A_{(n-1)/2} + A_1)$ и $\mathcal{S}_\gamma^1(A_n)$ конечны.

ТЕОРЕМА 1.3. Для любой гладкой замкнутой кривой γ общего положения в пространстве $\mathbb{R}P^n$ нечетной размерности $n \geq 3$

$$\mathcal{S}_\gamma^0(2A_{(n-1)/2} + A_1) \equiv \mathcal{S}_\gamma^1(A_n) \pmod{2}. \quad (3)$$

В частности, если кривая γ не имеет точек уплощения, то число $\mathcal{S}_\gamma^0(2A_{(n-1)/2} + A_1)$ четно.

Все эти результаты являются следствиями одной общей формулы, которая описывает глобальные свойства проективных кривых (см. теорему 5.2 ниже). С другой стороны, эта формула является следствием некоторых общих фактов о топологии особенностей коранга 1 устойчивых гладких отображений многообразий, имеющих одинаковую размерность. Мы начнем с изучения этих особенностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Фридман высказал в [2] гипотезу о том, что если гладкая связная замкнутая кривая общего положения в $\mathbb{R}^n$, где $n > 3$, не имеет точек уплощения, то число ее n -касательных гиперплоскостей четно. Я не обнаружил контрпример к этой гипотезе в литературе. Но формула (2) показывает, что такой контрпример весьма вероятен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Мне не удалось получить каких-либо ограничений на четность числа n -касательных гиперплоскостей гладкой замкнутой кривой общего положения в четномерном пространстве $\mathbb{R}P^n$.

2. Особенности коранга 1 устойчивых гладких отображений многообразий одинаковой размерности. Пусть M и N — гладкие n -мерные многообразия, причем M замкнуто (компактное без края). Рассмотрим гладкое отображение $f: M \rightarrow N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Отображение f называется *отображением коранга ≤ 1* , если для любого $x \in M$ размерность ядра производной $f_{*x}: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ не больше 1.

Снабдим C^∞ -топологией пространство всех гладких отображений M в N . Отображение f называется *устойчивым*, если для любого отображения $\tilde{f}: M \rightarrow N$, достаточно близкого к f , существуют диффеоморфизмы $g: M \rightarrow M$ и $h: N \rightarrow N$ такие, что $h \circ f = \tilde{f} \circ g$.

Устойчивые отображения образуют открытое подмножество в пространстве всех отображений M в N . Они плотны в пространстве отображений коранга ≤ 1 .

Пусть f — устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 . Тогда оно имеет только особенности типов A_μ с целыми неотрицательными $\mu \leq n$ (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Отображение f имеет *особенность типа A_μ* в точке $x \in M$, если существуют локальные координаты на многообразиях M и N такие, что росток (f, x) отображения f в точке x задается формулой

$$(f, x): (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t, \bar{\lambda}) \mapsto (S(t, \bar{\lambda}), \bar{\lambda}),$$

где

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \quad S(t, \bar{\lambda}) = t^{\mu+1} + \lambda_{\mu-1} t^{\mu-1} + \dots + \lambda_1 t.$$

Число μ называется *показателем вырожденности* особенности типа A_μ . Множество A_μ^f точек $x \in M$, в которых f имеет особенность типа A_μ , является гладким

подмногообразием коразмерности μ в M . Образ этого многообразия относительно отображения f является иммерсированным подмногообразием той же коразмерности в N . Многообразие A_μ^f и его образ, вообще говоря, незамкнуты и несвязны.

Пусть $\mathbb{A}$ – свободная абелева полугруппа по сложению, образующими которой служат символы $A_0, A_1, \dots, A_\mu, \dots$. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Отображение f имеет *мультиособенность типа $\mathcal{A}$* в точке $y \in N$, если:

- 1) полный прообраз $f^{-1}(y)$ точки y при отображении f состоит из p попарно различных точек;
- 2) существует порядок $x_1, \dots, x_p$ точек из $f^{-1}(y)$ такой, что f имеет в этих точках особенности типов $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}$, соответственно;
- 3) образы при отображении f ростков $(A_{\mu_i}^f, x_i)$ в x_i многообразий $A_{\mu_i}^f, i = 1, \dots, p$, пересекаются трансверсально в точке y .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Мы будем также говорить, что в точках из дополнения $N \setminus f(M)$ отображение f имеет мультиособенность типа 0 (нуль полугруппы $\mathbb{A}$).

Числа $\mu_1, \dots, \mu_p$ называются *показателями вырожденности* мультиособенностей типа $\mathcal{A}$ отображения f . Числа

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p \quad \text{и} \quad \deg \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$$

называются *коразмерностью* и *степенью* этих мультиособенностей, соответственно. Если $\mathcal{A} = 0$, то $\text{codim } \mathcal{A} = \deg \mathcal{A} = 0$.

Устойчивое гладкое отображение $f: M \rightarrow N$ коранга ≤ 1 может иметь мультиособенности только типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$. Коразмерность мультиособенности не превышает размерности n объемлющего многообразия N . Степень мультиособенности ограничена максимумом d_f числа точек в полном прообразе $f^{-1}(y)$ по всем $y \in N$.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}_f$ точек $y \in N$, в которых f имеет мультиособенность типа $\mathcal{A}$. Это множество является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в N (незамкнутым и несвязным, вообще говоря).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Многообразие $\mathcal{A}_f$ называется *многообразием мультиособенностей типа $\mathcal{A}$* отображения f .

