Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Воробьев, О линейаризации гамильтоновых систем на пуассоновых многообразиях, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 323–330

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:18:41

УДК 517

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ НА ПУАССОНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Ю. М. Воробьев

Линеаризация гамильтоновой системы на пуассоновом многообразии вдоль данного (сингулярного) симплектического листа определяет некую динамическую систему на нормальном расслоении к листу, которая называется системой в вариациях. Показано, что система в вариациях допускает согласованную гамильтонову структуру, если существует трансверсаль к листу, которая инвариантна относительно фазового потока исходной системы. В случае, когда трансверсальная алгебра Ли симплектического листа является полупростой, это условие оказывается также необходимым.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть имеется пуассоново многообразие (M, Ψ) со скобкой Пуассона

$$\{F, G\}_\Psi = \Psi(dF, dG) = \Psi^{JI}(y) \frac{\partial F}{\partial y^I} \frac{\partial G}{\partial y^J}$$

(здесь и далее суммирование проводится по повторяющимся индексам). Пусть задана гамильтонова система (M, Ψ, H) , соответствующая гамильтонову векторному полю

$$X_H = \Psi^\sharp dH = -\Psi^{JI}(y) \frac{\partial H}{\partial y^I} \frac{\partial}{\partial y^J};$$

здесь $\Psi^\sharp: T^*M \rightarrow TM$ – морфизм векторных расслоений, индуцированный тензором Пуассона Ψ . В соответствии с общей схемой [1], [2], процедура линеаризации для динамической системы (M, X_H) задает векторное поле $\text{Var}(X_H)$ на касательном расслоении TM . Динамическая система, соответствующая $\text{Var}(X_H)$, называется *системой в вариациях* векторного поля X_H на TM . В локальных координатах (y^I, u^J) на TM система в вариациях имеет вид

$$\dot{y}^I = -\Psi^{JI}(y) \frac{\partial H}{\partial y^I}, \quad (1.1)$$

$$\dot{u}^J = -\left(\frac{\partial \Psi^{JS}(y)}{\partial y^I} \frac{\partial H}{\partial y^S} + \Psi^{JS} \frac{\partial^2 H}{\partial y^S \partial y^I} \right) u^I. \quad (1.2)$$

Инвариантное определение векторного поля $\text{Var}(X_H)$ дается с помощью канонической инволюции на TTM [1]. Как известно, система (1.1), (1.2) является гамильтоновой относительно тангенциальной пуассоновой структуры на TM [1].

Наша цель – изучение линеаризованной гамильтоновой динамики на заданном (сингулярном) симплектическом листе. Пусть задан замкнутый симплектический лист (B, ω) пуассонова многообразия (M, Ψ) с симплектической структурой

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij}(\xi) d\xi^i \wedge d\xi^j. \quad (1.3)$$

Ограничение X_H на B является гамильтоновым векторным полем на (B, ω) ,

$$v_f = X_H|_B = \omega^{is}(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi^s},$$

где $f = H|_B$. Пусть $T_B M$ – ограничение касательного расслоения TM на лист B . Нормальным расслоением $E = T_B M / TB$ к листу B называется векторное расслоение $\pi: E \rightarrow B$ над B , слоем которого над ξ является факторпространство $E_\xi = T_\xi M / T_\xi B$.

Пусть $p: T_B M \rightarrow E$ – естественная проекция. Так как подмногообразие B инвариантно относительно фазового потока поля X_H , векторное поле $\text{Var}(X_H)$ имеет два инвариантных подмногообразия TB и $T_B M$ в TM . Можно показать, что векторное поле $\text{Var}(X_H)$ является проектируемым относительно p , т.е., на E существует единственное векторное поле $\text{var}_B(X_H)$ такое, что

