Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Старовойтов, Рациональные приближения дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 428–441

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2600>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:59:08

УДК 517.51+517.53

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ И ВЕЙЛЯ

А. П. Старовойтов

Найдены точные порядки рациональной аппроксимации функций, представимых в виде дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля. Новые результаты и уже известные в рациональной аппроксимации дифференцируемых функций теоремы В. Попова, П. Петрушева, А. А. Пекарского, В. Н. Русака и автора, их усиления и обобщения получены в качестве следствий теорем А. А. Пекарского, относящихся к рациональной аппроксимации классов Харди–Соболева в единичном круге.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Формулировки основных результатов. Пусть $C[a, b]$ и $L_p[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$, – соответственно нормированные пространства непрерывных на отрезке $I = [a, b]$ и интегрируемых по Лебегу в p -й степени действительных функций с обычными нормами

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_{L_\infty[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$
$$\|f\|_{L_p[a,b]} := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Если X – одно из пространств $C(I)$ или $L_p(I)$, то для $f \in X$ определим ее наименьшие уклонения в X соответственно от алгебраических многочленов $p \in \mathcal{P}_n = \{q : \deg q \leq n\}$ и алгебраических рациональных функций $r \in \mathcal{R}_n = \{p/q : p, q \in \mathcal{P}_n\}$ степени не выше n с действительными коэффициентами

$$E_n(f, X) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_X, \quad R_n(f, X) = \inf_{r \in \mathcal{R}_n} \|f - r\|_X.$$

В случае, когда $I = [0, 2\pi]$, будем также рассматривать 2π -периодические функции, а соответствующие нормированные пространства 2π -периодических функций обозначим через $C_{2\pi}$, $L_p^{2\pi}$. Если X – одно из пространств $C_{2\pi}$, $L_p^{2\pi}$, то в дальнейшем $E_n(f, X)$ и $R_n(f, X)$ являются соответственно наименьшими уклонениями f в X от тригонометрических полиномов и рациональных функций степени не выше n с действительными коэффициентами.

Для функций $G, h \in L_1[a, b]$ определим свертку

$$(G * h)(x) = \int_a^b G(x-t)h(t) dt$$

и при $\alpha > 0$ введем в рассмотрение следующие классы функций:

$$\begin{aligned} W_{\pm}^{\alpha} L_p[a, b] &:= \{P_{\pm}^{\alpha} * h : \|h\|_{L_p[a, b]} \leq 1\}, \\ W_{\pm}^{\alpha} V[a, b] &:= \{P_{\pm}^{\alpha} * h : h(a) = 0, \nu(h, I) \leq 1\}, \end{aligned}$$

где $P_{\pm}^{\alpha}(t) := (\max\{\pm t, 0\})^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ – ядро Римана–Лиувилля, Γ – гамма-функция Эйлера. Далее будем писать $I_{\pm}^{\alpha} h := P_{\pm}^{\alpha} * h$, называя $I_{\pm}^{\alpha} h$ интегралом дробного порядка α от h в смысле Римана–Лиувилля (см. [1], [2]). Если в предыдущих определениях положить $I = [0, 2\pi]$, а ядро Римана–Лиувилля $P_{\pm}^{\alpha}$ заменить ядром Вейля

$$D_{\pm}^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}},$$

то получим соответствующие классы периодических функций. Обозначим их через $W_{\pm}^{\alpha} L_p^{2\pi}$, $W_{\pm}^{\alpha} V_{2\pi}$. В этом случае дробные интегралы Вейля будем обозначать $I_{\pm}^{(\alpha)} h := D_{\pm}^{(\alpha)} * h$.

Приведем необходимые в дальнейшем сведения о свойствах функций из этих классов. Такого рода результаты получены в основном Г. Харди и Д. Литтлвудом. В частности, из принадлежащих им теорем (см. [1, теоремы 3.6], [2, теорема 9.1, с. 207]) имеем

$$\begin{aligned} \alpha > \frac{1}{p} &\implies W_{\pm}^{\alpha} L_p[a, b] \subset C[a, b], \quad W_{\pm}^{\alpha} L_p^{2\pi} \subset C_{2\pi}, \\ \alpha > 0 &\implies W_{\pm}^{\alpha} V[a, b] \subset C[a, b], \quad W_{\pm}^{\alpha} V_{2\pi} \subset C_{2\pi}. \end{aligned}$$

При $0 < \alpha < 1/p$ поведение дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля от интегрируемых функций описывается теоремами, известными под названием теорем Харди–Литтлвуда с предельным показателем (см. [1], [2]): если $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(1 - \alpha p)$, то найдется такая постоянная $c(\alpha, p)$, зависящая только от α и p , что

$$\|I_{\pm}^{\alpha} h\|_{L_q(I)} \leq c(\alpha, p) \|h\|_{L_p(I)}, \quad \|I_{\pm}^{(\alpha)} h\|_{L_q^{2\pi}} \leq c(\alpha, p) \|h\|_{L_p^{2\pi}}.$$