Пусть $\mathcal{F}_f$ – множество критических значений отображения f . Если f – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , то $\mathcal{F}_f$ – устойчивый компактный фронт в многообразии N , имеющий лишь особенности коранга 1 (см. [4]). Эти особенности классифицируются по элементам свободной абелевой полугруппы $\mathbb{A}_+ \subset \mathbb{A}$ по сложению, образующими которой служат символы $A_1, A_2, \dots, A_\mu, \dots$. А именно, фронт $\mathcal{F}_f$ имеет особенность типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$ в точке $y \in N$, если и только если существует целое $k \geq 0$ такое, что отображение f имеет в y мультиособенность типа $\mathcal{A} + kA_0 \in \mathbb{A}$.

Как известно, особенности любого устойчивого компактного фронта $\mathcal{F}$ в гладком многообразии удовлетворяют многочисленным условиям сосуществования (см., например, [5]–[7]). В случае $\mathcal{F} = \mathcal{F}_f$ эти условия определяют некоторые ограничения на топологию мультиособенностей отображения f . Но имеются и другие ограничения, которые определяются тем, что фронт $\mathcal{F}_f$ получен при помощи глобально определенного отображения. Некоторые из таких ограничений найдены ниже.

3. Об эйлеровых характеристиках многообразий мультиособенностей.

Пусть M и N – гладкие замкнутые n -мерные многообразия и $f: M \rightarrow N$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 . Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ и через $\overline{\mathcal{A}}$ обозначим минимальное подмножество в $\mathbb{A}$ такое, что

- 1) $\mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}}$;
- 2) если $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_q} \in \overline{\mathcal{A}}$, то

$$X + A_1 \in \overline{\mathcal{A}}, \quad X - A_{\nu_i} - A_{\nu_j} + A_{\nu_i + \nu_j + 1} \in \overline{\mathcal{A}}$$

для всех $1 \leq i < j \leq q$.

Рассмотрим замыкание $\overline{\mathcal{A}_f}$ многообразия $\mathcal{A}_f$ мультиособенностей типа $\mathcal{A}$ отображения f в объемлющем многообразии N . Легко видеть, что множество $\overline{\mathcal{A}_f}$ компактно и является объединением многообразий X_f мультиособенностей типов $X \in \overline{\mathcal{A}}$. Разбиение множества $\overline{\mathcal{A}_f}$ на связные компоненты этих многообразий является конечной C^∞ -стратификацией Уитни.

Пусть $\partial(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A} \subset \mathbb{A}$. Предположим, что отображение f имеет мультиособенность типа $X \in \partial(\mathcal{A})$ в данной точке $y \in N$ и положим $c = \text{codim } X$. Выберем окрестность U начала координат 0 в $\mathbb{R}^c$ и гладкое вложение $\tau: U \rightarrow N$ так, что $\tau(0) = y$, а подмногообразие $\tau(U) \subset N$ трансверсально многообразию X_f в точке y . Через S_ε обозначим $(c-1)$ -мерную сферу в $\mathbb{R}^c$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в 0. Легко видеть, что существует $\varepsilon_0(f, y, \tau) > 0$ такое, что число $J_{\mathcal{A}}(X)$ связных компонент пересечения $\tau(S_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$ не зависит от f, y, τ и ε , если $\varepsilon < \varepsilon_0(f, y, \tau)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Число $J_{\mathcal{A}}(X)$ называется *индексом примыкания* мультиособенности типа X отображения f к мультиособенностям типа $\mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Число $J_{\mathcal{A}}(X) = 0$, если $X \notin \partial \mathcal{A}$.

Индекс $J_{\mathcal{A}}(X)$ можно вычислить следующим образом. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$, $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_q}$ и $d = \deg X$. Возьмем пространство $\mathbb{R}^d$ упорядоченных наборов $(P_1, \dots, P_q)$ многочленов $P_i = t^{\nu_i+1} + \lambda_{\nu_i}^i t^{\nu_i} + \dots + \lambda_1^i t + \lambda_0^i$ от $t \in \mathbb{R}$ с вещественными коэффициентами. Через $[P_i]_{\mathbb{R}}$ обозначим неупорядоченный набор кратностей вещественных корней многочлена P_i . Два набора многочленов *эквивалентны*, если найдется путь $(P_1^s, \dots, P_q^s) \in \mathbb{R}^d$, $s \in [0, 1]$, связывающий эти наборы, такой, что набор $([P_1^s]_{\mathbb{R}}, \dots, [P_q^s]_{\mathbb{R}})$ одинаков для всех s .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Индекс $J_{\mathcal{A}}(X)$ равен числу классов эквивалентности наборов $(P_1, \dots, P_q) \in \mathbb{R}^d$ многочленов таких, что дизъюнктивное объединение наборов $[P_1]_{\mathbb{R}}, \dots, [P_q]_{\mathbb{R}}$ является неупорядоченным множеством чисел $\mu_1 + 1, \dots, \mu_p + 1$.

Это непосредственно вытекает из определения индекса $J_{\mathcal{A}}(X)$.