$$(d_u p) \text{Var}(X_H)(u) = \text{var}_B(X_H)(p(u))$$

для любых $u \in T_\xi M$ и $\xi \in B$. Динамическая система $(E, B, \text{var}_B(X_H))$ называется системой в вариациях поля X_H на B . Размерность соответствующего фазового пространства E (тотального пространства нормального расслоения к листу B) совпадает с размерностью исходного многообразия, $\dim E = \dim M$. Кроме того, подмногообразие $B \subset E$ (как нулевое сечение расслоения E) инвариантно относительно фазового потока поля $\text{var}_B(X_H)$. Итак, система в вариациях представляет собой естественную линеаризованную модель для исходной гамильтоновой системы X_H на B . Нас интересует следующий вопрос: при каких условиях векторное поле $\text{var}_B(X_H)$ является гамильтоновым относительно некоторой пуассоновой структуры на E ? Эта задача, например, возникает при изучении (нелинейной) гамильтоновой динамики вблизи (сингулярного) симплектического листа в контексте теории возмущений. В общем случае, процедура линеаризации может разрушить свойство гамильтоновости векторного поля $\text{var}_B(X_H)$. В симплектическом случае этот эффект изучался в работах [3]–[5]. В данной статье мы приводим некоторые результаты, касающиеся существования гамильтоновой структуры для $\text{var}_B(X_H)$. В основе этих результатов лежит понятие линеаризованной пуассоновой структуры симплектического листа [6], [7].

2. Существование гамильтоновых структур. Рассмотрим дуальное расслоение $E^* \subset T_B^* M$ к E , которое будем называть *конормальным* расслоением к листу B , и которое совпадает с ядром морфизма расслоения $\Psi_B^\sharp: T_B^* M \rightarrow T_B M$, $\ker \Psi_B^\sharp = E^*$. Тогда каждый слой расслоения E^* наследует структуру алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_{\text{fb}}$, которая однозначно определяется следующим условием: для произвольных функций $k, \tilde{k}$, заданных на M и постоянных вдоль листа B , выполняется соотношение $[\eta, \tilde{\eta}]_{\text{fb}} = d(\{k, \tilde{k}\}_\Psi)|_B$,

где $\eta = dk|_B$, $\tilde{\eta} = d\tilde{k}|_B$. Расслоение E^* является локально-тривиальным с типичным листом $\mathfrak{g}$, который называется *трансверсальной алгеброй Ли* симплектического листа B . Таким образом, нормальное расслоение пространства E становится локально-тривиальным расслоением Ли–Пуассона над симплектической базой (B, ω_B) . Соответствующая послойная структура Ли–Пуассона индуцирует вертикальный тензор Пуассона Λ на E , который называется *линеаризованной трансверсальной пуассоновой структурой* исходного тензора Пуассона Ψ на листе B [8], [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пуассонова структура Π на E называется *согласованной*, если она корректно определена в окрестности нулевого сечения B и удовлетворяет следующим условиям:

- (i) (B, ω_B) является симплектическим листом пуассоновой структуры Π ;
- (ii) линеаризованная трансверсальная пуассонова структура бивекторного поля Π на B совпадает с Λ .

Под *трансверсалью* $\mathcal{L}$ к B мы будем понимать подрасслоение в $T_B M$, являющееся дополнительным к TB ,

$$T_B M = TB \oplus \mathcal{L}. \quad (2.1)$$

Пусть Fl_H^t – фазовый поток гамильтонова векторного поля X_H . Так как $B \subset E$ – это инвариантное подмногообразие для X_H , дифференциал $d\text{Fl}_H^t$ действует на $T_B M$, оставляя TB инвариантным.

ТЕОРЕМА 2.2. Если фазовый поток гамильтонова векторного поля X_H допускает инвариантную трансверсаль $\mathcal{L}$ к B ,

$$d\text{Fl}_H^t(\mathcal{L}) = \mathcal{L}, \quad (2.2)$$

то система в вариациях $\text{var}_B(X_H)$ поля X_H на B является гамильтоновой относительно некоторой согласованной пуассоновой структуры Π на E и некоторой функции $F \in C^\infty(E)$,

$$\text{var}_B(X_H) = \Pi^\sharp(dF). \quad (2.3)$$

Ниже для доказательства этой теоремы мы приводим построение согласованной пуассоновой структуры Π и функции Гамильтона F .