Таким образом, случаи $\alpha > 1/p$ и $0 < \alpha < 1/p$ существенно различны, и это обстоятельство в дальнейшем будем учитывать. Далее, если предположить, что $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$, то (см. [1, с. 104, 169, 271])

$$I_{+}^{\alpha}(L_p(I)) = I_{-}^{\alpha}(L_p(I)), \quad I_{+}^{(\alpha)}(L_p^{2\pi}) = I_{-}^{(\alpha)}(L_p^{2\pi}).$$

Поэтому при таких условиях на параметры α и p классы $W_{+}^{\alpha} L_p[a, b]$, $W_{-}^{\alpha} L_p[a, b]$ также, как и классы функций $W_{+}^{\alpha} L_p^{2\pi}$, $W_{-}^{\alpha} L_p^{2\pi}$ различаются несущественно. В этой связи при указанных ограничениях будем рассматривать только классы функций $W_{+}^{\alpha} L_p[a, b]$, $W_{+}^{\alpha} L_p^{2\pi}$, опуская в их обозначениях знак ‘+’.

Перейдем к формулировкам основных результатов работы. В дальнейшем запись $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает, что бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют одинаковый порядок при $n \rightarrow \infty$. Соотношение $\alpha_n = o(\beta_n)$ равносильно тому, что $\alpha_n/\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K^\alpha = K_\pm^\alpha$ является одним из четырех классов функций $W_\pm^\alpha L_p[a, b]$, $W_\pm^\alpha L_p^{2\pi}$, $1 \leq p \leq \infty$ и $\alpha > 1/p$. Тогда

$$\sup_{f \in K^\alpha} R_n(f, X) \asymp \frac{1}{n^\alpha}, \quad (1)$$

$$\sup_{f \in K^\alpha} E_n(f, X) \asymp \frac{1}{n^{\alpha-1/p}}, \quad (2)$$

где $X = C[a, b]$ в алгебраическом случае и $X = C_{2\pi}$ в периодическом.

Соотношение (2) в периодическом и алгебраическом случаях доказано соответственно Русаком [3] и автором [4] для классов K_+^α . Для классов K_-^α эти доказательства существенно не меняются. В периодическом случае, когда $K_+^\alpha = W_+^\alpha L_p^{2\pi}$, $\alpha \geq 1$ и $\alpha > 1/p$ теорема 1 доказана Русаком [3]. При целых α первые результаты в рациональной аппроксимации функций из рассматриваемых классов были получены в неперiodическом случае. Подробный обзор их имеется в [5]. В частности, авторы этой монографии отмечают, что если $K^\alpha = W_+^\alpha L_p[a, b]$, то, как при $\alpha = 1, p > 1$, так и в случае $\alpha = 2, 3, \dots$, $p \geq 1$, доказательство оценки сверху в (1) впервые опубликовано в [6]. В этой связи заметим, что подробное доказательство этой оценки в обоих случаях имеется также в [7], [8].

Следующая теорема устанавливает более точную оценку сверху при приближении индивидуальных функций из рассматриваемых классов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in K^\alpha$, где K^α – один из классов предыдущей теоремы. Тогда при $1 \leq p \leq \infty$ и $\alpha > 1/p$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha R_n(f, X))^{\max\{2, \varepsilon+1/\alpha\}} < c_1(\alpha, p), \quad (3)$$

где постоянная $c_1(\alpha, p)$ зависит только от α и p и одна и та же для всех f , а X определяется так же, как и в теореме 1.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha > 0$, $\delta > 0$, а последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ не возрастает и сходится к нулю (равносильная запись $a_n \downarrow 0$). Тогда из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha a_n)^\delta \implies \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = 0.$$

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > 0$ и $\delta > 0$. Если $a_n \downarrow 0$, то из сходимости одного из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n\alpha} a_{2^n})^\delta \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha a_n)^\delta$$

следует сходимость другого, и наоборот.

Сформулированные леммы доказываются стандартными приемами: лемма 1 с помощью критерия Коши сходимости ряда (см. [9, с. 11]), лемма 2 с помощью рассуждений, используемых при доказательстве теоремы Коши (см. [10, с. 21]). Применяя лемму 1, а также опираясь на (3) и рассуждая от противного, получим следующее следствие теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in K^\alpha$, где K^α – один из классов предыдущей теоремы, $1 \leq p \leq \infty$ и $\alpha > 1/p$. Тогда

$$R_n(f, X) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \quad (4)$$

Более того, существует такая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, вообще говоря, зависящая от функции f , что

$$R_{m_k}(f, C[a, b]) = o(m_k^{-\alpha} \ln^{-1/\max\{2, \varepsilon+1/\alpha\}} m_k) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

В алгебраическом случае, когда $f \in K^\alpha = W_+^\alpha L_p[a, b]$ и либо $\alpha = 1$, $p > 1$, либо $\alpha = 2, 3, \dots$, $p \geq 1$, соотношение (4) доказано Пекарским [7], [8], Поповым и Петрушевым (см. [5]). В [5] установлено, что на всем классе $W_+^\alpha L_p[a, b]$ (4) усилить нельзя. С другой стороны, следствие показывает, что (4) допускает эффективное уточнение для некоторой подпоследовательности.