ПРИМЕР 3.4. $J_{A_1+2A_0}(A_3+A_1) = 5$. В самом деле, возьмем пространство $\mathbb{R}^6$ упорядоченных пар (P_1, P_2) многочленов $P_1 = t^2 + \lambda_1^1 t + \lambda_0^1$ и $P_2 = t^4 + \lambda_3^2 t^3 + \lambda_2^2 t^2 + \lambda_1^2 t + \lambda_0^2$. Имеется ровно пять классов эквивалентности пар (P_1, P_2) таких, что дизъюнктивное объединение наборов $[P_1]_{\mathbb{R}}, [P_2]_{\mathbb{R}}$ совпадает с неупорядоченным набором чисел 1, 1, 2. Представители этих классов изображены на рис. 1.

Рис. 1

Пусть d_f – максимум числа точек в полном прообразе $f^{-1}(y)$ по всем $y \in N$. Зафиксируем отображение f и рассмотрим пространство *цепей* (конечных линейных комбинаций) вида

$$\sigma = \sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}: \deg \mathcal{A} \leq d_f} \alpha_{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A}_f$$

с целыми коэффициентами $\alpha_{\mathcal{A}}$. Сложение цепей (как линейных комбинаций) превращает это пространство в свободную абелеву группу, порожденную многообразиями $\mathcal{A}_f$ мультиособенностей всех типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$, возможных при данном значении d_f . Границу цепи σ определим формулой

$$\partial_*(\sigma) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}: \deg \mathcal{A} \leq d_f} \alpha_{\mathcal{A}} \cdot \partial_*(\mathcal{A}_f),$$

где

$$\partial_*(\mathcal{A}_f) = \sum_{X \in \partial \mathcal{A}: \deg X \leq d_f} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \cdot X_f.$$

Пусть $\chi(\mathcal{A}_f)$ – (топологическая) эйлерова характеристика многообразия $\mathcal{A}_f$ (альтернированная сумма чисел Бетти групп гомологий с компактными носителями). Рассмотрим коцепь

$$\chi(\sigma) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}: \deg \mathcal{A} \leq d_f} \alpha_{\mathcal{A}} \chi(\mathcal{A}_f).$$

Кограницу $\partial^*(\chi)$ этой коцепи определим как обычно:

$$(\partial^*(\chi))(\sigma) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}: \deg \mathcal{A} \leq d_f} \alpha_{\mathcal{A}} (\partial^*(\chi))(\mathcal{A}_f),$$

где $(\partial^*(\chi))(\mathcal{A}_f) = \chi(\partial_*(\mathcal{A}_f))$.

Следующее утверждение неявно содержится в [8].

Предложение 3.5. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$

$$\sum_{X \in \partial \mathcal{A}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_f) = \begin{cases} 2(-1)^n \chi(\mathcal{A}_f), & \text{если } \mathcal{A}_f \text{ нечетномерное,} \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_f \text{ четномерное.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ и рассмотрим указанную выше C^∞ -стратификацию множества $\overline{\mathcal{A}_f}$. Возьмем те страты этой стратификации, которые не являются связными компонентами многообразия $\mathcal{A}_f$. Согласно [9], [10] существует система трубчатых окрестностей этих стратов в многообразии N такая, что объединение $\mathcal{O}$ этих окрестностей удовлетворяет следующим условиям:

- 1) множество $\mathcal{A}_f \setminus \mathcal{O}$ является компактным C^0 -многообразием с краем $\partial(\mathcal{A}_f \setminus \mathcal{O})$;
- 2) $\mathcal{A}_f \setminus \mathcal{O}$ гомотопически эквивалентно $\mathcal{A}_f$ и гомеоморфно гладкому многообразию (с краем);
- 3) $\chi(\partial(\mathcal{A}_f \setminus \mathcal{O})) = (-1)^n \sum_{X \in \partial \mathcal{A}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_f)$.

Теперь предложение 3.5 следует из того факта, что

$$\chi(\partial(\mathcal{A}_f \setminus \mathcal{O})) = \begin{cases} 2\chi(\mathcal{A}_f \setminus \mathcal{O}), & \text{если } \mathcal{A}_f \text{ нечетномерное,} \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_f \text{ четномерное.} \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Пусть M и N — гладкие замкнутые n -мерные многообразия и $f: M \rightarrow N$ — устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 . Тогда $\chi(\partial_*(\mathcal{A}_f)) \equiv 0 \pmod{2}$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$, т.е. коцепь χ является коциклом по модулю 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Из предложения 3.5 также следует, что эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{A}_f)$ нечетномерного многообразия $\mathcal{A}_f$ мультиособенностей любого типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ у каждого отображения f рассматриваемого вида является линейной комбинацией эйлеровых характеристик $\chi(X_f)$ четномерных многообразий X_f , образованных мультиособенностями типов $X \in \mathbb{A}$ таких, что $\text{codim } X \geq \text{codim } \mathcal{A} + 1$. Эта комбинация универсальна в том смысле, что каждый ее коэффициент зависит только от типов $\mathcal{A}$ и X соответствующих мультиособенностей (т.е. не зависит от M , N и f). Аналогичный факт имеет место и для устойчивых гладких отображений коранга ≤ 1 в многообразии большей размерности (см. [11]).