3. Согласованные пуассоновы структуры. Следуя [6], [7], напомним процедуру, которая позволяет, начиная с тройки (M, Ψ, B) , построить класс согласованных пуассоновых структур на E , параметризованных трансверсальями к B .

Имеется естественное расщепление

$$T_B E = TB \oplus E. \quad (3.1)$$

Фиксируем трансверсаль $\mathcal{L}$ к B . Ясно, что $\mathcal{L}$ является подрасслоением $T_B E$, которое изоморфно E . Ограничение проекции p на слой $\mathcal{L}_\xi$ дает изоморфизм на E_ξ .

Под *экспоненциальным отображением*, соответствующим трансверсали $\mathcal{L}$ к B , будем понимать диффеоморфизм $\mathbf{f}$ из некоторой окрестности подмногообразия B в E на другую окрестность B в M , удовлетворяющий следующим условиям:

$$\mathbf{f}|_B = \text{id}_B, \quad (d_\xi \mathbf{f})(e) = p^{-1}(e)$$

для любого $e \in E_\xi$ и $\xi \in B$. В частности, $(d_\xi \mathbf{f})(E_\xi) = \mathcal{L}_\xi$. Экспоненциальное отображение существует в силу теоремы о трубчатой окрестности.

Рассмотрим поднятие $\mathbf{f}^* \Psi$ исходной пуассоновой структуры Ψ при экспоненциальном отображении $\mathbf{f}$. Выберем базис $\{e^\sigma\}$ локальных сечений E^* . Пусть $\{e_\sigma\}$ – дуальный базис расслоения E . Рассмотрим координатную систему (ξ^i, x^σ) на E , где (ξ^i) – координаты вдоль B , а $\{x^\sigma\}$ – нормальные координаты к B , ассоциированные с базисом $\{e_\sigma\}$, $B = \{x = 0\}$. Тогда $\mathbf{f}^* \Psi$ является согласованным тензором Пуассона на E . Соответствующие попарные скобки для координатных функций вблизи B имеют вид

$$\{\xi^i, \xi^j\}_{\mathbf{f}^* \Psi} = -\omega^{ij} - \omega^{is} \mathcal{R}_{sm\nu} \omega^{mj} x^\nu + O_2, \quad (3.2)$$

$$\{\xi^i, x^\sigma\}_{\mathbf{f}^* \Psi} = \omega^{ij} \theta_{j\nu}^\sigma x^\nu + O_2, \quad (3.3)$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_{\mathbf{f}^* \Psi} = \lambda_\nu^{\alpha\beta} x^\nu + O_2. \quad (3.4)$$

Здесь $\omega^{is}(\xi) \omega_{sj}(\xi) = \delta_j^i$, (ω_{sj}) – коэффициенты симплектической формы (1.3), а $\lambda_\nu^{\alpha\beta}$, $\theta_{j\nu}^\sigma$, $\mathcal{R}_{sm\nu}$ – гладкие функции на B . Символ O_k обозначает член порядка k в формальном разложении функции в ряд Тейлора в точке $x = 0$. Отметим, что функции $\lambda_\nu^{\alpha\beta} = \lambda_\nu^{\alpha\beta}(\xi)$ являются структурными константами скобок Ли на слое E относительно базиса $\{e^\sigma(\xi)\}$.

Через $\Omega^k(B, E)$ будем обозначать пространство векторно-значных k -форм на B со значениями в пространстве гладких сечений пространства E . В частности, $\Omega^0(B, E) = C^\infty(B; E)$ является пространством векторно-значных функций на E . Введем матрично-значную 1-форму $\theta^\mathcal{L} = (\theta_\beta^\alpha)$ и векторно-значную 2-форму $\mathcal{R}^\mathcal{L} = (\mathcal{R}_\sigma) \in \Omega^2(B, E^*)$ с компонентами

$$\theta_\beta^\alpha = \theta_{i\beta}^\alpha(\xi) d\xi^i, \quad \mathcal{R}_\sigma = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{ij\sigma}(\xi) d\xi^i \wedge d\xi^j$$

