Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 442–465

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:29:42

УДК 517.52

СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

И. И. Шарапудинов

Построено разложение дискретной функции в виде смешанного ряда по полиномам Чебышева. Получены оценки погрешности приближения функции и ее производных.
Библиография: 13 названий.

Эта работа посвящена теории смешанных рядов по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, ортогональным на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Эти полиномы представляют собой дискретный аналог полиномов Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$, $n = 0, 1, \dots$. Ранее в работах автора [1]–[9] были рассмотрены смешанные ряды по полиномам Лежандра, ультрасферическим полиномам и общим полиномам Якоби, а также полиномам Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, при $\alpha = \beta = 0$. Здесь рассматривается случай произвольных $\alpha, \beta > -1$. Основная идея введения смешанных рядов по ортогональным полиномам связана с задачей одновременного приближения функции и ее производных, которая, в свою очередь, возникает при численном решении дифференциальных уравнений самых различных типов. Дело в том, что, как отмечалось в цитированных работах, суммы Фурье по ортогональным полиномам для решения задачи одновременного приближения функции и ее нескольких производных не подходят. Это связано с тем, что вместе с ростом степени ортогонального полинома его производные (в дискретном случае – разностные производные) сильно растут вблизи концов интервала, на котором ортогональна рассматриваемая система полиномов. В частности, это касается и полиномов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Смешанные ряды по ортогональным полиномам возникли как альтернативный аппарат приближения функций, который позволяет эффективно решить задачу одновременного приближения функции и ее нескольких производных. Что касается рассматриваемых в настоящей работе смешанных рядов по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, то они естественным образом возникают при решении задачи (которая чаще всего также связана с численным решением дифференциальных уравнений разностными методами) одновременного приближения дискретной функции, заданной на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ и ее конечных разностей.

1. Некоторые свойства полиномов $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$. Для удобства ссылок мы здесь соберем из [10]–[12] некоторые формулы для полиномов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ и установим ряд вспомогательных утверждений. Пусть N – натуральное число, α, β – произ-

вольные комплексные числа. Положим

$$\rho(x) = \rho(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(x + \beta + 1)\Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)}, \quad (1.1)$$

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(-1)^n}{n!(N-1)^{[n]}\rho(x)} \Delta^n \{ \rho(x)(x - N - \alpha)^{[n]} x^{[n]} \}, \quad (1.2)$$

где $\Delta^n f(x)$ – конечная разность n -го порядка функции $f(x)$ в точке x , т.е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta \Delta^{n-1} f(x)$, $n \geq 1$, $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a \times (a-1) \cdots (a-k+1)$ при $k \geq 1$. Для каждого $0 \leq n \leq N-1$ равенство (1.2) определяет алгебраический полином степени n , для которого

$$T_n^{\alpha, \beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad T_n^{\alpha, \beta}(0, N) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}. \quad (1.3)$$

Полиномы допускают следующее явное представление:

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{[k]}(n + \alpha + \beta + 1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k + \beta + 1)k!(N-1)^{[k]}}. \quad (1.4)$$

Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, $0 \leq n \leq N-1$, образуют ортогональную с весом (1.1) систему на множестве $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, точнее,

$$\sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha, \beta}(x, N) T_m^{\alpha, \beta}(x, N) = h_{n, N}^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (1.5)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \rho(x) \\ &= \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(x + \beta + 1)\Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$h_{n, N}^{\alpha, \beta} = \frac{(N + n + \alpha + \beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 1)}. \quad (1.7)$$

При $n = 0$ произведение $(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha + \beta + 2)$. Для $0 \leq n \leq N-1$ положим

$$\tau_n^{\alpha, \beta}(x) = \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \{h_{n, N}^{\alpha, \beta}\}^{-1/2} T_n^{\alpha, \beta}(x, N). \quad (1.8)$$

Очевидно, если $0 \leq n, m \leq N-1$, то

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) \tau_m^{\alpha, \beta}(x, N) = \delta_{nm}. \quad (1.9)$$

Другими словами, многочлены $\tau_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, $0 \leq n \leq N-1$, образуют ортонормированную с весом $\mu(x)$ систему на $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

Формула Кристоффеля–Дарбу для многочленов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x) = T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{T_k^{\alpha,\beta}(x) T_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_{k,N}^{\alpha,\beta}} \\ &= \frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \\ &\quad \times \frac{T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) T_n^{\alpha,\beta}(y) - T_n^{\alpha,\beta}(x) T_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Поскольку $\Delta a^{[k]} = ka^{[k-1]}$, из (1.4) находим

$$(n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x, N) + (n+\beta+1)T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1} x T_n^{\alpha,\beta+1}(x-1, N-1). \quad (1.11)$$

Из равенства $\mu(N-1-x; \beta, \alpha, N) = \mu(x; \alpha, \beta, N)$, непосредственно вытекающего из (1.6), и соотношения ортогональности (1.5) следует, что при $\alpha, \beta > -1$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = (-1)^n T_n^{\beta,\alpha}(N-1-x, N). \quad (1.12)$$

Поскольку обе части этого равенства аналитичны относительно α и β , то оно справедливо для произвольных α и β . Из (1.11) и (1.12) имеем также следующее равенство:

$$(n+\alpha+1)T_n^{\alpha,\beta}(x, N) - (n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1} (N-1-x) T_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x, N-1). \quad (1.13)$$

Полагая в (1.10) $y = N-1$, имеем

$$\begin{aligned} D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x, N-1) &= \frac{T_n^{\alpha,\beta}(x) - \frac{n+1}{n+\alpha+1} T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)}{N-1-x} \\ &\quad \times \frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \\ &= \frac{(N-2)^{[n]}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} T_n^{\alpha+1,\beta}(x, N-1). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Последнее выражение является следствием равенства (1.13). Аналогично, полагая в (1.10) $y = 0$ и учитывая (1.11), получаем

$$D_{n,N}^{\alpha,\beta}(x, 0) = \frac{(N-2)^{[n]}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)} T_n^{\alpha,\beta+1}(x, N-1). \quad (1.15)$$

Непосредственно из явной формулы (1.4) мы можем вывести следующее полезное равенство:

$$\Delta^m T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_m}{(N-1)^{[m]}} T_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x, N-m), \quad (1.16)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$ при $k \geq 1$. Если β такое целое число, что $-n \leq \beta \leq -1$, то из (1.4) выводим также

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(n+\beta)!}{n!} \frac{(n+\alpha)^{[-\beta]} x^{[-\beta]}}{(N-1)^{[-\beta]}} T_{n+\beta}^{\alpha, -\beta}(x+\beta, N+\beta),$$

а если α и β целые, $-n \leq \beta \leq -1$, $-(n+\beta) \leq \alpha \leq -1$, $N \geq 2$, то

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]} (N-x-1)^{[-\alpha]}}{(N-1)^{[-\beta]} (N-1+\beta)^{[-\alpha]}} T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha, -\beta}(x+\beta, N+\alpha+\beta). \quad (1.17)$$

Разностная формула Родрига допускает следующее обобщение:

$$\begin{aligned} & \rho(x+m; \alpha, \beta, N+m) T_n^{\alpha, \beta}(x+m, N+m) \\ &= \frac{(-1)^m}{n^{[m]} (N)_m} \Delta^m \{ \rho(x; \alpha+m, \beta+m, N) T_{n-m}^{\alpha+m, \beta+m}(x, N) \}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

которое, впрочем, непосредственно вытекает из (1.2). Если в равенстве (1.16) мы заменим α , β и n соответственно на $\alpha-m$, $\beta-m$ и $k+m$, то придем к формуле

$$\Delta^m T_{k+m}^{\alpha-m, \beta-m}(x, N) = \frac{(k+\alpha+\beta)^{[m]}}{(N-1)^{[m]}} T_k^{\alpha, \beta}(x, N-m). \quad (1.19)$$