Следующее утверждение описывает некоторые соотношения между индексами примыкания мультиособенностей устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1 многообразий одинаковой размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Для любых $\mathcal{A}, Y \in \mathbb{A}$ таких, что $Y \in \partial \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{X \in \partial \mathcal{A}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) J_X(Y) \\ &= \begin{cases} 2(-1)^{\text{codim } Y - 1} J_{\mathcal{A}}(Y), & \text{если } \text{codim } Y \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}, \\ 0, & \text{если } \text{codim } Y \equiv \text{codim } \mathcal{A} + 1 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = \text{codim } Y$ и $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , имеющее мультиособенность типа Y в начале координат 0 пространства $\mathbb{R}^m$ -образа. Рассмотрим $(m-1)$ -мерную сферу $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в 0. Если ε достаточно мало, то множество $g^{-1}(S_\varepsilon)$ является гладким $(m-1)$ -мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^m$ -прообразе, а сужение $\tilde{g}$ отображения g на это подмногообразие является устойчивым гладким отображением коранга ≤ 1 . При этом $\chi(X_{\tilde{g}}) = J_X(Y)$, $\chi(\mathcal{A}_{\tilde{g}}) = J_{\mathcal{A}}(Y)$ для любых $\mathcal{A}, X \in \mathbb{A}$. Остается применить предложение 3.5 к отображению $\tilde{g}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Пусть M и N – гладкие замкнутые n -мерные многообразия и $f: M \rightarrow N$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 . Тогда для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$

$$\partial_*^2(\mathcal{A}_f) = -2 \sum_Y J_{\mathcal{A}}(Y) \cdot Y_f,$$

где сумма берется по всем $Y \in \partial \mathcal{A}$ таким, что $\text{codim } Y \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}$ и $\deg Y \leq d_f$. В частности, $\partial_*^2(\mathcal{A}_f) \equiv 0 \pmod{2}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \partial_*^2(\mathcal{A}_f) &= \sum_{X \in \partial \mathcal{A}: \deg X \leq d_f} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \left[\sum_{Y \in \partial X: \deg Y \leq d_f} (-1)^{\text{codim } Y} J_X(Y) \cdot Y_f \right] \\ &= \sum_{Y \in \partial \mathcal{A}: \deg Y \leq d_f} (-1)^{\text{codim } Y} \left[\sum_{X \in \partial \mathcal{A}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) J_X(Y) \right] \cdot Y_f. \end{aligned}$$

Поэтому указанная формула следует из предложения 3.8.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Мы изучаем в этой работе только эйлеровы характеристики многообразий мультиособенностей отображения. Вопросы о классах (ко)гомологий этих многообразий – предмет дальнейшего исследования.

4. Некоторые соотношения между эйлеровыми характеристиками. Пусть M и N – гладкие замкнутые n -мерные многообразия, причем N связно. Рассмотрим устойчивое гладкое отображение $f: M \rightarrow N$ коранга ≤ 1 . Поскольку многообразие N связно, степени всех мультиособенностей отображения f имеют одинаковую четность, равную четности максимума d_f числа точек в полном прообразе $f^{-1}(y)$ по всем $y \in N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ целое число

$$\text{ind}_f(\mathcal{A}) = \frac{\deg \mathcal{A} + d_f}{2}$$

называется *индексом* мультиособенности типа $\mathcal{A}$ отображения f .

Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ (т.е. $\mu_1, \dots, \mu_p$ – целые положительные числа). Для любого целого $k \geq 0$ положим $\mathcal{A}^k = \mathcal{A} + kA_0 \in \mathbb{A}$. Через $\partial_{\text{ext}}(\mathcal{A})$ обозначим минимальное подмножество в $\mathbb{A}_+$ такое, что

- 1) $\partial(\mathcal{A}) \subset \partial_{\text{ext}}(\mathcal{A})$;
- 2) если $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_q} \in \partial_{\text{ext}}(\mathcal{A}) \cup \{\mathcal{A}\}$, то $X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i+1} \in \partial_{\text{ext}}(\mathcal{A})$ для любого $i = 1, \dots, q$.

Легко видеть, что

$$\bigcup_{k \geq 0} \partial(\mathcal{A}^k) = \bigcup_{X \in \partial_{\text{ext}}(\mathcal{A})} \bigcup_{k \geq 0} X^k.$$

Если $(\mathcal{A}^k)_f \neq \emptyset$, то $k \equiv \deg \mathcal{A} + d_f \pmod{2}$.

Рассмотрим цепи

$$\begin{aligned}\sigma^0(f, \mathcal{A}) &= \sum_{k=0}^{d_f - \deg \mathcal{A}} (\mathcal{A}^k)_f, & \sigma^1(f, \mathcal{A}) &= \sum_{k=0}^{d_f - \deg \mathcal{A}} \operatorname{ind}_f(\mathcal{A}^k) \cdot (\mathcal{A}^k)_f, \\ R_c(f, \mathcal{A}) &= \sum_{X \in \partial_{\text{ext}}(\mathcal{A}) : \operatorname{codim} X = c} \left[\sum_{k=0}^{d_f - \deg X} \operatorname{ind}_f(\mathcal{A}, X^k) \cdot (X^k)_f \right],\end{aligned}$$

где

$$\operatorname{ind}_f(\mathcal{A}, X^k) = \sum_{i \geq k} \operatorname{ind}_f(\mathcal{A}^i) \cdot J_{\mathcal{A}^i}(X^k).$$

Следующее утверждение является простым упражнением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$*

$$\partial_*(\sigma^1(f, \mathcal{A})) = \sum_{c=\operatorname{codim} \mathcal{A}+1}^n (-1)^c R_c(f, \mathcal{A}).$$

Из следствия 3.6 и предложения 4.2 получаем.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть M и N – гладкие замкнутые n -мерные многообразия, N связно и $f: M \rightarrow N$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 . Тогда*

$$\sum_{c=\operatorname{codim} \mathcal{A}+1}^n \chi(R_c(f, \mathcal{A})) \equiv 0 \pmod{2}$$

для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$ (в том числе и для $\mathcal{A} = 0$).

Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$. Через $\#(A_{\mu} \mid \mathcal{A})$ обозначим число слагаемых в $\mathcal{A}$, равных A_{μ} . Положим

$$\mathcal{S}_f^0(\mathcal{A}) = \chi(\sigma^0(f, \mathcal{A})), \quad \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A}) = \chi(\sigma^1(f, \mathcal{A})).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Число $\mathcal{S}_f^0(\mathcal{A})$ равно эйлеровой характеристике многообразия особенностей типа $\mathcal{A}$ множества $\mathcal{F}_f$ критических значений отображения f . Число $\mathcal{S}_f^1(\mathcal{A})$ сравнимо по модулю 2 с эйлеровой характеристикой многообразия, образованного мультиособенностями типов $\mathcal{A}^k$ отображения f , где $k + \deg \mathcal{A} + d_f \equiv 2 \pmod{4}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Пусть $\mathcal{A} = \alpha_1 A_{\mu_1} + \dots + \alpha_p A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$, где $\mu_1, \dots, \mu_p$ попарно различны. Тогда*

$$\begin{aligned}\chi(R_{\operatorname{codim} \mathcal{A}+1}(f, \mathcal{A})) &\equiv [\#(A_1 \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^0(\mathcal{A} + A_1) \\ &+ \sum_{\alpha_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1}) \pmod{2}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы $X \in \partial_{\text{ext}}(\mathcal{A})$ такие, что $\text{codim } X = \text{codim } \mathcal{A} + 1$, могут быть только следующих трех типов.

1) $X = \mathcal{A} + A_1$. В этом случае

$$\begin{aligned} \text{ind}_f(\mathcal{A}, X^k) &= \text{ind}_f(\mathcal{A}^k) J_{\mathcal{A}^k}(X^k) + \text{ind}_f(\mathcal{A}^{k+2}) J_{\mathcal{A}^{k+2}}(X^k), \\ \text{ind}_f(\mathcal{A}^k) &= \frac{\deg \mathcal{A} + k + d_f}{2}, \quad \text{ind}_f(\mathcal{A}^{k+2}) = \text{ind}_f(\mathcal{A}^k) + 1, \\ J_{\mathcal{A}^k}(X^k) &= J_{\mathcal{A}^{k+2}}(X^k) = \#(A_1 \mid \mathcal{A}) + 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{ind}_f(\mathcal{A}, X^k) \equiv \#(A_1 \mid \mathcal{A}) + 1 \pmod{2}.$$

2) $X = \mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \text{ind}_f(\mathcal{A}, X^k) &= \text{ind}_f(\mathcal{A}^{k+1}) J_{\mathcal{A}^{k+1}}(X^k), \\ \text{ind}_f(\mathcal{A}^{k+1}) &= \frac{\deg \mathcal{A} + k + 1 + d_f}{2}, \quad J_{\mathcal{A}^{k+1}}(X^k) = 2 \cdot [\#(A_{\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 1]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{ind}_f(\mathcal{A}, X^k) \equiv 0 \pmod{2}.$$

3) $X = \mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1}$. В этом случае

$$\text{ind}_f(\mathcal{A}, X^k) = \text{ind}_f(\mathcal{A}^k) J_{\mathcal{A}^k}(X^k), \quad J_{\mathcal{A}^k}(X^k) = \delta(i, j) \cdot [\#(A_{\mu_i+\mu_j+1} \mid \mathcal{A}) + 1],$$

где

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 2, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Поэтому

$$\text{ind}_f(\mathcal{A}, X^k) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2}, & \text{если } i \neq j, \\ \frac{\deg \mathcal{A} + k + d_f}{2} \cdot [\#(A_{2\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 1] \pmod{2}, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Теперь, предложение 4.5 очевидно.

Из теоремы 4.3 и предложения 4.5 получаем.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть M и N – гладкие замкнутые n -мерные многообразия, N связно и $f: M \rightarrow N$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 . Рассмотрим элемент $\mathcal{A} = \alpha_1 A_{\mu_1} + \dots + \alpha_p A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ такой, что $\mu_1, \dots, \mu_p$ попарно различны, а $\text{codim } \mathcal{A} = n - 1$. Тогда

$$[\#(A_1 \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^0(\mathcal{A} + A_1) \equiv \sum_{\alpha_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1}) \pmod{2}.$$

ПРИМЕР 4.7. Пусть $n = 1$ и $\mathcal{A} = 0$. Тогда из следствия 4.6 получаем $\mathcal{S}_f^0(A_1) \equiv 0 \pmod{2}$. Это хорошо известно: число критических точек функции Морса на одномерном гладком замкнутом многообразии четно.