относительно базиса $\{e^\alpha\}$. Можно показать [10], что существует линейная связность $\nabla^\mathcal{L}$ на E , для которой форма связности относительно базиса $\{e_\sigma\}$ задается в точности 1-формой $\theta^\mathcal{L}$. Важное наблюдение состоит в следующем: параллельный перенос $\nabla^\mathcal{L}$ сохраняет послойную структуру Ли–Пуассона линейной связности E . Кроме того, форма кривизны связности $\nabla^\mathcal{L}$ выражается через $\mathcal{R}^\mathcal{L}$ следующим образом:

$$\text{Curv}^{\nabla^\mathcal{L}} = d\theta^\mathcal{L} + \theta^\mathcal{L} \wedge \theta^\mathcal{L} = -\text{ad}^* \circ \mathcal{R}^\mathcal{L}.$$

Здесь ad^* – оператор коприсоединенного представления, действующий на слоях расслоения E . Через

$$\text{hor}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \theta_{i\nu}^\sigma(\xi) x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \quad (3.5)$$

обозначим горизонтальный лифт базисного векторного поля $\partial/\partial \xi^i$, $i = 1, \dots, \dim B$. Также введем скалярную 2-форму $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij}(\xi, x) d\xi^i \wedge d\xi^j$ на E с коэффициентами

$$\mathcal{F}_{ij}(\xi, x) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{ij}(\xi) - x^\nu \mathcal{R}_{ij\nu}(\xi). \quad (3.6)$$

Заметим, что $\mathcal{F}_{ij}(\xi, 0) = \omega_{ij}(\xi)$ и, следовательно, $\det[\mathcal{F}_{ij}(\xi, 0)] \neq 0 \quad \forall \xi \in B$. Таким образом, 2-форма $\mathcal{F}$ является невырожденной в открытой области

$$\mathcal{N} = \{(\xi, x) \in E \mid \det[\mathcal{F}_{ij}(\xi, x)] \neq 0\},$$

содержащей B . Элементы обратной к $[\mathcal{F}_{ij}]$ матрицы обозначим через $\mathcal{F}^{ij} = \mathcal{F}^{ij}(\xi, x)$, $\mathcal{F}^{is}\mathcal{F}_{sj} = \delta_j^i$. Введем бивекторное поле $\Pi_{\mathcal{L}}$ на $\mathcal{N} \subseteq E$, ассоциированное с данными $(\nabla^{\mathcal{L}}, \mathcal{R}^{\mathcal{L}})$, которые задаются соотношением

$$\Pi_{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\mathcal{F}^{ij} \text{hor}_i \wedge \text{hor}_j + \Lambda. \quad (3.7)$$

Здесь бивекторное поле Λ на E задано соотношением

$$\Lambda = \frac{1}{2}\lambda_{\nu}^{\alpha\beta}(\xi)x^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$$

и определяет линеаризованную трансверсальную пуассонову структуру тензорного поля Ψ на B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 [8]. *Для любой трансверсали $\mathcal{L}$ векторное поле $\Pi_{\mathcal{L}}$ в (3.7) задает согласованный тензор Пуассона на $\mathcal{N} \subseteq E$.*

Заметим, что пуассонова структура $\Pi_{\mathcal{L}}$ не зависит от выбора трансверсали $\mathcal{L}$ с точностью до изоморфизма в окрестности B (см. [6], [7]). Этот факт ведет к понятию линеаризованной пуассоновой структуры данного симплектического листа B .