Следующая теорема также является следствием теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha > 0$, а $f \in K^\alpha V$, где $K^\alpha V$ является одним из четырех классов $W_\pm^\alpha V[a, b]$, $W_\pm^\alpha V_{2\pi}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^{\alpha+1} R_n(f, C[a, b]))^2 < c(\alpha),$$

$$R_n(f, C[a, b]) = o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right), \quad (5)$$

где постоянная $c(\alpha)$ зависит только от α . Более того, существует такая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, зависящая от функции f , что

$$R_{m_k}(f, C[a, b]) = o(m_k^{-\alpha-1} \ln^{-1/2} m_k) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

В алгебраическом случае, когда $K^\alpha V = W_+^\alpha V[a, b]$, $\alpha = 1, 2, \dots$, теорема 3 ранее доказана в [11]. Тем самым, Пекарский получил уточнение хорошо известного результата Петрушева [12]. Для функций из этого класса соотношение (5) при всех $\alpha > 0$ другим методом ранее установлено автором в [13]. В периодическом случае при приближении индивидуальных функций теорема 3 уточняет оценку сверху в известной теореме Русака [14].

Рассмотрим теперь ситуацию, когда справедлива теорема Харди–Литтлвуда с предельным показателем.

ТЕОРЕМА 4. Пусть K^α является одним из классов функций $W^\alpha L_p[a, b]$, $W^\alpha L_p^{2\pi}$, где $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$. Тогда при $q = p/(1 - \alpha p)$

$$\sup_{f \in K^\alpha} R_n(f, X_q) \asymp \frac{1}{n^\alpha},$$

где $X_q = L_q[a, b]$ в алгебраическом случае и $X_q = L_q^{2\pi}$ в периодическом случае¹.

¹ А. А. Пекарский заметил (устное сообщение), что класс K^α не компактен в X_q и, следовательно, $\sup_{f \in K^\alpha} E_n(f, X_q) \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in K^\alpha$, где K^α – один из классов предыдущей теоремы и $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$. Тогда при $q = p/(1 - \alpha p)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha R_n(f, X_q))^{\max\{2, p\}} < c_1(\alpha, p),$$

где постоянная $c_1(\alpha, p)$ зависит только от α и p и одна и та же для всех функций f .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f \in K^\alpha$, где K^α – один из классов предыдущей теоремы, $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$, $q = p/(1 - \alpha p)$, то

$$R_n(f, X_q) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Более того, существует такая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, зависящая, быть может, от функции f , что

$$R_{m_k}(f, X_q) = o(m_k^{-\alpha} \ln^{-1/\max\{2, p\}} m_k) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Теоремы 4, 5 и следствие 2 остаются в силе, если в них в качестве K^α взять класс $\widetilde{W^\alpha L_p^{2\pi}} := \{\tilde{f} : f \in W^\alpha L_p^{2\pi}\}$, состоящий из сопряженных функций. Это следует, например, из теоремы Рисса (см. [10, с. 566]).

2. Аппроксимационные пространства Петре, Спарра. Большинство цитируемых выше результатов, относящихся к рациональной аппроксимации рассматриваемых классов функций, в алгебраическом случае было получено с помощью соответствующего принципа “склеивания” рациональных функций (the theorem for “joining” of rational functions, см. [5, с. 115]). При дробных α (см. [4], [13]) метод “склеивания” сочетался с методом работы [15]. В периодическом случае [3], [14] доказательства осуществлялись с помощью рациональных операторов Русака. Каждый из этих результатов как в алгебраическом, так и в периодическом случаях доказывался весьма технично и индивидуально. В данной работе теоремы 1–5, содержащие новые и уже известные утверждения, их усиления и обобщения, получены автором как следствия теорем Пеккарского (см. [16], [17]), описывающих связь между аппроксимационными пространствами Я. Петре, Г. Спарра и пространствами Харди–Соболева.

Рассмотрим единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{A}(D)$ – множество всех функций, аналитических в D . Через $H_p = H_p(D)$, $0 < p \leq \infty$, обозначим пространство Харди в единичном круге со стандартной квазинормой

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0 < \rho < 1} \|f(\cdot \rho)\|_{p, T},$$

где

$$\|f\|_p = \|f\|_{p, T} := \left(\int_T |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad p \neq \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty, T} := \sup_{z \in T} |f(z)|, \quad p = \infty,$$

а $T = \{z : |z| = 1\}$ – единичная окружность. Если функция $f \in \mathcal{A}(D)$ представима в D степенным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, то функции

$$f^{(\alpha)}(z) := \sum_{k=[\alpha]}^{\infty} \frac{\Gamma(k - [\alpha] + 1 + \alpha)}{\Gamma(k - [\alpha] + 1)} \widehat{f}_k z^{k - [\alpha]}, \quad z \in D,$$

$$(\Im^{\alpha} f)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\alpha} \widehat{f}_k z^k, \quad z \in D,$$

