Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, Природа буферности, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 238–241

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:44:58

УДК 517.9

ПРИРОДА БУФЕРНОСТИ

Ю. С. Колесов

Сформулирована теорема о неустойчивости автомодельных циклов и торов определенного типа в системе, являющейся квазинормальной формой краевой задачи для нелинейного волнового уравнения в квадрате.

Библиография: 1 название.

Если нелинейная краевая задача для некоторого волнового уравнения имеет большое число устойчивых пространственно неоднородных циклов, устроенных достаточно однотипно, то принято говорить о *явлении буферности*. К настоящему времени обнаружено, что при различном выборе краевых условий для волновых уравнений на отрезке данное явление типично. Однако, в плоской области, как показано в [1], где при нулевых граничных условиях рассмотрено часто встречающееся волновое уравнение, явление буферности места не имеет. Поэтому возникает вопрос о природе буферности при других граничных условиях. По ряду причин наиболее естественными представляются граничные условия Неймана.

1. Ниже рассматривается бифуркационная проблема для того же уравнения, что и в [1], но при условиях непроницаемости на границе Γ некоторой ограниченной плоской области Ω :

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u^2 u_t + \delta^2 u = \Delta u, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, ε – малый положительный параметр, $\delta > 0$ – постоянная, ν – направление внешней нормали в произвольной точке Γ . Фазовым пространством считаем произведение соболевских пространств $\dot{W}_2^2 \times W_2^1$.

Ограничимся описанием полученных результатов для трех случаев:

Ω – единичный квадрат, т.е. $0 \leq x, y \leq 1$;

Ω – прямоугольник, т.е. $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$, $l_1 \neq l_2$;

Ω – треугольник, задаваемый неравенствами $x, y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

Начнем со второго случая, для которого явление буферности имеет место. В этом случае устойчивые циклы одномерны в том смысле, что каждый из них зависит только от одной пространственной переменной.

Наиболее неожиданным оказалось, что в первом случае буферность связана с наличием большого числа в определенном смысле симметричных пар мод.

Эти два примера подсказывают, что, вероятно, явление буферности, если оно в принципе возможно, в отмеченном выше смысле связано с одномерностью бифурцирующих циклов.

В третьем случае оператор Лапласа не имеет нетривиальных собственных функций, зависящих от одной пространственной переменной, что объясняет полученный результат: неустойчивы все пространственно неоднородные циклы и торы, бифурцирующие из нулевого состояния равновесия.

Во втором и третьем пунктах мы кратко опишем доказательство одного результата, связанного с первым случаем.

2. Пусть Ω – квадрат. Тогда если в (1) отбросить нелинейность и положить $\varepsilon = 0$, то решения получившейся линейной краевой задачи осциллируют с частотным набором:

$$\omega_{00} = \delta, \quad \omega_{kn} = \pi \sqrt{\delta^2 + k^2 + n^2}, \quad k + n > 0, \quad k, n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Нормированные собственные функции, по которым естественным образом разлагаются в ряд Фурье решения линейной краевой задачи, соответственно равны

$$\begin{aligned} u_{00} &= 1, \quad u_{kn} = 2 \cos k\pi x \cos n\pi y, \quad k, n = 1, 2, \dots, \\ u_{k0} &= \sqrt{2} \cos k\pi x, \quad u_{0n} = \sqrt{2} \cos n\pi y. \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с идеологией метода квазинормальных форм решения краевой задачи (1) представляем в виде

$$u = \varepsilon^{1/2} u_0 + \varepsilon^{3/2} u_1 + \dots, \quad (4)$$

где $u_0 = \sum [v_{kn}(\tau) \exp(i\omega_{kn}t) + \text{к.с.}] u_{kn}(x, y)$, $\tau = \varepsilon t$ – медленное время, к.с. – принятое сокращение для обозначения комплексно сопряженной величины, гладкая функция $u_1 = u_1(\tau, t, x, y)$ гармонична по t .

Подставляя (4) в (1) и приравнивая коэффициенты при степенях $\varepsilon^{3/2}$, во времени τ для переменных v_{kn} и $\bar{v}_{kn}$ получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, структура которых существенно зависит от резонансов третьего порядка частотного набора (2). С учетом специфики задачи в [1] показано, что возможны только тождественные резонансы, к которым, в частности, относится каждое из формальных равенств

$$\omega_{kn} = 2\omega_{nk} - \omega_{kn}, \quad k + n > 0, \quad k, n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Отметим, что для прямоугольной области они невозможны.

Из (3), (5) следует, что в квадрате квазинормальная форма краевой задачи (1) устроена следующим образом:

$$\begin{aligned} 2 \frac{dv_{kn}}{d\tau} &= v_{kn} - \frac{9}{4} v_{kn} |v_{kn}|^2 - \bar{v}_{kn} v_{nk}^2 - 2v_{kn} \sum_{p \neq k, s \neq n} |v_{ps}|^2 \\ &\quad - 3v_{kn} \sum_{p \neq k} |v_{pn}|^2 - 3v_{kn} \sum_{s \neq n} |v_{ks}|^2, \quad k, n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{dv_{k0}}{d\tau} &= v_{k0} - \frac{3}{2} v_{k0} |v_{k0}|^2 - \bar{v}_{k0} v_{0k}^2 \\ &\quad - 2v_{k0} \sum_{p \neq k} |v_{ps}|^2 - 3v_{k0} \sum_{s \neq 0} |v_{ks}|^2, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

$$2\frac{dv_{0n}}{d\tau} = v_{0n} - \frac{3}{2}v_{0n}|v_{0n}|^2 - \bar{v}_{0n}v_{n0}^2 - 2v_{0n} \sum_{s \neq n} |v_{ps}|^2 - 3v_{0n} \sum_{s \neq 0} |v_{sn}|^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$2\frac{dv_{00}}{d\tau} = v_{00} - v_{00}|v_{00}|^2 - 2v_{00} \sum_{s=p \neq 0} |v_{ps}|^2. \quad (9)$$

Система (6)–(9) дополняется аналогичными уравнениями для $\bar{v}_{kn}$, $k, n = 0, 1, \dots$.