Пусть задано *линейное векторное поле* $\mathcal{V}_f$ на E , которое проектируется на гамильтоново векторное поле v_f на (B, ω) ,

$$\mathcal{V}_f = v_f^i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^i} + V_{\nu}^{\alpha}(\xi)x^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}},$$

где $V = (V_{\nu}^{\alpha}(\xi))$ – матрично-значная функция на B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Линейное векторное поле $\mathcal{V}$ является гамильтоновым относительно пуассоновой структуры $\Pi_{\mathcal{L}}$ и послойно линейной функции $F = \pi^*f - \langle x, \eta \rangle$, $\eta \in C^{\infty}(B, E)$, тогда и только тогда, когда пара (η, V) удовлетворяет следующим уравнениям на B :*

$$d\eta - (\theta^{\mathcal{L}})^T \eta = -\mathbf{i}_{v_f} \mathcal{R}^{\mathcal{L}}, \quad (3.8)$$

$$V = -(\mathbf{i}_{v_f} \theta^{\mathcal{L}} + \text{ad}^* \circ \eta). \quad (3.9)$$

Здесь $\mathbf{i}_{v_f}$ обозначает внутреннее произведение векторного поля v_f и дифференциальной формы на B .

4. Инвариантные трансверсали и динамическое кручение. Пусть $\mathbf{f}$ – экспоненциальное отображение, ассоциированное с трансверсалью $\mathcal{L}$. Рассмотрим поднятие пуассоновой структуры $\mathbf{f}^*\Psi$ на E . Симплектический лист (B, ω) является также симплектическим листом для $\mathbf{f}^*\Psi$, чье нормальное расслоение отождествляется с E . Разлагая гамильтонову систему $(E, \mathbf{f}^*\Psi, \mathbf{f}^*H = H \circ \mathbf{f})$ в ряд Тейлора в точке $x = 0$ и используя соотношения (3.2)–(3.4), получаем

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \omega^{is}(\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi^s} + \Upsilon_{\nu}^i(\xi)x^{\nu} + O_2, \quad (4.1)$$

$$\frac{dx^{\sigma}}{dt} = [\lambda_{\nu}^{\sigma\beta}(\xi)\eta_{\beta}(\xi) - \theta_{j\nu}^{\sigma}(\xi)\omega^{js}(\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi^s}]x^{\nu} + O_2. \quad (4.2)$$

Здесь $f(\xi) = \mathbf{f}^* H(\xi, 0)$ и

$$\eta_\nu(\xi) = -\frac{\partial(\mathbf{f}^* H)}{\partial x^\nu}(\xi, 0), \quad (4.3)$$

а гладкие функции Υ_ν^i на B заданы соотношениями

$$\Upsilon_\nu^i \stackrel{\text{def}}{=} -\omega^{ij} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \xi^j} + \omega^{ij} \theta_{j\nu}^\alpha \eta_\alpha + \omega^{is} \mathcal{R}_{sm\nu} \omega^{mj} \frac{\partial f}{\partial \xi^j}. \quad (4.4)$$

С помощью функций η_ν определим вектор-функцию функции $\eta^\mathcal{L} = \eta_\nu(\xi) \otimes e^\nu(\xi)$ на B (глобальное сечение расслоения E^*). Кроме того, можно показать, что Υ_ν^i задают векторное поле

$$\Upsilon^\mathcal{L} = \Upsilon_\nu^i(\xi) x^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

на E , которое можно назвать *кручением* фазового потока поля $X_{\mathbf{f}^* H}$ относительно разложения (2.1). Зануление кручения $\Upsilon^\mathcal{L} = 0$ имеет следующую интерпретацию: трансверсаль инвариантна относительно $d\text{Fl}_{\mathbf{f}^* H}^t$. Ниже мы увидим, что $\eta^\mathcal{L}$ и $\Upsilon^\mathcal{L}$ зависят от выбора $\mathcal{L}$.

Теперь из соотношения (4.2) следует, что система в вариациях гамильтонова векторного поля $X_{\mathbf{f}^* H}$ на B имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = v_f, \quad (4.5)$$

$$\frac{dx}{dt} = -(\text{ad}_\eta^* + \mathbf{i}_{v_f} \theta)x. \quad (4.6)$$

Соответственно, векторное поле можно представить в виде

$$\text{var}_B(X_{\mathbf{f}^* H}) = \text{hor}_{v_f} - \left\langle \text{ad}_\eta^* x, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle. \quad (4.7)$$

Здесь hor_{v_f} является горизонтальным лифтом гамильтонова векторного поля v_f относительно связности $\nabla^\mathcal{L}$.