ПРИМЕР 4.8. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$, где $\mu_1, \dots, \mu_p$ попарно различны, $\mu_1 > 1, \dots, \mu_p > 1$ и $\mu_1 + \dots + \mu_p = n - 1$. Тогда $\mathcal{S}_f^0(\mathcal{A} + A_1) \equiv 0 \pmod{2}$. В частности, если $n \geq 3$, то

$$\mathcal{S}_f^0(A_{n-1} + A_1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

ПРИМЕР 4.9. Пусть $n \geq 3$ нечетное и $\mathcal{A} = (n - 1)A_1$. Тогда

$$\mathcal{S}_f^0(nA_1) \equiv \mathcal{S}_f^1(A_3 + (n - 3)A_1) \pmod{2}.$$

ПРИМЕР 4.10. Пусть $n \geq 3$ нечетное и $\mathcal{A} = 2A_{(n-1)/2}$. Тогда

$$\mathcal{S}_f^0(2A_{(n-1)/2} + A_1) \equiv \mathcal{S}_f^1(A_n) \pmod{2}.$$

Теорема 4.3 позволяет получить много других утверждений о четности эйлеровых характеристик многообразий мультиособенностей отображения f . Мы приведем еще только одно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.11. Пусть $\mathcal{A} = \alpha_1 A_{\mu_1} + \dots + \alpha_p A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$, где $\mu_1, \dots, \mu_p$ попарно различны. Тогда

$$\begin{aligned} \chi(R_{\text{codim } \mathcal{A}+2}(f, \mathcal{A})) &\equiv [\#(A_2 \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^0(\mathcal{A} + A_2) \\ &+ \sum_{\alpha_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 1][\#(A_1 \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^0(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1} + A_1) \\ &+ \sum_{\alpha_i > 0} [\#(A_{\mu_i+2} \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^0(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+2}) \\ &+ \sum_{\alpha_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+2} \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+2}) \\ &+ \sum_{\alpha_i > 1, \alpha_j > 1, j > i} [\#(A_{2\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 1][\#(A_{2\mu_j+1} \mid \mathcal{A}) + 1] \\ &\quad \times \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} - 2A_{\mu_j} + A_{2\mu_i+1} + A_{2\mu_j+1}) \\ &+ \sum_{\alpha_i > 3} \binom{\#(A_{2\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 2}{2} \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A} - 4A_{\mu_i} + 2A_{2\mu_i+1}) \\ &+ \sum_{\alpha_i > 2} [\#(A_{3\mu_i+2} \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A} - 3A_{\mu_i} + A_{3\mu_i+2}) \\ &+ \sum_{\alpha_i > 0, \alpha_j > 1, j \neq i} [\#(A_{\mu_i+2\mu_j+2} \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - 2A_{\mu_j} + A_{\mu_i+2\mu_j+2}) \end{aligned}$$

по модулю 2.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 4.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.12. Пусть M и N – гладкие замкнутые n -мерные многообразия, N связно и $f: M \rightarrow N$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 . Рассмотрим элемент $\mathcal{A} = \alpha_1 A_{\mu_1} + \dots + \alpha_p A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ такой, что $\mu_1, \dots, \mu_p$ попарно различны, а $\text{codim } \mathcal{A} = n - 2$. Тогда

$$[\#(A_1 \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^0(\mathcal{A} + A_1) + \sum_{\alpha_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_f^1(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1}) \equiv \chi(R_n(f, \mathcal{A}))$$

по модулю 2, где $\chi(R_n(f, \mathcal{A}))$ вычисляется согласно предложению 4.11.

ПРИМЕР 4.13. Пусть $n = 2$ и $\mathcal{A} = 0$. Тогда из следствия 4.12 получаем $\mathcal{S}_f^0(A_1) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_2) \pmod{2}$.

ПРИМЕР 4.14. Пусть $n = 3$ и $\mathcal{A} = A_1$. Тогда из следствия 4.12 и примера 4.8 получаем $\mathcal{S}_f^0(A_3) \equiv 0 \pmod{2}$. Это хорошо известно: число ласточкиных хвостов на компактном волновом фронте общего положения в трехмерном пространстве четно.

ПРИМЕР 4.15. Пусть $n = 4$ и $\mathcal{A} = A_2$. Тогда $\mathcal{S}_f^0(A_2 + A_1) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_4) \pmod{2}$.

ПРИМЕР 4.16. Пусть $n \geq 5$ и $\mathcal{A} = A_{n-2}$. Тогда

$$\mathcal{S}_f^0(A_{n-2} + A_1) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_n) + \mathcal{S}_f^0(A_{n-2} + A_2) \pmod{2}.$$

В малых размерностях можно перечислить все сравнения, которые следуют из теоремы 4.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.17. Справедливы следующие сравнения по модулю 2:

$$\begin{aligned} \chi(R_3(f, 0)) &\equiv \mathcal{S}_f^0(A_3) + \mathcal{S}_f^1(A_3), \\ \chi(R_4(f, 0)) &\equiv \mathcal{S}_f^0(A_3 + A_1) + \mathcal{S}_f^0(A_4) + \mathcal{S}_f^1(A_4), \\ \chi(R_4(f, A_1)) &\equiv \mathcal{S}_f^0(A_3 + A_1) + \mathcal{S}_f^1(A_3 + A_1). \end{aligned}$$

Доказательство заключается в непосредственном вычислении.