будем называть соответственно *производными Римана–Лиувилля* и *Вейля порядка $\alpha > 0$ функции f* . Введем в рассмотрение пространства Харди–Соболева (см. [17])

$$H_p^{\alpha} = H_p^{\alpha}(D) := \{f \in \mathcal{A}(D) : \|f^{(\alpha)}\|_{H_p} < \infty\}, \quad \alpha > 0, \quad 0 < p \leq \infty,$$

и аппроксимационные пространства Петре, Спарра функций из H_p :

$$\mathcal{R}_{p,q}^{\alpha} := \{f \in H_p : \|f\|_{\mathcal{R}_{p,q}^{\alpha}} < \infty\}, \quad \alpha > 0, \quad p, q \in (0, \infty],$$

где

$$\|f\|_{\mathcal{R}_{p,q}^{\alpha}} := \|f\|_{H_p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{k\alpha} R_{2^k}(f, H_p))^q \right)^{1/q}, \quad q \neq \infty,$$

$$\|f\|_{\mathcal{R}_{p,\infty}^{\alpha}} := \|f\|_{H_p} + \sup_{k=0,1,\dots} 2^{k\alpha} R_{2^k}(f, H_p),$$

а

$$R_n(f, H_p) := \inf_{r \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{C}}} \|f - r\|_{H_p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

– наилучшие приближения f в H_p рациональными функциями $r \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{C}}$, вообще говоря, с комплексными коэффициентами степени не выше n . В дальнейшем нам необходимы следующие непрерывные вложения, установленные в [17]:

А) если $\alpha > 0, \varepsilon > 0$, то

$$H_{1/\alpha+\varepsilon}^{\alpha} \subset \mathcal{R}_{\infty, \max\{2, 1/\alpha+\varepsilon\}}^{\alpha};$$

В) если $1 < p < \infty, 0 < \alpha < 1/p, q = p/(1 - \alpha p)$, то

$$H_p^{\alpha} \subset \mathcal{R}_{q, \max\{2, p\}}^{\alpha}.$$

3. Интегралы Римана–Лиувилля и пространства Харди. Пусть функция $h \in L_1[-1, 1]$, $\alpha \in (0, \infty)$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Тогда по определению

$$(I_+^\alpha h)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^x (x-t)^{\alpha-1} h(t) dt, \quad x \in [-1, 1],$$

$$(I_-^\alpha h)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} h(t) dt, \quad x \in [-1, 1].$$

Рассматривая главную ветвь z^μ , т.е. $z^\mu = \exp(\mu \ln z)$, $-\pi < \arg z \leq \pi$, определим функцию

$$(J^\alpha h)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^1 (z-t)^{\alpha-1} h(t) dt, \quad z \notin [-1, 1].$$

Введем в рассмотрение предельные значения интеграла $(J^\alpha h)(z)$:

$$(J^\alpha h)(x \pm 0 \cdot i) := \lim_{y \rightarrow \pm 0} (J^\alpha h)(x + iy), \quad x \in [-1, 1].$$

С учетом выбора главной ветви для степени получим

$$(J^\alpha h)(x \pm 0 \cdot i) = (I_+^\alpha h)(x) + e^{\pm i\pi(\alpha-1)} (I_-^\alpha h)(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Отсюда легко выразить $(I_\pm^\alpha h)(x)$ через $(J^\alpha h)(x \pm 0 \cdot i)$ при $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} (I_+^\alpha h)(x) &= \frac{1}{2} \{ (1 + i \operatorname{ctg} \pi(\alpha-1)) (J^\alpha h)(x + 0 \cdot i) \\ &\quad + (1 - i \operatorname{ctg} \pi(\alpha-1)) (J^\alpha h)(x - 0 \cdot i) \}, \\ (I_-^\alpha h)(x) &= \frac{i}{2} \{ (J^\alpha h)(x - 0 \cdot i) - (J^\alpha h)(x + 0 \cdot i) \} \frac{1}{\sin \pi(\alpha-1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Равенства (6) позволяют сделать вывод о том, что свойства (в том числе и аппроксимационные) дробных интегралов $(I_\pm^\alpha h)(x)$ во многом аналогичны свойствам $(J^\alpha h)(x \pm 0 \cdot i)$. Рассмотрим функцию $(J^\alpha h)(x + 0 \cdot i)$. Свойства $(J^\alpha h)(x - 0 \cdot i)$ исследуются аналогичным образом. Пусть

$$g_0(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^1 (z-t)^{\alpha-1} h(t) dt, \quad \operatorname{Im} z > 0. \quad (7)$$

В (7) сделаем замену $z = -(iw + 1)/(w + i)$, при которой полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ конформно и однолистно отображается на единичный круг $D = \{w : |w| < 1\}$ так, что отрезок $[-1, 1]$ переходит в полуокружность $T_+ = \{\xi : |\xi| = 1, \operatorname{Im} \xi \geq 0\}$. Тогда при $w \in D$ полагаем

$$g(w) := g_0\left(-\frac{iw+1}{w+i}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^1 \left(-\frac{iw+1}{w+i} - t\right)^{\alpha-1} h(t) dt.$$