Теперь рассмотрим две трансверсали $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ к B . Пусть $l: T_B M \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ – проекция вдоль TB в соответствии с разложением (3.1). Задавая базис $\{n_\sigma\}$ (локальных) сечений расслоения $\mathcal{L}$, можно ввести базис $\{\tilde{n}_\sigma\}$ сечений расслоения $\tilde{\mathcal{L}}$ в виде $\tilde{n}_\sigma(\xi) = l_\xi(n_\sigma(\xi))$. Тогда имеем

$$\tilde{n}_\sigma(\xi) = n_\sigma + u_\sigma(\xi), \quad (4.8)$$

где u_σ – некоторые векторные поля на B , $u_\sigma(\xi) \in T_\xi B$. Используя эти векторные поля и симплектическую 2-форму ω на B , определим векторно-значную 1-форму $\varrho \in \Omega^1(B, E^*)$ следующим образом:

$$\varrho \stackrel{\text{def}}{=} -(\mathbf{i}_{u_\nu} \omega) \otimes e^\nu, \quad (4.9)$$

или, в координатном виде, как $\varrho_{i\nu} = \omega_{ij} u_\nu^j$. Так как ω невырожденная форма, при фиксированном $\mathcal{L}$ формула (4.9) задает однозначное соответствие между множеством всех

трансверсаль к B и пространством $\Omega^1(B, E^*)$ векторно-значных 1-форм на B . Непосредственные вычисления показывают, что данные, соответствующие $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$, удовлетворяют соотношениям

$$\nabla \tilde{\mathcal{L}} = \nabla \mathcal{L} - \text{ad}^* \circ \varrho, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{R} \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{R} \mathcal{L} + (\nabla \mathcal{L})^* \varrho^{\mathcal{L}} + \frac{1}{2}[\varrho^{\mathcal{L}} \wedge \varrho^{\mathcal{L}}]. \quad (4.11)$$

Кроме того,

$$\eta_{\sigma}^{\tilde{\mathcal{L}}} = \eta_{\sigma}^{\mathcal{L}} - L_{u_{\sigma}} f. \quad (4.12)$$

Из этих соотношений вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Система в вариациях, соответствующая гамильтоновой системе $X_{\mathbf{f}^*H}$ не зависит от выбора экспоненциального отображения $\mathbf{f}$,

$$\text{var}_B(X_{\mathbf{f}^*H}) = \text{var}_B(X_H).$$

Сравнивая (3.8) и (4.7) с (4.4), мы видим, что условие $\Upsilon^{\mathcal{L}} = 0$ эквивалентно уравнениям (3.8), (3.9) для $\eta^{\mathcal{L}}$ в (4.3). Таким образом, из предложения 3.2 следует основной результат нашей статьи.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть существует трансверсаль $\mathcal{L}$, которая инвариантна относительно $d\text{Fl}_H^t$. Пусть $\Pi^{\mathcal{L}}$ – соответствующая пуассонова структура в (3.7). Тогда векторное поле $\text{var}_B(X_H)$ является гамильтоновым относительно $\Pi^{\mathcal{L}}$ и функции

$$F^{\mathcal{L}}(\xi, x) = f(\xi) - \langle x, \eta^{\mathcal{L}}(\xi) \rangle.$$

В частном случае, анализируя уравнения (3.8), (3.9), можно вывести следующий критерий.

ТЕОРЕМА 4.3. Если трансверсальная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ симплектического листа B является полупростой, то существование X_H -инвариантной трансверсали является необходимым и достаточным условием для того, чтобы система в вариациях $\text{var}_B(X_H)$ была гамильтоновой в классе согласованных гамильтоновых структур на E .

С помощью этого критерия можно описать возможные препятствия к существованию гамильтоновой структуры в следующей простой ситуации.