СЛЕДСТВИЕ 4.18. Пусть M и N – гладкие замкнутые n -мерные многообразия, N связно и $f: M \rightarrow N$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 . Тогда имеют место следующие сравнения по модулю 2:

$n = 1$	$\mathcal{S}_f^0(A_1) \equiv 0$
$n = 2$	$\mathcal{S}_f^0(A_1) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_2)$
$n = 3$	$\mathcal{S}_f^0(A_1) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_2) + \mathcal{S}_f^1(A_3)$
	$\mathcal{S}_f^0(3A_1) \equiv \mathcal{S}_f^1(A_3)$
	$\mathcal{S}_f^0(A_2 + A_1) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_3) \equiv 0$
$n = 4$	$\mathcal{S}_f^0(A_1) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_2) + \mathcal{S}_f^1(A_3) + \mathcal{S}_f^1(A_4)$
	$\mathcal{S}_f^0(3A_1) + \mathcal{S}_f^0(A_2 + 2A_1) \equiv \mathcal{S}_f^1(A_3) + \mathcal{S}_f^1(A_4)$
	$\mathcal{S}_f^0(A_2 + A_1) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_3) \equiv \mathcal{S}_f^0(A_4)$
	$\mathcal{S}_f^0(A_3 + A_1) \equiv \mathcal{S}_f^1(A_3 + A_1) \equiv 0$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.19. Теорема 4.3 не дает всех ограничений на четность эйлеровых характеристик многообразий мультиособенностей отображения f . Например, если $n = 3$, то $\mathcal{S}_f^0(A_2) = \mathcal{S}_f^0(A_2 + A_1) + \mathcal{S}_f^0(A_3)$ (см. вторую формулу таблицы 1 из [7]). Отсюда следует сравнение $\mathcal{S}_f^0(A_2) \equiv 0 \pmod{2}$, которое нельзя получить только из следствия 4.18.

5. Приложения к пространственным кривым. Рассмотрим произвольную гладкую замкнутую кривую γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$. Ее касательные гиперплоскости классифицируются по ненулевым элементам полугруппы $\mathbb{A}_+$ (свободной абелевой полугруппы по сложению, порожденной символами $A_1, A_2, \dots, A_\mu, \dots$).

А именно, пусть $\pi \subset \mathbb{R}P^n$ – касательная гиперплоскость кривой γ . Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq 0$ полугруппы $\mathbb{A}_+$. Напомним, что $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p$, $\deg \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$ и $\#(A_\mu \mid \mathcal{A})$ – число слагаемых в $\mathcal{A}$, равных A_μ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Гиперплоскость π называется *касательной гиперплоскостью типа $\mathcal{A}$* , если

- 1) она касается кривой γ ровно в p попарно различных точках с кратностями $\mu_1, \dots, \mu_p$, соответственно;
- 2) эти точки являются вершинами $(p - 1)$ -мерного симплекса.

Касательные гиперплоскости кривой γ общего положения исчерпываются касательными гиперплоскостями типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ с *коразмерностью касания* $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$ (см. [4], [12]). Для любого $\mathcal{A}$ такого, что $\text{codim } \mathcal{A} = n$, число $\mathcal{S}_\gamma^0(\mathcal{A})$ всех касательных гиперплоскостей типа $\mathcal{A}$ кривой γ конечно. Обозначим через $\mathcal{S}_\gamma^1(\mathcal{A})$ число касательных гиперплоскостей типа $\mathcal{A}$, у каждой из которых число точек трансверсального пересечения с γ сравнимо с $2 - \deg \mathcal{A} - \theta(\gamma)$ по модулю 4, где $\theta(\gamma)$ – число нестягиваемых компонент кривой γ .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть γ – гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}P^n$. Рассмотрим элемент $\mathcal{A} = \alpha_1 A_{\mu_1} + \dots + \alpha_p A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ такой, что $\mu_1, \dots, \mu_p$ попарно различны, а $\text{codim } \mathcal{A} = n - 1$. Тогда для кривой γ общего положения

$$[\#(A_1 \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_\gamma^0(\mathcal{A} + A_1) \equiv \sum_{\alpha_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} \mid \mathcal{A}) + 1] \mathcal{S}_\gamma^1(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1})$$

по модулю 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проективизацию $PT^*(\mathbb{R}P^n)$ кокасательного расслоения пространства $\mathbb{R}P^n$. Это гладкое $(2n - 1)$ -мерное многообразие. Оно образовано контактными элементами (π, x) , где $x \in \mathbb{R}P^n$, а $\pi \in \mathbb{R}P^{n*}$ – гиперплоскость в $\mathbb{R}P^n$, проходящая через точку x .

Многообразию $PT^*(\mathbb{R}P^n)$ имеет естественную контактную структуру (см. [4]). Проекция

$$\varrho: PT^*(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \mathbb{R}P^{n*}, \quad (\pi, x) \mapsto \pi,$$

является лежандровым расслоением относительно этой структуры.

Рассмотрим множество M контактных элементов (π, x) , где $x \in \gamma$. Это множество является гладким замкнутым n -мерным подмногообразием в $PT^*(\mathbb{R}P^n)$. Ограничение проекции ϱ на многообразие M является гладким отображением $f: M \rightarrow \mathbb{R}P^{n*}$.

Множество L_f критических точек отображения f состоит из контактных элементов $(\pi, x) \in PT^*(\mathbb{R}P^n)$, где π – касательная гиперплоскость кривой γ в точке x . Множество $\mathcal{F}_f$ критических значений этого отображения состоит из гиперплоскостей в $\mathbb{R}P^n$, касающихся кривой γ .