Пусть $a, \alpha > -1$, $0 \leq n \leq N-1$. Тогда [12]

$$\begin{aligned} \frac{T_n^{\alpha, a}(x, N)}{T_n^{\alpha, a}(N-1, N)} &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n! (\alpha+1)_{n-2j} (n+2a+1)_{n-2j} (1/2)_j (a-\alpha)_j}{(n-2j)! (2j)! (a+1)_{n-2j} (n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}} \\ &\quad \times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j (n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{T_{n-2j}^{\alpha, \alpha}(x, N)}{T_{n-2j}^{\alpha, \alpha}(N-1, N)}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\alpha > -1$, k, r целые, $r \geq 1$, $k \geq r+1$. Тогда

$$T_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x, N) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^\alpha T_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x, N),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r, k) = \frac{(-1)^j (k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j} (1/2)_j r^{[j]} (\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j} (k+r-2j+\alpha+3/2)_j (2j)!}. \quad (1.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$; тогда, полагая $a = \alpha - r$, можем воспользоваться равенством (1.20). Это дает

$$T_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x, N) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^{\alpha} T_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x, N),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_j^{\alpha} &= \frac{T_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(N-1, N)}{T_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(N-1, N)} \frac{(k+r)!(\alpha+1)_{k+r-2j}(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j)!(2j)!(\alpha-r+1)_{k+r-2j}} \\ &\quad \times \frac{(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} \\ &= \frac{(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!} \\ &\quad \times \frac{(\alpha-r+1)_{k+r}}{(\alpha-r+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j} \\ &= \frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 1.1 в случае $\alpha > r-1$. Но поскольку $T_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x, N)$, λ_j^{α} и $T_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x, N)$ представляют собой аналитические функции относительно α , утверждение леммы 1.1 вытекает из уже доказанного случая.

ЛЕММА 1.2. Пусть $T_n(x, N) = T_n^{0,0}(x, N)$. Тогда для $0 \leq m \leq k$, $x \in \Omega_N$ имеет место равенство

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x, N) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma_i^k T_{k-m+2i}(x, N),$$

в котором при $k-m+2i \leq N-1$

$$\begin{aligned} \sigma_i^k &= \sigma_i^k(m, N) = \frac{(N+m+k)^{[k-m]}(N+m-k-1)^{[2i]}}{(N+k-m+2i)^{[k-m+2i]}} \\ &\quad \times \frac{(k^{[m]})^2 m^{[i]} (1/2)_i (2k+1-2m+4i)}{(2i)!(2k)^{[2m-2i]}(k-m+1)_i(k+3/2)_i(2k+1)}, \quad (1.22) \end{aligned}$$

а если $k-m+2i > N-1$, то $\sigma_i^k(m, N) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение $(x+m)^{[m]}(N-x)_m T_{k-m}^{m,m}(x, N)$ представляет собой многочлен степени $k+m$; следовательно, мы можем записать ($x \in \Omega_N$)

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x, N) = \sum_{j=0}^{k+m} \gamma_j T_j(x, N), \quad (1.23)$$

где

$$\gamma_j = \frac{1}{h_{j,N}^{0,0}} \frac{2}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t, N) T_j(t, N), \quad (1.24)$$

если $0 \leq j \leq N-1$ и $\gamma_j = 0$ при $j \geq N$. Поскольку многочлен $T_{k-m}^{m,m}(t, N)$ при $j < k-m$ ортогонален с весом $(x+m)^{[m]}(N-x)_m$ к $T_j(x, N)$, то соответствующие $\gamma_j = 0$. Кроме того, сумма (1.24) обращается в нуль, если $k-m$ и j не являются одновременно четными или нечетными. Следовательно, (1.23) можно переписать так:

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x, N) = \sum_{i=0}^m \gamma_{k-m+2i} T_{k-m+2i}(x, N), \quad (1.25)$$

где

$$\gamma_{k-m+2i} = \frac{1}{h_{k-m+2i,N}^{0,0}} \frac{2}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t, N) T_{k-m+2i}(t, N); \quad (1.26)$$

в частности, если $k-m+2i > N-1$, то $\gamma_{k-m+2i} = 0$. Для вычисления суммы (1.26) при $k-m+2i \leq N-1$ воспользуемся леммой 1.1. Полагая $a = 0$, $\alpha = m$, $n = k-m+2i$ и учитывая равенство

$$T_n^{\alpha,\beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n},$$

из леммы 1.1 находим

$$\begin{aligned} T_{k-m+2i}(x, N) &= \sum_{j=0}^q \frac{(2k-2m+4i-2j)!(k+m+2i-2j)!}{(k-m+2i-2j)!(2j)!(2k+4i-4j)!} \\ &\quad \times \frac{(1/2)_j m^{[j]} (-1)^j}{(k-m+2i-2j+1)_j (k+2i-2j+3/2)_j} T_{k-m+2i-2j}^{m,m}(x, N), \end{aligned}$$

где $q = \min\{m, [(k-m+2i)/2]\}$. Умножим обе части этого равенства на $\mu(x, m, m, N) \times T_{k-m}^{m,m}(x, N)$ и просуммируем от 0 до $N-1$; тогда

$$\begin{aligned} \frac{2^{2m+1}}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t, N) T_{k-m+2i}(t, N) \\ = \frac{(2k-2m+2i)!(k+m)!(1/2)_i m^{[i]} (-1)^i}{(k-m)!(2i)!(2k)!(k-m+1)_i (k+3/2)_i} h_{k-m,N}^{m,m}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Из (1.26) и (1.27) имеем

$$\gamma_{k-m+2i} = \frac{h_{k-m,N}^{m,m}}{2^{2m} h_{k-m+2i,N}^{0,0}} \frac{(2k-2m+2i)!(k+m)!(1/2)_i m^{[i]} (-1)^i}{(k-m)!(2i)!(2k)!(k-m+1)_i (k+3/2)_i}. \quad (1.28)$$

Если мы воспользуемся равенством (1.7), то с учетом (1.22) мы можем переписать (1.28) так:

$$\begin{aligned} \gamma_{k-m+2i} &= \frac{(-1)^i (N+m+k)^{[k-m]} (N-1)^{[k-m+2i]}}{(N-1)^{[k-m]} (N+k-m+2i)^{[k-m+2i]}} \\ &\quad \times \frac{k!^2 (2k-2m+4i+1)}{(2k+1)(k-m)!(k+m)!} \frac{(2k-2m+2i)!(k+m)! m^{[i]} (1/2)_i}{(2k)!(k-m)!(2i)!(k-m+1)_i (k+3/2)_i} \\ &= (-1)^i \frac{(N+m+k)^{[k-m]} (N+m-k-1)^{[2i]}}{(N+k-2m+2i)^{[k-m+2i]}} \\ &\quad \times \frac{(k^{[m]})^2 m^{[i]} (1/2)_i (2k+1-2m+4i)}{(2i)!(2k)^{[2m-2i]} (k-m+1)_i (k+3/2)_i (2k+1)} \\ &= (-1)^i \sigma_i^k(m, N). \end{aligned}$$

Подставляя это значение в (1.25), приходим к утверждению леммы 1.2.