Совершая здесь аналогичную замену $t = -(i\xi + 1)/(\xi + i)$ переменной интегрирования, получим

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(w+i)^{\alpha-1}} \int_{T_+} \left(1 - \frac{w}{\xi}\right)^{\alpha-1} \frac{h_1(\xi)}{\xi} d\xi, \quad w \in D,$$

где

$$h_1(\xi) = \frac{2^{\alpha+1}\pi i}{\Gamma(\alpha)} \frac{(-1)^{\alpha-1}\xi^\alpha}{(\xi+i)^{\alpha+1}} h\left(-\frac{i\xi+1}{\xi+i}\right), \quad \xi \in T_+.$$

Доказательство следующей леммы элементарно.

ЛЕММА 3. Если $h \in L_p[-1, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\|h_1\|_{L_p(T_+)} \leq c(\alpha) \|h\|_{L_p[-1, 1]},$$

где постоянная $c(\alpha)$ зависит только от α .

Особая точка $w = -i$ функции $1/(w + i)^{\alpha-1}$ лежит на нижней полуокружности $T_- = \{\xi : |\xi| = 1, \operatorname{Im} \xi \leq 0\}$. Поэтому она является аналитической функцией на T_+ , и ее аппроксимационные свойства на этой полуокружности описываются, например, теоремой Бернштейна–Уолша. Поэтому в дальнейшем вместо g будем рассматривать функцию

$$G(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \left(1 - \frac{w}{\xi}\right)^{\alpha-1} \frac{h_2(\xi)}{\xi} d\xi, \quad w \in D,$$

полагая $h_2(\xi) = h_1(\xi)$, $\xi \in T_+$, и $h_2(\xi) = 0$, $\xi \in T_-$. Заметим, что предельное значение функции $g(w) = G(w)/(w + i)^{\alpha-1}$, когда $w \rightarrow \xi \in T_+$ по соответствующему радиусу круга D , совпадает со значением функции $(J^\alpha h)(-i(w + 1)/(w + i) + 0 \cdot i)$ в точке $w = \xi$.

Рассмотрим теперь интеграл типа Коши

$$H(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{h_2(\xi) d\xi}{\xi - w} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{H}_k w^k,$$

$$\hat{H}_k = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{h_2(\xi) d\xi}{\xi^{k+1}}, \quad |w| < 1.$$

Аналогично для функции G получим представление

$$G(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha) \cdots (k-\alpha)}{k!} \hat{H}_k w^k, \quad |w| < 1.$$

Согласно определению дробной производной Римана–Лиувилля от функции $G \in \mathcal{A}(D)$

$$G^{(\alpha)}(w) = \sum_{k=[\alpha]}^{\infty} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha) \cdots (k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k-[\alpha]+\alpha+1)}{\Gamma(k-[\alpha]+1)} \hat{H}_k w^{k-[\alpha]}, \quad |w| < 1.$$

Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ назовем *мультипликатором в H_p* , если для любой функции $f \in H_p$ имеем $\|g\|_{H_p} \leq c \|f\|_{H_p}$, где $c > 0$ не зависит от функции f , а

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{f}_k z^k.$$

Например, для $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ мультипликаторами в пространствах H_p , $0 < p \leq \infty$, являются последовательности (см. [16, лемма 1.1])

$$\lambda_k = \lambda_k(\gamma, \beta) = \frac{\Gamma(k+\gamma+\beta)}{(k+1)^\beta \Gamma(k+\gamma)}, \quad \mu_k = \mu_k(\gamma, \beta) = \frac{1}{\lambda_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 4. Обозначим через $\{\alpha\}$ дробную часть числа $\alpha > 0$. Тогда последовательности

$$\lambda_k^* := \frac{\Gamma(k+1-\{\alpha\})}{\Gamma(k+[\alpha]+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}, \quad \mu_k^* := \frac{1}{\lambda_k^*}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

являются мультипликаторами в пространствах H_p , $0 < p \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}$. Так как для всех $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_k^* = \mu_k(1 - \{\alpha\}, \{\alpha\}) \cdot \lambda_k(1 + [\alpha], \{\alpha\}) = \mu_k \cdot \lambda_k$$

и последовательности $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$, $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ являются мультипликаторами в пространствах H_p , $0 < p \leq \infty$, то мультипликатором будет и последовательность $\{\lambda_k^*\}_{k=0}^\infty$. Аналогично доказывается утверждение леммы для последовательности $\{\mu_k^*\}_{k=0}^\infty$. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть H – интеграл типа Коши с плотностью h_2 . Тогда при $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ и $0 < p \leq \infty$

$$H \in H_p \iff G^{(\alpha)} \in H_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества Эйлера $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ получим, что

$$(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(k-\alpha) = \frac{\Gamma(k+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Тогда, принимая во внимание разложение $G^{(\alpha)}$ в степенной ряд, получим

$$\widehat{G}_k^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(k+1-\{\alpha\})}{\Gamma(k+[\alpha]+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)} \widehat{H}_{k+[\alpha]}.$$

Теперь применение леммы 4 завершает доказательство леммы 5.