Для кривой γ общего положения множество L_f является гладким $(n-1)$ -мерным лежандровым подмногообразием в $PT^*(\mathbb{R}P^n)$. Множество $\mathcal{F}_f$ является фронтом в $\mathbb{R}P^{n*}$ (а именно, проекцией многообразия L_f в базу расслоения ϱ). При этом фронт $\mathcal{F}_f$ устойчив и имеет особенности только коранга 1. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ особенности типа $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}_f$ взаимно однозначно соответствуют касательным гиперплоскостям типа $\mathcal{A}$ кривой γ (см. [4], [12]).

Следовательно, для кривой γ общего положения отображение f является устойчивым отображением коранга ≤ 1 . Максимум d_f числа точек в полном прообразе $f^{-1}(\pi)$ по всем $\pi \in \mathbb{R}P^{n*}$ сравним по модулю 2 с числом $\theta(\gamma)$. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ касательные гиперплоскости типа $\mathcal{A}$ кривой γ взаимно однозначно соответствуют мультиособенностям типов $\mathcal{A} + kA_0 \in \mathbb{A}$ отображения f . В частности, $\mathcal{S}_f^i(\mathcal{A}) = \mathcal{S}_\gamma^i(\mathcal{A})$ для любого $i = 0, 1$ и для любого $\mathcal{A}$ такого, что $\text{codim } \mathcal{A} = n$. Теперь теорема 5.2 вытекает из следствия 4.6 (и замечания 4.4).

Из теоремы 5.2 следуют теоремы 1.2 и 1.3 (см. примеры 4.9 и 4.10). Из нее следуют также и некоторые другие факты о четности чисел гиперплоскостей различных типов, касающихся с максимально возможной коразмерностью гладкой замкнутой кривой общего положения в $\mathbb{R}P^n$. В частности (см. пример 4.8), имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть γ – гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}P^n$. Предположим, что $\mu_1, \dots, \mu_p$ – попарно различные целые числа, $\mu_1 > 1, \dots, \mu_p > 1$ и $\mu_1 + \dots + \mu_p = n-1$. Тогда при любом $n \neq 2$ число касательных гиперплоскостей типа $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} + A_1$ кривой γ общего положения четно.

Рассмотрим, например, соприкасающиеся гиперплоскости гладкой замкнутой кривой γ в $\mathbb{R}P^n$. Соприкасающаяся гиперплоскость в общей точке кривой γ общего положения касается кривой только в этой точке с кратностью $n-1$. Соприкасающиеся гиперплоскости в некоторых изолированных точках могут касаться кривой γ с коразмерностью n . Эти соприкасающиеся гиперплоскости называются *особыми* и являются касательными гиперплоскостями двух типов: A_n и $A_{n-1} + A_1$. Поскольку $\mathcal{S}_\gamma^0(A_n) \equiv (n+1)\theta(\gamma) \pmod{2}$, из теоремы 5.3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Число особых соприкасающихся гиперплоскостей гладкой замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$ сравнимо с $(n+1)\theta(\gamma)$ по модулю 2 для любого $n \geq 3$.

В случае $n = 3$ этот факт указан также в [13].

Статья была частично написана в университете г. Утрехта (Нидерланды). Автор благодарен Д. Сирсме и всем сотрудникам математического факультета этого университета за гостеприимство и поддержку. Я хотел бы также поблагодарить М. Э. Казаряна за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Banchoff Th., Gaffney T., McCrory C. Counting tritangent planes of space curves // *Topology*. 1985. V. 24. № 1. P. 15–23.
- [2] Freedman M. H. Planes triply tangent to curves with nonvanishing torsion // *Topology*. 1980. V. 19. № 1. P. 1–8.
- [3] Morin B. Formes canoniques des singularités d'une application différentiable // *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1965. V. 260. P. 5662–5665.
- [4] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. М.: Наука, 1982.
- [5] Васильев В. А. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. М.: МЦНМО, 2000.
- [6] Kazarian M. E. Thom polynomials for Lagrange, Legendre, and critical point function singularities // *Proc. London Math. Soc.* 2003. V. 86. № 3. P. 707–734.
- [7] Седых В. Д. Разрешение особенностей коранга 1 фронта общего положения // *Функцион. анализ и его прилож.* 2003. Т. 37. № 2. С. 52–64.
- [8] McCrory C., Parusiński A. Algebraically constructible functions // *Ann. Sci. 'Ecole Norm. Sup.* 1997. V. 30. № 4. P. 527–552.
- [9] Мазер Дж. Стратификации и отображения // *УМН*. 1972. Т. 27. № 5. С. 85–118.
- [10] Romero Fuster M. C. Sphere stratifications and the Gauss map // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A*. 1983. V. 95. P. 115–136.
- [11] Седых В. Д. О топологии образа устойчивого гладкого отображения с особенностями коранга 1 // *Докл. РАН*. 2004. Т. 395. № 4. С. 459–463.
- [12] Седых В. Д. Строение выпуклой оболочки пространственной кривой // *Тр. сем. им. Петровского*. 1981. Т. 6. С. 239–256.
- [13] Седых В. Д. Двойные касательные плоскости к пространственной кривой // *Сиб. матем. ж.* 1989. Т. 30. № 1. С. 209–211.

Российский государственный университет
нефти и газа им. И. М. Губкина
E-mail: sedykh@mccme.ru

Поступило
21.10.2003
Исправленный вариант
08.02.2005