При исследовании вопросов сходимости дискретных рядов Фурье–Чебышева важную роль играют асимптотические свойства полиномов $T_n^{\alpha, \beta}(x)$ при $n, N \rightarrow \infty$. Пусть $a > 0$, $0 \leq n \leq aN^{1/2}$, $0 < \varepsilon < 1$, α, β – произвольные вещественные числа. Тогда имеет место [10] следующая асимптотическая формула:

$$T_n^{\alpha, \beta} \left[\frac{N-1}{2}(1+t), N \right] = P_n^{\alpha, \beta}(t) + V_{n, N}^{\alpha, \beta}(t), \quad (1.29)$$

для остаточного члена $V_{n, N}^{\alpha, \beta}(t)$ которой справедлива оценка

$$|V_{n, N}^{\alpha, \beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta, a, \varepsilon) \frac{n^{3/2}}{N}, \quad -1 + \varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon. \quad (1.30)$$

Вблизи точек -1 и 1 для остаточного члена $V_{n, N}^{\alpha, \beta}(t)$ справедливы оценки

$$|V_{n, N}^{\alpha, \beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta, a, q) \frac{n^{2+\beta}}{N}, \quad |1+t| \leq qn^{-2}, \quad (1.31)$$

$$|V_{n, N}^{\alpha, \beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta, a, q) \frac{n^{2+\alpha}}{N}, \quad |1-t| \leq qn^{-2}. \quad (1.32)$$

2. Дискретное преобразование Фурье–Чебышева. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, N)$ – функция (1.6). Для двух произвольных дискретных функций d и q , заданных на множестве $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ определим скалярное произведение

$$(f, g)_\mu = \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) d(x) q(x). \quad (2.1)$$

Евклидово пространство всех дискретных функций вида $d: \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$, в котором скалярное произведение определено с помощью равенства (2.1) обозначим через $\ell_{2, \mu}^N$. Если $d \in \ell_{2, \mu}^N$, то через $\|d\|_{\mu, N}$ обозначим норму функции d , т.е.

$$\|d\|_{\mu, N} = \left(\sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) d^2(x) \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Для $d \in \ell_{2, \mu}^N$ мы можем определить коэффициенты Фурье–Чебышева

$$d_k^{\alpha, \beta} = d_k^{\alpha, \beta}(N) = \sum_{t \in \Omega_N} \mu(t) \tau_k^{\alpha, \beta}(t, N) d(t), \quad k \in \Omega_N. \quad (2.3)$$

Поскольку система $\{\tau_k^{\alpha, \beta}(t, N)\}_0^{N-1}$ ортонормирована на Ω_N с весом $\mu(x)$ ($\alpha, \beta > -1$), то

$$d(x) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k^{\alpha, \beta} \tau_k^{\alpha, \beta}(x, N), \quad x \in \Omega_N. \quad (2.4)$$

Равенства (2.3) определяют прямое дискретное преобразование Фурье–Чебышева, а равенства (2.4) определяют обратное преобразование Фурье–Чебышева. Рассмотрим частичную сумму ряда (2.4) порядка $n \leq N - 1$

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = \sum_{k=0}^n d_k^{\alpha,\beta} \tau_k^{\alpha,\beta}(x, N). \quad (2.5)$$

Она доставляет функции $d = d(x)$ наилучшее приближение в пространстве $\ell_{2,\mu}^N$ среди всех алгебраических полиномов степени n , т.е.

$$\|d - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d)\|_{\ell_{2,\mu}^N} = \left(\sum_{t \in \Omega_N} (d(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d, x))^2 \mu(x) \right)^{1/2} = E_n(d)_{\ell_{2,\mu}^N} = \inf_{P_n} \|d - P_n\|_{\ell_{2,\mu}^N}, \quad (2.6)$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $P_n(x)$ степени n . Из (2.4) следует, что если $n \geq N - 1$, то $E_n(d)_{\ell_{2,\mu}^N} = 0$. Если $p_n = p_n(x)$ – произвольный алгебраический полином степени $n \leq N - 1$, то из (2.6) следует, что

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(p_n, x) = p_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Далее отметим, что равенство Парсеваля для системы полиномов Чебышева $\{\tau_k^{\alpha,\beta}(x, N)\}_{k=0}^{N-1}$ приобретает следующий вид:

$$\sum_{t \in \Omega_N} (d(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d, x))^2 \mu(x) = \sum_{k=n+1}^{N-1} (d_k^{\alpha,\beta})^2. \quad (2.8)$$

Сопоставляя (2.6) и (2.8), имеем также

$$E_n(d)_{\ell_{2,\mu}^N} = \left(\sum_{k=n+1}^{N-1} (d_k^{\alpha,\beta})^2 \right)^{1/2}. \quad (2.9)$$

Если мы воспользуемся ядром $D_{n,N}^{\alpha,\alpha}(x, t)$, то равенство (2.5) можно переписать следующим образом:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = \sum_{t=0}^{N-1} D_{n,N}^{\alpha,\alpha}(x, t) d(t) \mu(t). \quad (2.10)$$

В частности, если $x = 0$, то из (1.15) и (2.10) получим

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d, 0) = \frac{(N-2)^{[n]} \Gamma(n + \alpha + \beta + 2) 2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]} \Gamma(\beta+1) \Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{t=0}^{N-1} \mu(t) T_n^{\alpha,\beta+1}(t, N-1) d(t). \quad (2.11)$$

Рассмотрим $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d, 0)$ как линейный функционал, определенный в пространстве $C(\Omega_N)$, состоящем из дискретных функций вида $d: \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$, для которых норма определяется следующим образом:

$$\|d\|_{C(\Omega_N)} = \max_{x \in \Omega_N} |d(x)|. \quad (2.12)$$

Пусть

$$\|S_{n,N}^{\alpha,\beta}(0)\|_{C(\Omega_N)} = \sup_{\|d\|_{C(\Omega)_N} \leq 1} |S_{n,N}^{\alpha,\beta}(d, 0)| \quad (2.13)$$

— норма функционала $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(0): C(\Omega_N) \rightarrow \mathbb{R}$. Из (2.11)–(2.13) нетрудно увидеть, что

$$\|S_{n,N}^{\alpha,\beta}(0)\|_{C(\Omega_N)} = \frac{(N-2)^{[n]} \Gamma(n+\alpha+\beta+2) 2^{-\alpha-\beta-1}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]} \Gamma(\beta+1) \Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{t=0}^{N-1} \mu(t) |T_n^{\alpha,\beta+1}(t, N-1)|. \quad (2.14)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $\alpha > -1, \beta > -1/2, a > 0, 0 \leq n \leq aN^{1/2}$. Тогда

$$\|S_{n,N}^{\alpha,\beta}(0)\|_{C(\Omega_N)} \geq c(\alpha, \beta, a) n^{\beta+1/2} \left(1 - c_1(\alpha, \beta, a) \frac{n^2}{N}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся асимптотической формулой (1.29); тогда

$$T_n^{\alpha,\beta} \left[\frac{N-2}{2}(1+x), N-1 \right] = P_n^{\alpha,\beta+1}(x) + V_{n,N-1}^{\alpha,\beta+1}(x), \quad (2.15)$$

где для остаточного члена $V_{n,N-1}^{\alpha,\beta+1}(x)$ справедлива оценка

$$|V_{n,N-1}^{\alpha,\beta+1}(t)| \leq c(\alpha, \beta, a, \varepsilon) \frac{n^{3/2}}{N}, \quad -1 + \varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon. \quad (2.16)$$

Пусть

$$k(\theta) = \pi^{-1/2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-1/2}, \quad \lambda = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = -\left(\frac{\alpha + 1}{2} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Тогда при $0 < \theta < \pi$ имеет место [13] следующая асимптотическая формула:

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos \theta) = n^{-1/2} k(\theta) \left\{ \cos(\lambda\theta + \gamma) + \frac{r_n(\theta)}{n \sin \theta} \right\}, \quad (2.17)$$

для остаточного члена $r_n(\theta) = r_n(\theta; \alpha, \beta)$ которой имеет место оценка

$$|r_n(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, \delta), \quad 0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n}. \quad (2.18)$$

Сопоставляя (2.15)–(2.18), замечаем, что

$$T_n^{\alpha,\beta} \left[\frac{N-2}{2}(1+x), N-1 \right] = n^{-1/2} k(\theta) \cos(\lambda\theta + \gamma) + U_{n,N}^{\alpha,\beta}(\theta), \quad (2.19)$$

где $x = \cos \theta$,

$$|U_{n,N}^{\alpha,\beta}(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, a, \varepsilon) \left(n^{-3/2} + \frac{n^{3/2}}{N} \right), \quad \arccos(\varepsilon) \leq \theta \leq \arccos(\pi - \varepsilon). \quad (2.20)$$