4. Доказательства основных результатов. Перейдем к доказательству теоремы 2 в алгебраическом случае. Достаточно рассмотреть случай отрезка $[-1, 1]$ и $\alpha \notin \mathbb{N}$. При $\alpha \in \mathbb{N}$ доказательство существенно упрощается и проводится по схеме, предложенной в [11]. Пусть $f = I^\alpha h$, где $\|h\|_{L_p[-1,1]} \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, и $\alpha > 1/p$. Для действительной функции $g \in C(I)$ справедливы неравенства (см. [18, с. 209])

$$\frac{1}{2}R_n(g, C(I)) \leq R_n^{\mathbb{C}}(g, C(I)) \leq R_n(g, C(I)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому можно не следить за тем, действительными или комплексными являются коэффиценты приближающей рациональной дроби.

Функция h определяет интеграл типа Коши $H(w)$ и соответствующую ей функцию $g(z) = G(w)/(w+i)^{\alpha-1}$. По предположению $h \in L_p[-1, 1]$. Поэтому на основании леммы 3 функция $h_1 \in L_p(T_+)$, а $h_2 \in L_p(T)$. Из теорем В. И. Смирнова ($p = 1$) и Рисса ($1 < p \leq \infty$) (см. [19, с. 82, 136]) следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ интеграл типа Коши $H \in H_{1/\alpha+\varepsilon}$. Согласно лемме 5 в этом случае будем иметь, что

$G^{(\alpha)} \in H_{1/\alpha+\varepsilon}$. Поэтому $G \in H_{1/\alpha+\varepsilon}^\alpha$. Далее, непрерывное вложение А) позволяет записать, что $G \in \mathcal{R}_{\infty, \max\{2, 1/\alpha+\varepsilon\}}^\alpha$. Следовательно, с учетом леммы 2

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha R_n(G, C(T)))^{\max\{2, 1/\alpha+\varepsilon\}} \leq c_2(\alpha, p). \quad (8)$$

По теореме Бернштейна–Уолша найдется такой полином p_n , $\deg p_n \leq n$, что

$$\left| \frac{1}{(w+i)^{\alpha-1}} - p_n(w) \right| \leq \frac{c}{q^n}, \quad w \in T_+,$$

где $0 < q < 1$ – фиксированное число, а постоянная $c = c(\alpha) > 0$. Обозначим через r_n , $\deg r_n \leq n$, дробь наилучшего приближения функции G на единичной окружности T . Тогда для всех $w \in T_+$ получим, что

$$|g(w) - p_n(w)r_n(w)| \leq c_3(\alpha, p)(q^n + R_n(G, C(T))).$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha R_n(g, C(T_+)))^{\max\{2, 1/\alpha+\varepsilon\}} \leq c_4(\alpha, p).$$

Теперь, сделав обратную дробно-линейную замену, которая полуокружность T_+ отображает на отрезок $[-1, 1]$, получим необходимое утверждение для функции $(J^\alpha)(x+0i)$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha R_n((J^\alpha h)(\cdot + 0i), C[-1, 1]))^{\max\{2, 1/\alpha+\varepsilon\}} \leq c_5(\alpha, p).$$

Точно так устанавливается аналогичное утверждение и для функции $(J^\alpha h)(x - 0i)$. Поэтому с учетом (6) получим неравенство (3) для $f \in W_+^\alpha L_p[-1, 1]$. Случай, когда $f \in W_-^\alpha L_p[-1, 1]$, рассматривается аналогичным образом. Теорема 2 в алгебраическом случае доказана.

Доказательство в периодическом случае существенно упрощается. Оно в основных деталях повторяет доказательство теоремы 5 в периодическом случае (см. далее), поэтому мы его опускаем.

Теорема 2 дает оценку сверху в теореме 1. Примеры функций, на которых в (1) верхние оценки для рассматриваемых классов функций достигаются, имеются, например, в [3], [4].

Перейдем к доказательству теоремы 5. Начнем с алгебраического случая. Достаточно рассмотреть отрезок $[-1, 1]$. Пусть $f \in W^\alpha L_p[-1, 1]$, $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(1 - \alpha p)$. Тогда $f = I^\alpha h$, $\|h\|_{L_p[-1, 1]} \leq 1$. Функции h поставим в соответствие интеграл типа Коши с плотностью $h_2 \in L_p(T)$ и функцию $g(w) = G(w)/(w+i)^{\alpha-1}$, $w \in T_+$. По теореме Рисса интеграл типа Коши $H \in H_p$. Согласно лемме 5 в таком случае и $G^{(\alpha)} \in H_p$. Поэтому $G \in H_p^\alpha$. Применяя теперь непрерывное вложение В), получим, что $G \in \mathcal{R}_{q, \max\{2, p\}}^\alpha$. Отсюда, принимая во внимание лемму 2, для функции