3. Краевая задача (1) при любом выборе области имеет пространственно однородный цикл, устойчивость которого просто обосновывается без привлечения метода квазинормальных форм.

ТЕОРЕМА. Среди автомодельных циклов и торов системы (6)–(9), у которых ненулевыми являются только координаты с не равными одновременно нулю индексами $k, n \leq N_0$, орбитально экспоненциально устойчивы пространственно неоднородные циклы, связанные с v_{kn} и v_{nk} , $k \neq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы достаточно громоздко. Поэтому ограничимся важным случаем, когда некоторые v_{k0} и v_{0k} отличны от нуля, а остальные переменные системы (6)–(9) являются нулевыми. При этом условии после соответствующего сужения уравнений (7), (8) приходим к системе

$$2\dot{r}_{k0} = \left(1 - \frac{3}{2}r_{k0}^2 - 2r_{0k}^2 - r_{0k}^2 \cos 2\alpha_{k0}\right)r_{k0}, \quad (10)$$

$$2\dot{r}_{0k} = \left(1 - \frac{3}{2}r_{0k}^2 - 2r_{k0}^2 - r_{k0}^2 \cos 2\alpha_{k0}\right)r_{0k}, \quad (11)$$

$$2\dot{\alpha}_{k0} = (r_{k0}^2 + r_{0k}^2) \sin 2\alpha_{k0}, \quad (12)$$

где $v_{k0} = r_{k0} \exp(i\varphi_{k0})$, $v_{0k} = r_{0k} \exp(i\varphi_{0k})$, $\alpha_{k0} = \varphi_{k0} - \varphi_{0k}$. Из (12) следует, что $2\alpha_{k0} \rightarrow \pi$ при $\tau \rightarrow \infty$. Это обстоятельство позволяет перейти от (10), (11) к системе

$$\dot{\rho}_{k0} = \left(1 - \frac{3}{2}\rho_{k0} - \rho_{0k}\right)\rho_{k0}, \quad \dot{\rho}_{0k} = \left(1 - \frac{3}{2}\rho_{0k} - \rho_{k0}\right)\rho_{0k},$$

где $\rho_{k0} = r_{k0}^2$, $\rho_{0k} = r_{0k}^2$, аттрактор которой – состояние равновесия $(2/5, 2/5)$.

Итак, при анализе системы (6)–(9) переменные можно считать вещественными, если изменить знак перед третьими слагаемыми в уравнениях (6)–(8). При этом удобно перейти к переменным $\rho_{kn} = v_{kn}^2$, $k, n = 0, 1, \dots$, что сводит проблему к анализу устойчивости ненулевых состояний равновесия получающейся системы. Эти замечания превращают доказательство теоремы в техническое, хотя и трудоемкое упражнение.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для второго случая, если $l_1 - l_2 = \gamma\varepsilon$, а постоянная γ достаточно мала.

4. Представляет интерес рассмотрение данного вопроса для сингулярно возмущенной краевой задачи

$$u_{tt} - 2\varepsilon u_t + u = 2\varepsilon\mu\Delta u + f(u, u_t), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (13)$$

где параметр $\mu > 0$, а гладкая функция f имеет в нуле высший порядок малости. Обозначим через d первую ляпуновскую величину обыкновенного уравнения $\ddot{u} + u = f(u, \dot{u})$. Считаем, что $\operatorname{Re} d < 0$. Если $\operatorname{Im} d > 0$, однородный цикл краевой задачи (13) орбитально экспоненциально устойчив при любом изменении μ .

Пусть $d = -1 - i\omega^2$. Тогда квазинормальная форма краевой задачи (13) имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -i\mu \Delta \xi + \xi - (1 + i\omega^2)|\xi|^2 \xi, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (14)$$

Краевая задача для $\bar{\xi}$ получается из (14) путем применения операции комплексного сопряжения. Если в (14) оператор Лапласа заменить его какой-то разностной аппроксимацией, то при малых μ единственным аттрактором получающейся системы обыкновенных уравнений является многомерный тор. Поэтому квазинормальную форму теперь уже краевой задачи (14) следует строить следующим образом.

Положим в (14)

$$\xi = (1 + \mu \Phi_1(\phi) + \mu^2 \Phi_2(\phi)) \exp(i\phi), \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\omega^2 + \mu \Pi_1(\phi) + \mu^2 \Pi_2(\phi), \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \Delta \phi}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (16)$$

Подставляя (15), (16) в (14), заключаем, что

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \Delta \phi, \quad \Pi_1 = -\omega^2 \Delta \phi + \phi_x^2 + \phi_y^2, \quad (17)$$

$$\Phi_2 = \frac{\omega^2}{4} \Delta^2 \phi - \frac{5}{8} (\Delta \phi)^2, \quad \Pi_2 = -\frac{\omega^4 + 1}{2} \Delta^2 \phi + \omega^2 (\Delta \phi)^2. \quad (18)$$

Из (17), (18) следует, что заведомо сложно устроены аттракторы краевой задачи (16).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колесов Ю. С. Проблема аттракторов нелинейных волновых уравнений в плоских областях // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 217–229.

Ярославский государственный университет

Поступило
15.11.2000