Далее заметим, что из (1.6) и формулы Стирлинга вытекает следующая оценка (здесь $\arccos(\varepsilon) \leq \theta \leq \arccos(\pi - \varepsilon)$):

$$\frac{c_1(\alpha, \beta, \varepsilon)}{N} \leq \mu \left[\frac{N-2}{2}(1 + \cos \theta), \alpha, \beta, N \right] \leq \frac{c_2(\alpha, \beta, \varepsilon)}{N}. \quad (2.21)$$

Пусть $x_t = -1 + 2t/(N-2)$, $\theta_t = \arccos x_t$. Тогда из (2.19)–(2.21) выводим

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{N-1} \mu(t) |T_n^{\alpha, \beta+1}(t, N-1)| \\ &= \sum_{t=0}^{N-1} \mu \left[\frac{N-2}{2}(1 + x_t), \alpha, \beta, N \right] \left| T_n^{\alpha, \beta} \left[\frac{N-2}{2}(1 + x_t), N-1 \right] \right| \\ &> \sum_{-1+\varepsilon \leq x_t \leq 1-\varepsilon} n^{-1/2} k(\theta) |\cos(\lambda\theta + \gamma)| \mu \left[\frac{N-2}{2}(1 + \cos \theta_t), \alpha, \beta, N \right] \\ &\quad - \sum_{-1+\varepsilon \leq x_t \leq 1-\varepsilon} |U_{n,N}^{\alpha, \beta}(\theta_t)| \mu \left[\frac{N-2}{2}(1 + \cos \theta_t), \alpha, \beta, N \right] \\ &\geq \frac{c_1(\alpha, \beta, \varepsilon)}{N n^{1/2}} \sum_{-1+\varepsilon \leq x_t \leq 1-\varepsilon} k(\theta_t) |\cos(\lambda\theta_t + \gamma)| - c(\alpha, \beta, a, \varepsilon) \left(n^{-3/2} + \frac{n^{3/2}}{N} \right) \\ &\geq c(\alpha, \beta, a, \varepsilon) \left(n^{-1/2} - \frac{n^{3/2}}{N} \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Осталось заметить, что если $n \leq aN^{1/2}$, то

$$\begin{aligned} \frac{(N-2)^{[n]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} &\geq \frac{(N-n)^n}{(N+n+\alpha+\beta)^n} = \left(1 - \frac{2n+\alpha+\beta}{N+n+\alpha+\beta} \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{2n+\alpha+\beta}{N+n+\alpha+\beta} \right)^{\frac{N+n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta} \frac{n(2n+\alpha+\beta)}{N+n+\alpha+\beta}} \\ &> e^{-\frac{n(2n+\alpha+\beta)}{N+n+\alpha+\beta}} > c(a, \alpha, \beta) > 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Утверждение леммы 2.1 вытекает из (2.14), (2.22) и (2.23).

Лемма 2.1 показывает, что если $\beta > -1/2$, то норма функционала $S_{n,N}^{\alpha, \beta} = S_{n,N}^{\alpha, \beta}(d, 0)$ растет вместе с n со скоростью $n^{\beta+1/2}$ и, как следствие, оператор частичных сумм $S_{n,N}^{\alpha, \beta} = S_{n,N}^{\alpha, \beta}(d)$, вообще говоря, не является хорошим средством приближения дискретных функций $d \in C(\Omega_N)$, а именно: вблизи точки $x = 0$ приближение функции $d = d(x)$, доставляемое частичной суммой $S_{n,N}^{\alpha, \beta}(d, x)$, может оказаться в $n^{\beta+1/2}$ раз хуже по порядку, чем наилучшее приближение функции d в метрике пространства $C(\Omega_N)$ алгебраическими полиномами степени n . Ситуация ухудшится еще сильнее, если мы предпримем попытку приблизить конечные разности $\Delta^\nu d(x)$ функции d конечными разностями $\Delta^\nu S_{n,N}^{\alpha, \beta}(d, x)$. Это обстоятельство побудило ввести новые *смешанные ряды* по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, M)$, конструкция которых столь же проста как и у рядов Фурье по этим полиномам, а их частичные суммы успешно могут быть использованы в задаче одновременного приближения дискретных функций и их конечных разностей.

3. Смешанные ряды по полиномам $T_n^{\alpha,\beta}(x, M)$. Пусть r и N – натуральные числа. Рассмотрим дискретную функцию $d(x)$, заданную на сетке $\overline{\Omega}_{N+2r} = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$. Положим

$$F(x) = d(x-r), \quad x \in \Omega_{N+2r}, \quad (3.1)$$

$$b(x) = b(x; r, N) = \Delta^r F(x). \quad (3.2)$$

Дискретная функция $b(x)$ определена на сетке Ω_{N+r} и, следовательно, ее можно разложить в конечный ряд Фурье по ортонормированной системе полиномов Чебышева $\{\tau_k^{\alpha,\beta}(x, N+r)\}_{k=0}^{N-1+r}$:

$$b(x) = \sum_{k=0}^{N-1+r} d_{r,k}^{\alpha,\beta} \tau_k^{\alpha,\beta}(x, N+r), \quad (3.3)$$

где $\alpha, \beta > -1$,

$$d_{r,k}^{\alpha,\beta} = d_{r,k}^{\alpha,\beta}(N+r) = \sum_{t \in \Omega_{N+r}} \mu(t) b(t) \tau_k^{\alpha,\beta}(t, N+r). \quad (3.4)$$

Далее, запишем дискретный аналог формулы Тейлора ($x \in \Omega_{N+r}$)

$$\begin{aligned} F(x+1) &= F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!}(x+1) + \frac{\Delta^2 F(0)}{2!}(x+1)^{[2]} + \dots \\ &+ \frac{\Delta^{r-1} F(0)}{(r-1)!}(x+1)^{[r-1]} + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^x (x-t)^{[r-1]} \Delta^r F(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

и подставим здесь вместо выражения $\Delta^r F(t)$ его значение, найденное из (3.2) и (3.3); тогда

$$\begin{aligned} F(x+1) &= F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!}(x+1) + \dots + \frac{\Delta^{r-1} F(0)}{(r-1)!}(x+1)^{[r-1]} \\ &+ \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{N-1+r} d_{r,k}^{\alpha,\beta} \sum_{t=0}^x (x-t)^{[r-1]} \tau_k^{\alpha,\beta}(t, N+r). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая равенство (1.8), мы можем переписать (3.6) еще так:

$$\begin{aligned} F(x+1) &= F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!}(x+1) + \dots + \frac{\Delta^{r-1} F(0)}{(r-1)!}(x+1)^{[r-1]} \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^x (x-t)^{[r-1]} T_k^{\alpha,\beta}(t, N+r). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусть $\lambda = \alpha + \beta$, $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$. Тогда мы можем воспользоваться равенством (1.19). Это дает

$$T_k^{\alpha,\beta}(t, N+r) = \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}} \Delta^r T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(t, N+2r). \quad (3.8)$$

С другой стороны, из формулы (3.5), примененной к функции $T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(t, N+2r)$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^x (x-t)^{[r-1]} \Delta^r T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(t, N+2r) \\ &= T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x+1, N+2r) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Delta^\nu T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(0, N+2r)}{\nu!} (x+1)^{[\nu]}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Далее, в силу (1.16)

$$\Delta^\nu T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(0, N+2r) = \frac{(k+\lambda-r+1)_\nu}{(N-1+2r)^{[\nu]}} T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \beta-r+\nu}(0, N+2r-\nu), \quad (3.10)$$

а из (1.3) имеем

$$T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \beta-r+\nu}(0, N+2r-\nu) = (-1)^{k+r-\nu} \binom{k+\beta}{k+r-\nu} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!}. \quad (3.11)$$

Сопоставляя (3.10) и (3.11), находим

$$\Delta^\nu T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(0, N+2r) = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!(N-1+2r)^{[\nu]}}. \quad (3.12)$$

В дальнейшем мы отдельно рассмотрим два случая:

- 1) $-2 < \lambda$ не целое;
- 2) $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

Пусть λ не целое; тогда каково бы ни было $k = 0, 1, \dots$ выражение $(k+\lambda)^{[r]}$ не обращается в нуль и, следовательно, мы можем воспользоваться равенством (3.8). Это в сочетании с (3.9) и (3.12) дает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^x (x-t)^{[r-1]} T_k^{\alpha, \beta}(t, N+r) \\ &= \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}} T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x+1, N+2r) \\ & \quad - \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu (x+1)^{[\nu]}}{\nu! \Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!(N-1+2r)^{[\nu]}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Сопоставляя (3.1), (3.7) и (3.13), получим

$$d(x-r) = Q_{r-1, N}(d, x) + A_{r-1, N}^{\alpha, \beta}(d, x) + \mathcal{F}_{r, N}^{\alpha, \beta}(d, x), \quad (3.14)$$

где $x \in \Omega_{N+r}$,

$$Q_{r-1,N}(d, x) = d(-r) + \frac{\Delta d(-r)}{1!}x + \dots + \frac{\Delta^{r-1}d(-r)}{(r-1)!}x^{[r-1]}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = & - \sum_{\nu=0}^{r-1} \left(\frac{(-1)^{r-\nu}(N+r)_{r-\nu}}{\nu! \Gamma(\nu-r+\beta+1)} \right. \\ & \times \sum_{k=0}^{N-1+r} \frac{(-1)^k d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{(k+r-\nu)!(k+\lambda)^{[r]}} \Big) x^{[\nu]}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=0}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x, N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}. \quad (3.17)$$

Правую часть равенства (3.14), а также функцию $\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(x) = \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$ будем называть *смешанными рядами* по полиномам Чебышева $T_k^{\alpha,\beta}(x, M)$. Покажем, что если $r \leq N$, то равенство (3.14) останется в силе для всех $x \in \Omega_{N+2r}$, а не только для $x \in \Omega_{N+r}$. В самом деле, рассмотрим функцию $\bar{d}(x) = d(N-1-x)$, $x \in \bar{\Omega}_{N+2r}$. Тогда, полагая $\bar{F}(x) = \bar{d}(x-r) = d(N-1-x+r) = F(N-1+2r-x)$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta^r \bar{F}(t) &= \sum_{l=0}^r (-1)^{r+l} \binom{r}{l} \bar{F}(t+l) = \sum_{l=0}^r (-1)^{r+l} \binom{r}{l} F(N-1+2r-l-t) \\ &= \sum_{\nu=0}^r (-1)^{2r-\nu} \binom{r}{r-\nu} F(N-l+r+\nu-t) \\ &= (-1)^r \sum_{\nu=0}^r (-1)^{r+\nu} \binom{r}{\nu} F(N-1+r-t+\nu) = (-1)^r \Delta^r F(N-1+r-t) \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\bar{b}(t) = \Delta^r \bar{F}(t) = (-1)^r \Delta^r F(N-1+r-t) = (-1)^r b(N-1+r-t).$$

Поэтому в силу симметрии (1.12) имеем

$$\begin{aligned} \bar{b}_k^{\beta,\alpha}(N+R) &= \sum_{t \in \Omega_{N+r}} \mu(t; \beta, \alpha, N+r) \tau_k^{\beta,\alpha}(t, N+r) \bar{b}(t) \\ &= (-1)^r \sum_{t \in \Omega_{N+r}} \mu(t; \beta, \alpha, N+r) \tau_k^{\beta,\alpha}(t, N+r) b(N-1+r-t) \\ &= (-1)^{r+k} \sum_{t \in \Omega_{N+r}} \mu(N-1+r-t; \alpha, \beta, N+r) \\ &\quad \times \tau_k^{\alpha,\beta}(N-1+r-t, N+r) b(N-1+r-t) \\ &= (-1)^{r+k} b_k^{\alpha,\beta}(N+r), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\frac{(-1)^{r+k}}{\{h_{k,N}^{\beta,\alpha}\}^{1/2}} T_{k+r}^{\beta-r,\alpha-r}(x, N+2r) = \frac{1}{\{h_{k,N}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(N-1+2r-x, N+2r).$$

Отсюда и из (3.25) выводим

$$\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, N-1+2r-x) = \mathcal{F}_{r,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, x). \quad (3.19)$$

Докажем теперь, что если $r \leq N$, то равенство (3.14) справедливо при всех $x \in \Omega_{N+2r}$. С этой целью положим

$$p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(x) = Q_{r-1,N}(d, x) + A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) \quad (3.20)$$

и перепишем равенство (3.14) так:

$$d(x-r) = p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x), \quad x \in \Omega_{N+r}, \quad (3.21)$$

и, аналогично,

$$\bar{d}(x-r) = p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, x), \quad x \in \Omega_{N+r}. \quad (3.22)$$

Равенство (3.22) с учетом (3.19) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} d(N-1+r-x) &= p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, x) \\ &= p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, N-1+2r-x), \quad x \in \Omega_{N+r}, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$d(x-r) = p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, N-1+2r-x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x), \quad (3.23)$$

где $N-1+2r-x \in \Omega_{N+r}$, т.е. $x \in \{r, r+1, \dots, N-1+2r\}$. Сопоставляя (3.21) с (3.23), замечаем, что

$$p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, N-1+2r-x), \quad x \in \{r, r+1, \dots, N-1+2r\}. \quad (3.24)$$

Поскольку $p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$ и $p_{r-1,N}^{\beta,\alpha}(\bar{d}, N-1+2r-x)$ представляют собой алгебраические полиномы степени $r-1 < N$, из (3.24) следует, что они тождественно равны. Поэтому равенство (3.23) в сочетании с (3.21) дает

$$d(x-r) = p_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x), \quad x \in \Omega_{N+2r}.$$

Тем самым, доказано, что равенство (3.14) справедливо для всех $x \in \Omega_{N+2r}$. Подводя итоги, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\lambda = \alpha + \beta$ не целое, $r \leq N$, $x \in \Omega_{N+2r}$. Тогда для произвольной дискретной функции $d = d(x)$, заданной на множестве $\overline{\Omega}_{N+2r} = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$, имеет место равенство

$$d(x-r) = Q_{r-1,N}(d, x) + A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x),$$

где функции $Q_{r-1,N}(d, x)$, $A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$, $\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$ определены равенствами (3.15)–(3.17).

Перейдем теперь к случаю, когда $\lambda = \alpha + \beta \in \{-1, 0, 1\}$. Перепишем (3.7) следующим образом:

$$d(x-r) = Q_{r-1,N}(d, x) + B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d, x) + G_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x), \quad (3.25)$$

где

$$B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = \sum_{k=0}^{r-\lambda-1} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-1} (x-t)^{[r-1]} T_k^{\alpha,\beta}(t, N+r) \quad (3.26)$$

– алгебраический полином степени $2r-1-\lambda$,

$$G_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = \sum_{k=r-\lambda}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-1} (x-t)^{[r-1]} T_k^{\alpha,\beta}(t, N+r). \quad (3.27)$$

Если $k + \lambda \geq r$, то $(k + \lambda)^{[r]} > 0$ и для таких k можем воспользоваться равенством (3.8) и вытекающим отсюда равенством (3.13). Тогда (3.27) мы можем переписать так:

$$G_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x), \quad (3.28)$$

где

$$E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = - \sum_{\nu=0}^{r-1} \left(\frac{(-1)^{r-\nu} (N+r)_{r-\nu}}{\nu! \Gamma(\nu-r+\beta+1)} \times \sum_{k=r-\lambda}^{N-1+r} \frac{(-1)^k d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{(k+r-\nu)!(k+\lambda)^{[r]}} \right) x^{[\nu]}, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=r-\lambda}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x, N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}. \quad (3.30)$$

Сопоставляя (3.25)–(3.30), получаем следующий смешанный ряд в случае $\lambda = \alpha + \beta \in \{-1, 0, 1\}$:

$$d(x-r) = Q_{r-1,N}(d, x) + B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d, x) + E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x), \quad (3.31)$$

где $x \in \Omega_{N+r}$.