$G = G(\xi)$, $\xi \in T$, определяемой некасательными предельными значениями G , будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} (n^{\alpha} R_n(G, L_q(T_+)))^{\max\{2, p\}} \leq c_3(\alpha, p).$$

Далее, применим к функции $1/(w+i)^{\alpha-1}$ теорему Бернштейна–Уолша и, используя рассуждения, аналогичные приводимым при доказательстве теоремы 2, получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} (n^{\alpha} R_n(g, L_q(T_+)))^{\max\{2, p\}} \leq c_4(\alpha, p).$$

Сделав обратную замену, которая отображает полуокружность T_+ на отрезок $[-1, 1]$, докажем нужное утверждение для $(J^{\alpha}h)(x+0i)$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} (n^{\alpha} R_n((J^{\alpha}h)(\cdot + 0i), L_q[-1, 1]))^{\max\{2, p\}} \leq c_5(\alpha, p).$$

Аналогично доказывается соответствующее утверждение и для функции $(J^{\alpha}h)(x-0i)$. Принимая во внимание равенства (6), отсюда получим необходимое неравенство. Таким образом, при сделанных предположениях теорема 5 в алгебраическом случае доказана. Случай, когда $f \in W_{-}L_p[-1, 1]$, рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь периодический случай. Предположим, что функция $f \in W^{\alpha}L_p^{2\pi}$, $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(1 - \alpha p)$. Это значит, что $f = I^{(\alpha)}h$, где $\|h\|_{L_p^{2\pi}} \leq 1$. Пусть

$$h(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}_k e^{ikx}$$

– ряд Фурье функции h , а числа

$$\hat{h}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} h(t) dt$$

являются ее коэффициентами Фурье. Считаем, что $\hat{h}_0 = 0$. Известно, что если $\phi \in L_p^{2\pi}$, $1 < p < \infty$, то ее ряд Фурье сходится к ϕ в среднем, т.е. в метрике пространства $L_p^{2\pi}$. Поэтому для таких функций в дальнейшем будем писать равенство

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k e^{ikx},$$

понимая его соответствующим образом.

Согласно определению дробного интеграла Вейля от 2π -периодических функций (см. [1, с. 264]) имеем

$$f(x) = (I^{(\alpha)}h)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{h}_k}{(ik)^{\alpha}} e^{ikx},$$

где

$$(ik)^\alpha = |k|^\alpha e^{(\alpha\pi i/2) \operatorname{sign} k}.$$

Так как $h \in L_p^{2\pi}$, $1 < p < \infty$, то по теореме Рисса сопряженная функция $\tilde{h} \in L_p^{2\pi}$ и $\|\tilde{h}\|_{L_p^{2\pi}} \leq c(p)\|h\|_{L_p^{2\pi}}$. При $z = e^{ix}$ рассмотрим функцию $\varphi(z) = \varphi(e^{ix}) = h(x) + i\tilde{h}(x)$, определенную на единичной окружности. Известно (см. [2, с. 213]), что ряд Фурье комплекснозначной функции $\varphi(e^{ix})$ имеет степенной тип и

$$\varphi(e^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\hat{h}_k e^{ikx}.$$

Согласно теореме Харди–Литтлвуда с предельным показателем дробный интеграл Вейля от функции $\varphi(e^{ix})$

$$g(e^{ix}) := (I^{(\alpha)}\varphi)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\hat{h}_k}{(ik)^\alpha} e^{ikx}$$

принадлежит пространству $L_q^{2\pi}$ и $\|g\|_{q,T} = \|g(e^{ix})\|_{L_q^{2\pi}} \leq c(\alpha, p)\|\varphi\|_{L_p^{2\pi}}$. Тогда из теоремы Рисса следует, что интеграл типа Коши

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{g(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad |z| < 1,$$

принадлежит пространству Харди H_q . Далее, нетрудно заметить, что

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{G}_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\hat{h}_k}{(ik)^\alpha} z^k, \quad |z| < 1.$$

Поэтому

$$(\mathfrak{I}^\alpha G)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^\alpha \frac{2\hat{h}_k}{(ik)^\alpha} z^k, \quad |z| < 1.$$

Последовательность $\{(k+1)^\alpha/(ik)^\alpha\}_{k=1}^\infty$, очевидно, является мультипликатором в H_μ при $\mu > 0$. Поэтому из неравенства $\|\varphi\|_{p,T} \leq c(p)\|h\|_{L_p^{2\pi}}$ получим, что $\mathfrak{I}^\alpha G \in H_p$. Поскольку последовательность $\{\lambda_k(1, \alpha)\}_{k=0}^\infty$ есть мультипликатор в H_μ , $\mu > 0$ (см. [16, лемма 1.1]), то из того, что $\mathfrak{I}^\alpha G \in H_p$ следует, что и $G^{(\alpha)} \in H_p$. Поэтому, учитывая непрерывное вложение В) и применяя лемму 2, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha R_n(g, L_q(T)))^{\max\{2, p\}} \leq c_2(\alpha, p).$$