ПРИМЕР 4.4. Пусть $B = (a, b) \times \mathbb{S}^1$ – двумерный цилиндр с введенной на нем канонической симплектической структурой $\omega = ds \wedge d\tau$, где $s \in (a, b)$ и $\tau \pmod{2\pi}$ – угловая координата на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Рассмотрим циклические пуассоновы скобки на $\mathbb{R}^3$, связанные с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(3)$,

$$\{x^1, x^2\} = x^3, \quad \{x^2, x^3\} = x^1, \quad \{x^3, x^1\} = x^2.$$

Рассмотрим $M = (a, b) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$ как прямое произведение двух пуассоновых многообразий. Ясно, что $B = (a, b) \times \mathbb{S}^1$ является симплектическим листом многообразия M . Рассмотрим гамильтонову систему на M , соответствующую функции

$$H = 1 - \langle x, \phi(s, \tau) \rangle + O_2,$$

где $\phi(s, \tau) = \phi(s, \tau + 2\pi)$ – гладкая вектор функция, 2π -периодическая по τ . Соответствующая система в вариациях гамильтонового поля X_H на листе B имеет вид

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{\tau} = 1, \quad (4.13)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \phi(s, \tau) \times \mathbf{x}. \quad (4.14)$$

Ясно, что (4.14) представляет собой однопараметрическое семейство периодических линейных систем на $\mathbb{R}^3$. Пусть $M(s)$ – соответствующая матрица монодромии, гладко зависящая от s . Тогда можно показать, что система (4.13), (4.14) допускает согласованную гамильтонову структуру тогда и только тогда, когда $M(s)$ удовлетворяет уравнению типа Лакса

$$\frac{d\mathcal{M}(s)}{ds} = [\mathcal{M}(s), \mathbb{A} \circ \mu(s)]$$

для некоторой гладкой вектор-функции $\mu(s)$. Здесь $\mathbb{A} \circ \mu(s)$ обозначает (3×3) кососимметричную матрицу векторного произведения на $\mathbb{R}^3$. Отсюда следует, что спектр $\mathcal{M}(s)$ не зависит от s (т.е. монодромия обладает свойством *изоспектральной деформации*). В противном случае, когда спес $\mathcal{M}(s)$ меняется вместе с изменением s , система (4.13), (4.14) не допускает *согласованную гамильтонову* структуру.

Автор благодарит М.В. Карасева и Рубена Флореса Эспинозу за полезные обсуждения различных аспектов данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Marsden J., Ratiu T., Rangel G. Symplectic connections and the linearization of hamiltonian systems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1991. V. 117. P. 329–380.
- [2] Marsden J. E., Ratiu T. S. Introduction to Mechanics and Symmetry. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [3] Karasev M. V., Vorobjev Yu. M. Adapted connections, Hamiltonian dynamics, geometric phases, and quantization over isotropic submanifolds // Amer. Math. Soc. Transl. 1998. V. 187. № 2. P. 203–326.
- [4] Flores Espinoza R., Vorobiev Yu. M. Hamiltonian formalism for fiberwise linear systems // Bol. Soc. Mat. Mexicana. 2000. V. 6. № 3. P. 213–234.
- [5] Vorobiev Yu. Hamiltonian equations of the first variation equations // Mathematics. 2000. V. 191. № 4. P. 447–502.
- [6] Vorobiev Yu. Coupling tensors and Poisson geometry near a single symplectic leaf // Lie Algebroids. V. 54. Warszawa: Banach Center Publ., 2001. P. 249–274.
- [7] Воробьев Ю. М. О линейризованных пуассоновых структурах // Матем. заметки. 2001. V. 70. № 4. P. 486–493.
- [8] Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 523–557.
- [9] Cannas da Silva A., Weinstein A. Geometric Models for Noncommutative Algebras. Berkeley Math. Lecture Notes. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999.
- [10] Karasev M. V., Vorobjev Yu. M. Deformations and cohomology of Poisson manifolds // Lecture Notes in Math. V. 1453. Berlin: Springer-Verlag, 1990. P. 271–289.