Если $2r \leq N-1$, то совершенно аналогично тому, как это было сделано выше в случае дробного λ , доказывается, что равенство (3.31) также верно для всех $x \in \Omega_{N+2r}$.

4. Смешанный ряд по полиномам $T_n^{0,0}(x, M)$. В случае $\alpha = \beta = 0$ смешанный ряд (3.17) принимает следующий вид ($\lambda = 0$, $d_{r,k} = d_{r,k}^{0,0}$):

$$\mathcal{F}_{r,N}(d, x) = \mathcal{F}_{r,N}^{0,0}(d, x) = (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{\{h_{k,N+r}^{0,0}\}^{1/2}} \frac{T_{k+r}^{-r,-r}(x, N+2r)}{k^{[r]}}. \quad (4.1)$$

С другой стороны, из (1.17) имеем

$$T_n^{-r,-r}(x, N+2r) = \frac{(-1)^r x^{[r]} (N+2r-x-1)^{[r]}}{(N-1+2r)^{[r]} (N-1+r)^{[r]}} T_{n-r}^{r,r}(x-r, N). \quad (4.2)$$

Из (4.1) и (4.2) находим

$$\mathcal{F}_{r,N}(d, x) = \frac{(-1)^r x^{[r]} (N+2r-x-1)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} \frac{T_{n-r}^{r,r}(x-r, N)}{\{h_{k,N+r}^{0,0}\}^{1/2}}. \quad (4.3)$$

Подставляя это значение в (3.31), получаем

$$d(x) = q_{2r-1,N}(x) + \frac{(-1)^r (x+r)^{[r]} (N-1+r-x)^{[r]}}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} \frac{T_{n-r}^{r,r}(x, N)}{\{h_{k,N+r}^{0,0}\}^{1/2}}, \quad (4.4)$$

где $x \in \overline{\Omega}_{N+2r}$,

$$q_{2r-1,N}(x) = Q_{r-1,N}(d, x+r) + B_{2r-1,N}^{0,0}(d, x+r) + E_{r-1,N}^{0,0}(d, x+r)$$

— полином степени $2r-1$. Из (4.4) следует, что полином $q_{2r-1,N}(x)$ совпадает с функцией $d(x)$ при $x \in \{-r, \dots, -1\} \cup \{N, \dots, N-1+r\}$. Поэтому $q_{2r-1,N}(x)$ имеет вид

$$q_{2r-1,N}(x) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \frac{(x+1)_r (N-x)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r} \left[\frac{d(-i)}{x+i} + \frac{d(N-1+i)}{N-1+i-x} \right]. \quad (4.5)$$

Сопоставляя (4.4) и (4.5), можем записать смешанный ряд в следующем виде:

$$\begin{aligned} d(x) = & \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \frac{(x+1)_r (N-x)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r} \left[\frac{d(-i)}{x+i} + \frac{d(N-1+i)}{N-1+i-x} \right] \\ & + \frac{(-1)^r (x+1)_r (N-x)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} \frac{T_{n-r}^{r,r}(x, N)}{\{h_{k,N+r}^{0,0}\}^{1/2}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $x \in \overline{\Omega}_{N+2r} = \{-r, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$.

5. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$. Запишем равенства (3.14) и (3.24) в следующем виде:

$$d(x) = q^{\alpha,\beta}(x) + \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x+r), \quad (5.1)$$

где $q^{\alpha,\beta}(x)$ – некоторый (явно заданный) алгебраический полином степени не выше, чем $2r$, причем

$$\deg q^{\alpha,\beta}(f, x) = \begin{cases} 2r-1-\lambda, & \lambda \in \{-1, 0, 1\}, \\ r-1, & \lambda \text{ дробное}, \end{cases} \quad (5.2)$$

$\lambda = \alpha + \beta$. Представим $\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x+r)$ в следующем виде:

$$\mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x+r) = \mathcal{F}_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x+r) + R_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x+r), \quad (5.3)$$

где

$$\mathcal{F}_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x) = (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=\bar{r}}^{n+r} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x, N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}, \quad (5.4)$$

$$\bar{r} = \begin{cases} r-\lambda, & \lambda \in \{-1, 0, 1\}, \\ 0, & \lambda \text{ дробное}, \end{cases}$$

$$R_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x) = \mathcal{F}_{r,N}^{\alpha,\beta}(d, x) - \mathcal{F}_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x). \quad (5.5)$$

Через $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$ обозначим полином степени $n+2r$, определенный с помощью следующего равенства:

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x) = q^{\alpha,\beta}(x) + \mathcal{F}_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x+r), \quad (5.6)$$

где

$$q^{\alpha,\beta}(x-r) = \begin{cases} Q_{r-1,N}(d, x) + A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x), & \lambda \text{ дробное}, \\ Q_{r-1,N}(d, x) + B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d, x) + E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x), & \lambda \in \{-1, 0, 1\}, \end{cases}$$

а полиномы $Q_{r-1,N}(d, x)$, $A_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$, $B_{2r-1-\lambda,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$ и $E_{r-1,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$ определены равенствами (3.15), (3.16), (3.26) и (3.29) и имеют степени $r-1$, $r-1$, $2r-1-\lambda$ и $r-1$ соответственно. Из (5.1), (5.3)–(5.6) имеем

$$d(x-r) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r) + R_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x). \quad (5.7)$$

Установим связь между оператором $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$ и оператором частичной суммы Фурье–Чебышева $S_{n,N+2r}^{\alpha,\beta} = S_{n,N+2r}^{\alpha,\beta}(f)$, определенным в (2.5). Мы ограничимся здесь рассмотрением важного частного случая, когда $\alpha = \beta$. Перепишем сумму $\mathcal{F}_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x) = \mathcal{F}_{r,N,n}^{\alpha,\alpha}(d, x)$, определенную равенством (5.4), следующим образом:

$$\mathcal{F}_{r,N,n}^{\alpha,\alpha}(d, x) = \mathcal{F}_{r,N,n-2r}^{\alpha,\alpha}(d, x) + I_{r,N,n}^{\alpha,\alpha}(d, x),$$

где $n \geq 2r$,

$$I_{r,N,n}^{\alpha}(d, x) = (N - 1 + 2r)^{[r]} \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\alpha}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\alpha}\}^{1/2}} \frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x, N + 2r)}{(k + \lambda)^{[r]}}. \quad (5.8)$$

Пользуясь леммой 1.1, можем записать

$$\begin{aligned} I_{r,N,n}^{\alpha}(d, x) &= \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{(N - 1 + 2r)^{[r]}}{(k + \lambda)^{[r]}} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\alpha}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\alpha}\}^{1/2}} \sum_{j=0}^r \lambda_j^{\alpha} T_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x, N + 2r) \\ &= \varphi_{r,N,n}^{\alpha}(x) + \psi_{r,N,n}^{\alpha}(x), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{r,N,n}^{\alpha}(x) &= \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{(N - 1 + 2r)^{[r]}}{(k + \lambda)^{[r]}} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\alpha}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\alpha}\}^{1/2}} \\ &\quad \times \sum_{j=[(k+r-n-1)/2]+1}^r \lambda_j^{\alpha} T_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x, N + 2r), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \psi_{r,N,n}^{\alpha}(x) &= \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{(N - 1 + 2r)^{[r]}}{(k + \lambda)^{[r]}} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\alpha}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\alpha}\}^{1/2}} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{[(k+r-n-1)/2]} \lambda_j^{\alpha} T_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x, N + 2r), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $[a]$ — целая часть числа a . Сопоставляя (5.6)–(5.9), можем записать

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\alpha}(d, x) = q^{\alpha,\alpha}(x) + \mathcal{F}_{r,N,n-2r}^{\alpha}(d, x+r) + \varphi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) + \psi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r), \quad (5.12)$$