Заметим, что $\operatorname{Re} g(e^{ix}) = f(x)$, $R_{2n}(f, L_q^{2\pi}) \leq R_n(g, L_q(T))$ (см. [18, с. 323]). Поэтому окончательно получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha R_n(f, L_q^{2\pi}))^{\max\{2, p\}} \leq c_3(\alpha, p).$$

Теорема 5 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Вначале рассмотрим периодический случай. Необходимо доказать, что

$$\sup_{f \in W^\alpha L_p^{2\pi}} R_n(f, L_q^{2\pi}) \geq \frac{c_1(\alpha, p)}{n^\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Рассмотрим функцию $h(x) = (8\pi)^{-1} \sin(4nt + \alpha\pi/2)$. В. Н. Русак и Д. Брайесс в [20] показали, что $f(x) = (I^{(\alpha)}h)(x) = (2\pi)^{-1}(4n)^{-\alpha} \sin 4nx$, и для любой рациональной тригонометрической функции $r_n(x)$ степени не выше n и $q \geq 1$

$$(2\pi)^{(q-1)/q} \|f - r_n\|_{L_q^{2\pi}} \geq \frac{1}{2\pi(4n)^\alpha}.$$

Учитывая, что $\|h\|_{L_p^{2\pi}} \leq 1$, отсюда следует справедливость неравенства (9). Теорема 4 в периодическом случае доказана. Рассуждения из [20] остаются в силе, если вместо f рассмотреть функцию $\tilde{f}$. Поэтому

$$\sup_{f \in \widetilde{W^\alpha L_p^{2\pi}}} R_n(f, L_q^{2\pi}) \geq \frac{c_2(\alpha, p)}{n^\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В непериодическом случае без ограничения общности можно считать, что $[a, b] = [0, 1]$. Тогда в справедливости неравенства

$$\sup_{f \in W^\alpha L_p[0,1]} R_n(f, L_q[0,1]) \geq \frac{c_3(\alpha, p)}{n^\alpha}$$

можно убедиться, если в качестве f взять функцию, которая лишь постоянным множителем, зависящим только от α и p , отличается от функции

$$\frac{\sin 2\pi x}{n^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} h_\alpha(t) dt,$$

где $\|h_\alpha\|_{L_p[0,1]} \leq c(\alpha, p)$. Доказательство этого утверждения проводится аналогично периодическому случаю. Теорема 4 доказана.

Автор благодарит профессора А. А. Пекарского за консультации и внимание к работе. Отметим также, что основные результаты статьи анонсированы в [21].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [3] Русак В. Н. Точные порядки наилучших рациональных приближений свертки ядра Вейля и функций из L_p // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 313–316.
- [4] Старовойтов А. П. Точные порядки рациональных приближений свертки ядра Римана–Лиувилля и функций из L_p // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. № 1. С. 27–30.
- [5] Petrushev P. P., Popov V. A. Rational Approximation of Real Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [6] Popov V. A. On the connection between rational uniform approximation and polynomial L_p approximation of functions // Quantitative Approximation. New York: Academic Press, 1980. P. 267–277.
- [7] Пекарский А. А. Рациональная аппроксимация периодических функций в $\tilde{L}^p$ // Деп. ВИНТИ № 1209-77. М.: ВИНТИ, 1977.
- [8] Пекарский А. А. Рациональная аппроксимация и пространства Орлича // Деп. ВИНТИ № 314-78. М.: ВИНТИ, 1978.
- [9] Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ в примерах и задачах. Т. 2. Киев: Вища школа, 1977.
- [10] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [11] Пекарский А. А. Скорость рациональной аппроксимации и дифференциальные свойства функций // Anal. Math. 1991. V. 17. P. 153–171.
- [12] Петрушев П. П. Равномерные рациональные аппроксимации функций класса V_r // Матем. сб. 1979. Т. 108(150). № 3. С. 419–432.
- [13] Старовойтов А. П. Рациональная аппроксимация функций из $W^r V[a, b]$ // Тр. семинара Ин-та прикладной матем. им. И. Н. Векюа Тбилисского госуниверситета. 1985. Т. 1. № 2. С. 129–133.
- [14] Русак В. Н. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки // Матем. сб. 1985. Т. 128(170). № 4. С. 492–515.
- [15] Гончар А. А. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями // Матем. сб. 1967. Т. 78(115). № 4. С. 630–638.
- [16] Пекарский А. А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Матем. сб. 1984. Т. 124. № 4. С. 571–588.
- [17] Пекарский А. А. Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H_p // Матем. сб. 1985. Т. 127. № 1. С. 3–20.
- [18] Lorentz G., v. Golitschek M., Makavoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
- [19] Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.
- [20] Русак В. Н., Брайесс Д. Наилучшие полиномиальные и рациональные приближения функциональных классов в интегральной метрике // Докл. АН Беларуси. 1992. Т. 36. № 3–4. С. 205–208.
- [21] Старовойтов А. П. Скорость рациональной аппроксимации дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 3. С. 18–23.