а из (5.7) имеем

$$d(x) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\alpha}(d, x) + R_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r), \quad x \in \overline{\Omega}_{N+2r}. \quad (5.13)$$

Сопоставляя (5.12) и (5.13), находим

$$\begin{aligned} d(x) &= q^{\alpha,\alpha}(x) + \mathcal{F}_{r,N,n-2r}^{\alpha}(d, x+r) + \varphi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) \\ &\quad + \psi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) + R_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r), \quad x \in \overline{\Omega}_{N+2r}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Покажем, что $(x \in \overline{\Omega}_{N+2r})$

$$q^{\alpha,\alpha}(x) + \mathcal{F}_{r,N,n-2r}^{\alpha}(d, x+r) + \varphi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) = S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d}, x+r), \quad (5.15)$$

где $S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d}, x+r)$ — частичная сумма Фурье функции $\bar{d}(x) = d(x-r)$ порядка n по полиномам Чебышева $T_k^{\alpha,\alpha}(x, N+2r)$, $k = 0, 1, \dots, N+2r-1$ (см. (2.5)). В самом деле, левая часть равенства (5.15) представляет собой алгебраический полином степени n , поэтому

$$q^{\alpha,\alpha}(x) + \mathcal{F}_{r,N,n-2r}^{\alpha}(d, x+r) + \varphi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) = \sum_{l=0}^n v_l T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r). \quad (5.16)$$

Далее, из (5.11) следует, что

$$\psi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) = \sum_{l=n+1}^{n+2r} q_l T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r), \quad (5.17)$$

а из (5.5) заключаем

$$\begin{aligned} R_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) &= (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\alpha}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\alpha}\}^{1/2}} \frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x+r, N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}} \\ &= \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N-1+2r)^{[r]}}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\alpha}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\alpha}\}^{1/2}} \sum_{j=0}^r \lambda_j^{\alpha} T_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r) \\ &= \sum_{l=n+1}^{N-1+2r} a_l T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Сопоставляя (5.14), (5.16)–(5.18), замечаем, что

$$\begin{aligned} d(x) &= \sum_{l=0}^n v_l T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r) + \sum_{l=n+1}^{n+2r} (q_l + a_l) T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r) \\ &\quad + \sum_{l=n+2r+1}^{N-1+2r} a_l T_l^{\alpha,\alpha}(x+r, N+2r), \end{aligned}$$

где $x \in \overline{\Omega}_{N+2r}$. Заменим здесь x на $x-r$; тогда

$$\begin{aligned} d(x-r) &= \sum_{l=0}^n v_l T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r) + \sum_{l=n+1}^{n+2r} (q_l + a_l) T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r) \\ &\quad + \sum_{l=n+2r+1}^{N-1+2r} a_l T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r), \quad x \in \Omega_{N+2r}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Но, так как система $\{T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r)\}_{l=0}^{N-1+2r}$ при $\alpha > -1$ ортогональна на Ω_{N+2r} , правая часть равенства (5.19) представляет собой разложение функции $\bar{d}(x) = d(x-r)$ в ряд Фурье по этой системе и, стало быть,

$$\sum_{l=0}^n v_l T_l^{\alpha,\alpha}(x, N+2r) = S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d}, x), \quad x \in \Omega_{N+2r}. \quad (5.20)$$

Сравнивая (5.16) с (5.20), приходим к равенству (5.15). Тогда (5.14) мы можем переписать так:

$$d(x) = S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d}, x+r) + \psi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r) + R_{r,N,n}^{\alpha}(d, x+r), \quad x \in \overline{\Omega}_{N+2r}. \quad (5.21)$$

Отсюда и из (5.13) выводим искомую связь между оператором $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\alpha}(d)$ и оператором частичной суммы Фурье $S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d})$:

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha}(d, x) = S_{n,N+2r}^{\alpha}(\bar{d}, x + r) + \psi_{r,N,n}^{\alpha}(d, x + r). \quad (5.22)$$

Другое важное свойство операторов $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x)$ выражается равенством

$$\begin{aligned} \Delta^{\nu} d(x - r) - \Delta^{\nu} \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x - r) \\ = R_{r-\nu, N+\nu, n+\nu}^{\alpha,\beta}(\Delta^{\nu} d, x) \\ = \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N + \nu - 1 + 2(r - \nu))^{[r-\nu]} d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k + \lambda)^{[r-\nu]} \{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \beta-r+\nu}(x, N + \nu + 2(r - \nu)), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где $0 \leq \nu \leq r - 1$. В самом деле, из (5.7) имеем

$$\begin{aligned} d(x - r) - \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x - r) &= R_{r,N,n}^{\alpha,\beta}(d, x) \\ &= \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N - 1 + 2r)^{[r]} d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k + \lambda)^{[r]} \{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x, N + 2r) \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \Delta^{\nu} d(x - r) - \Delta^{\nu} \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x - r) \\ = \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N - 1 + 2r)^{[r]} d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k + \lambda)^{[r]} \{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \Delta^{\nu} T_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x, N + 2r). \end{aligned}$$

Если мы воспользуемся равенством (1.16), то получим отсюда (5.23).

6. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}$. Будем рассматривать оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta} = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$ как аппарат приближения дискретных функций, заданных на сетке $\bar{\Omega}_{N+2r}$. При этом нам понадобятся некоторые обозначения. Положим

$$B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) = \max \left\{ \frac{|T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \beta-r+\nu}(x, N + 2r - \nu)|}{\sqrt{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}}} : n + r + 1 \leq k \leq N - 1 + r \right\}, \quad (6.1)$$

$$H_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{(\sqrt{\frac{x+1}{N}} + \frac{1}{n})^{\beta} (\sqrt{1 - \frac{x}{N+2r}} + \frac{1}{n})^{\alpha}}{(\sqrt{\frac{x+1}{N}} + \frac{1}{n})^{r-\nu-1/2} (\sqrt{1 - \frac{x}{N+2r}} + \frac{1}{n})^{r-\nu-1/2}} B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N), \quad (6.2)$$

$$\chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N) = \max \{ H_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) : x \in \Omega_{N+2r} \}. \quad (6.3)$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что

$$B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) \leq \chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N) \left(\sqrt{\frac{x+1}{N}} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta+r-\nu-1/2} \left(\sqrt{1 - \frac{x}{N+2r}} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}. \quad (6.4)$$

С произвольной дискретной функцией $d = d(x)$, заданной на сетке $\overline{\Omega}_{N+2r}$, мы свяжем дискретную функцию

$$g(x) = \frac{N-1+2r}{2} \Delta^r d(x-r),$$

определенную на Ω_{N+r} . Пусть $E_{n+r}(g)_{\ell_{2,\mu}^{N+r}}$ представляет собой наилучшее приближение функции $g(x)$ в пространстве $\ell_{2,\mu}^{N+r}$ алгебраическими полиномами степени $n+r$. Тогда мы можем сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.1. *Если $\alpha, \beta > -1$, $\lambda = \alpha + \beta$, $1 \leq r$ целое, $0 \leq \nu \leq r-1$, $x \in \Omega_{N+2r-\nu}$, то имеет место оценка*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^\nu |\Delta^\nu d(x-r) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r)| \\ & \leq B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) 2^{r-\nu} \left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{1}{((k+\lambda)^{[r-\nu]})^2} \right)^{1/2} E_{n+r}(g)_{\ell_{2,\mu}^{N+r}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к равенству (5.23). С учетом введенных выше обозначений имеем

$$|\Delta^\nu d(x-r) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r)| \leq B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N-1+2r-\nu)^{[r-\nu]}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}} |d_{r,k}^{\alpha,\beta}|.$$

Отсюда имеем ($0 \leq \nu \leq r-1$)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^\nu |\Delta^\nu d(x-r) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r)| \\ & \leq B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) \left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^\nu \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N-1+2r-\nu)^{[r-\nu]} |d_{r,k}^{\alpha,\beta}|}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}} \\ & \leq B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) \left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^r \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{2^{r-\nu} |d_{r,k}^{\alpha,\beta}|}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}} \\ & \leq B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) 2^{r-\nu} \left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{1}{((k+\lambda)^{[r-\nu]})^2} \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \left[\left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^r |d_{r,k}^{\alpha,\beta}|^2 \right] \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В силу (3.2)–(3.4) замечаем, что

$$\left(\sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \left[\left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^r |d_{r,k}^{\alpha,\beta}|^2 \right] \right)^{1/2} = E_{n+r}(g)_{\ell_{2,\mu}^{N+r}}. \quad (6.7)$$

Сопоставляя (6.6) и (6.7), приходим к утверждению теоремы 6.1.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. В условиях теоремы 6.1 имеет место следующая оценка ($x \in \Omega_{N+2r-\nu}$):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^\nu |\Delta^\nu d(x-r) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r)| \\ & \leq c(\lambda, r) \chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N) \frac{E_{n+r}(g)_{\ell_{2,\mu}^{N+r}}}{n^{r-\nu-1/2}} \left(\sqrt{\frac{x+1}{N}} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta+r-\nu-1/2} \\ & \quad \times \left(\sqrt{1 - \frac{x}{N+2r}} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $c(\lambda, r)$ – положительное число, зависящее лишь от указанных параметров.

В самом деле, из теоремы 6.1 нетрудно увидеть, что

$$\left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^\nu |\Delta^\nu d(x-r) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, x-r)| \leq c(\lambda, r) B_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(x, N) \frac{E_{n+r}(g)_{\ell_{2,\mu}^{N+r}}}{n^{r-\nu-1/2}}. \quad (6.9)$$

Если мы воспользуемся оценкой (6.4), то из (6.9) получим (6.8).

ЗАМЕЧАНИЕ. Эксперимент, проведенный с помощью ЭВМ, показал, что число $\chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N)$ не имеет тенденции к неограниченному росту при $N, n \rightarrow \infty$.

7. Операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$. В предыдущих пунктах были рассмотрены операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$, действующие в пространствах дискретных функций вида $d: \overline{\Omega}_{N+2r} \rightarrow \mathbb{R}$. Отправляясь от этих операторов, построим здесь операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$, действующие в пространстве непрерывных функций $C[-1, 1]$, и исследуем их аппроксимативные свойства. Пусть функция $f = f(x)$ определена в узлах сетки

$$H_\Lambda = \left\{ x_j = -1 + \frac{2j}{\Lambda-1} \right\}_{j=0}^{\Lambda-1},$$

где $\Lambda = N + 2r$, $N, r \in \mathbb{N}$. Определим на сетке $\overline{\Omega}_\Lambda = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N, \dots, N-1+r\}$ дискретную функцию $d: \overline{\Omega}_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$d(j-r) = f(x_j), \quad j \in \Omega_\Lambda. \quad (7.1)$$

Тогда для функции $d = d(j)$ мы можем построить полином $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$ с помощью равенства (5.6). Положим

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta} \left(d, \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r \right). \quad (7.2)$$

Ясно, что $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x)$ вместе с $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, t)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$. Поэтому мы можем рассмотреть $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$ как оператор, действующий в пространстве $C[-1, 1]$. Отметим следующие свойства оператора $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f)$, непосредственно вытекающие из свойств оператора $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d)$. Из (7.2) и (5.7) имеем

$$\begin{aligned} f(x_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x_j) &= d(j-r) - \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, j-r) = R_{r,n}^{\alpha,\beta}(d, j) \\ &= (N-1+2r)^{[r]} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{\{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} \frac{T_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(j, N+2r)}{(k+\lambda)^{[r]}}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Если мы положим $\sigma = 2/(N - 1 + 2r)$, то из (5.23) в сочетании с (7.1) выводим

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma}^{\nu} f(x_j) - \Delta_{\sigma}^{\nu} \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x_j) \\ = \Delta^{\nu} d(j-r) - \Delta^{\nu} \mathcal{Y}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(d, j-r) \\ = \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{(N+\nu-1+2(r-\nu))^{[r-\nu]} d_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]} \{h_{k,N+r}^{\alpha,\beta}\}^{1/2}} T_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \beta-r+\nu}(j, N+\nu+2(r-\nu)), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $0 \leq \nu \leq r-1$, Δ_{σ}^{ν} – конечная разность порядка ν с шагом σ . Если мы обратимся к оценке (6.8), то из (7.4) получим ($0 \leq j \leq N+2r-\nu-1$)

$$\begin{aligned} \sigma^{-\nu} |\Delta_{\sigma}^{\nu} f(x_j) - \Delta_{\sigma}^{\nu} \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x_j)| \\ \leq c(\lambda, r) \chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N) \frac{E_{n+r}(g) \ell_{2,\mu}^{N+r}}{n^{r-\nu-1/2}} \left(\sqrt{\frac{j+1}{N}} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta+r-\nu-1/2} \\ \times \left(\sqrt{1 - \frac{j}{N+2r}} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $g(j) = \sigma^{-\nu} \Delta^r d(j-r)$. Отсюда, воспользовавшись известной формулой

$$\sigma^{-\nu} [\Delta_{\sigma}^{\nu} f(x_j) - \Delta_{\sigma}^{\nu} \mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x_j)] = f^{(\nu)}(x_j + \nu\sigma\theta_j) - (\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x_j + \nu\sigma\theta_j))^{(\nu)},$$

где $0 < \theta_j < 1$, в предположении ν -кратной непрерывной дифференцируемости функции $f = f(x)$ получим

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(x_j + \nu\sigma\theta_j) - (\mathcal{X}_{n+2r,N}^{\alpha,\beta}(f, x_j + \nu\sigma\theta_j))^{(\nu)}| \\ \leq c(\lambda, r) \chi_{n,r,\nu}^{\alpha,\beta}(N) \frac{E_{n+r}(g) \ell_{2,\mu}^{N+r}}{n^{r-\nu-1/2}} \left(\sqrt{\frac{j+1}{N}} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta+r-\nu-1/2} \\ \times \left(\sqrt{1 - \frac{j}{N+2r}} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha+r-\nu-1/2}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где $0 < \theta_j < 1$, $0 \leq j \leq N+2r-\nu$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шарапудинов И. И. Приближений функций с переменной гладкостью суммами Фурье по ортогональным полиномам // Международная конференция “Теория приближений и гармонический анализ” (26–29 мая 1998 г.). Тула, 1998. С. 275.
- [2] Шарапудинов И. И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Тезисы докладов (27 января–4 февраля 1999 г.). Воронеж, 1999. С. 204.
- [3] Шарапудинов И. И. Исправленные суммы Фурье по ортогональным полиномам и их аппроксимативные свойства // Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Тезисы докладов (27 января–4 февраля 2001 г.). Воронеж, 2001. С. 289–290.

- [4] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы (28 января–4 февраля 2002 г.). Саратов, 2002. С. 228–229.
- [5] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам, ортогональным на дискретных сетках // Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Тезисы докладов (26 января–2 февраля 2003 г.). Воронеж, 2003. С. 285–286.
- [6] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и методы их дискретизации в Чебышевском случае // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 19. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы шестой Казанской международной летней школы-конференции (Казань, 27 июня–4 июля 2003 г.). Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2003.
- [7] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по некоторым ортогональным системам и их приложения // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы (27 января–3 февраля 2004 г.). Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2004. С. 205–206.
- [8] Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 3. С. 115–148.
- [9] Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{U}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 5. С. 765–795.
- [10] Шарапудинов И. И. Многочлены, ортогональные на дискретных сетках. Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.
- [11] Karlin S., McGregor J. L. The Hahn polynomials, formulas and an application // Scripta Math. 1961. V. 26. № 1. P. 33–46.
- [12] Gasper G. Positivity and special functions // Theory and Application of Special Functions Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1975) / ed. R. A. Askey. Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Publ. No. 35. New York: Academic Press, 1975. P. 375–433.
- [13] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.