Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. О. Седова, Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 468–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:09:13

ВЫРОЖДЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ИССЛЕДОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. О. Седова

Основным прямым методом исследования устойчивости для дифференциальных уравнений является, как известно, метод Ляпунова. Отсутствие в общем случае эффективных алгоритмов построения функции с заданными свойствами для конкретной задачи определило одно из главных направлений развития этого метода – поиск возможностей расширения класса вспомогательных функций. Для функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием прямой метод разбивается в двух направлениях. Первое – метод функционалов Ляпунова–Красовского. Развитие классических теорем этого метода представлено, например, в [1]–[4].

В настоящей работе исследование проводится в рамках другого направления – метода функций, основы которого были заложены Б. С. Разумихиным (см. [5]). Предлагается исследовать устойчивость и асимптотическую устойчивость нулевого решения неавтономного уравнения с конечным запаздыванием, используя так называемые вырожденные вспомогательные функции. Отличие их от классических функций Ляпунова в том, что они не обязательно положительно определены, а лишь неотрицательны. Кроме того, в теоремах об асимптотической устойчивости допускается, что производная такой функции также может быть лишь знакопостоянной. Полученные теоремы развивают, в частности, результаты работ [6]–[11].

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ – пространство действительных n -векторов с нормой $|\cdot|$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $C(X, Y)$ – пространство непрерывных отображений $X \rightarrow Y$. Определим для $r > 0$ пространство $C := C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ функций φ с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : -r \leq s \leq 0\}$ и множества $C_a = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < a\}$, $\overline{C}_a = \{\varphi \in C : \|\varphi\| \leq a\}$ для произвольного $a > 0$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^+$ и $\beta > 0$. Для непрерывной функции $x : [\alpha - r, \alpha + \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $t \in [\alpha, \alpha + \beta)$ определим $x_t \in C$ по формуле $x_t(s) = x(t + s)$, $-r \leq s \leq 0$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t), \quad X(t, 0) = 0, \quad (1)$$

где $X \in C(\mathbb{R}^+ \times C_H, \mathbb{R}^n)$, $0 < H \leq +\infty$, и для каждого числа $q \in (0, H)$ существует неубывающая функция $\mu_q(u)$, $\mu_q(0) = 0$ такая, что $|\int_{t_1}^{t_2} X(\tau, u(\tau)) d\tau| \leq \mu_q(|t_2 - t_1|)$ для любого непрерывного отображения $u : [a, b] \rightarrow \overline{C}_q$ и любых $t_1, t_2 \in [a, b]$. Тогда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$ существует непродолжаемое решение $x(t; \alpha, \varphi)$ уравнения (1), определенное для $t \in [\alpha - r, \beta)$ и такое, что $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$ [4]. Кроме того, функционал $X(t, \varphi)$ удовлетворяет

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00877.

условию Липшица: для каждого множества $\overline{C}_q$, $q < H$, существует $l = l(q) > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{C}_q$ выполняется неравенство $|X(t, \varphi_2) - X(t, \varphi_1)| \leq l \|\varphi_2 - \varphi_1\|$.

Дополнительно нам понадобятся следующие предположения и построения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Функционал $X(t, \varphi)$ ограничен и равномерно непрерывен на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, где $K \subset C_H$ – компакт.*

Данному предположению удовлетворяют, в частности, все непрерывные функционалы вида $X(\varphi)$, а также периодические и почти периодические по t .

Обозначим $\mathcal{F}_X = C(\mathbb{R}^+ \times C_H, \mathbb{R}^n)$, и пусть $X^\tau \in \mathcal{F}_X$ – сдвиг функционала X , определяемый равенством $X^\tau(t, \varphi) = X(\tau + t, \varphi)$. Определим сходимость в $\mathcal{F}_X$ как равномерную на каждом компакте $K' \subset \mathbb{R}^+ \times C_H$. Тогда семейство $\{X_\tau(t, \varphi) = X(\tau + t, \varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\}$ предкомпактно в $\mathcal{F}_X$ и уравнению (1) можно сопоставить семейство предельных уравнений [12] $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$, где $X^*(t, \varphi) \in \mathcal{F}_X$ есть предельный к X функционал, определенный равенством

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} X(t_k + t, \varphi) = X^*(t, \varphi).$$

В силу условия Липшица решение уравнения (1) и каждого предельного к нему уравнения для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$ будет единственным.

Кроме стандартных определений устойчивости нулевого решения по Ляпунову для уравнения (1) (см., например, [12]), мы используем следующие

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Нулевое решение уравнения (1) называется *равномерно притягивающим относительно множества* $\Lambda \subset C_H$, если существует $\Delta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [C_\Delta \cap \Lambda]$ справедливо неравенство $|x(t; \alpha, \varphi)| < \varepsilon$, как только $t > \alpha + T$. Нулевое решение уравнения (1) называется *(равномерно) асимптотически устойчивым относительно множества* $\Lambda \subset C_H$, если условия (равномерной) асимптотической устойчивости выполняются для $\varphi \in \Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Нулевое решение называется *асимптотически устойчивым относительно множества* $\Lambda \subset C_H$ *равномерно по* $\{\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ и $\Delta = \Delta(\alpha) > 0$ такие, что из $\varphi \in \Lambda \cap \{\|\varphi\| \leq \delta\}$ следует $|x^*(t; \alpha, \varphi)| \leq \varepsilon$ при всех $t \geq \alpha$, а из $\varphi \in \Lambda \cap \{\|\varphi\| \leq \Delta\}$ следует $|x^*(t; \alpha, \varphi)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ для каждого решения $x^*(t; \alpha, \varphi)$ любого предельного уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$.

Функцию $V \in C^1(\mathbb{R}^+ \times G_H, \mathbb{R}^+)$, где $G_H = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < H\}$, удовлетворяющую условию $V(t, 0) \equiv 0$, назовем *функцией Ляпунова*. Ее производная в силу уравнения (1) есть функционал $V': \mathbb{R}^+ \times C_H \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый формулой

$$V'(t, \varphi) = \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial x_i} X_i(t, \varphi).$$

Обозначим $\Omega_t(V) = \{\varphi \in C_H : V(t + s, \varphi(s)) \leq V(t, \varphi(0)), -r \leq s \leq 0\}$. Во всех приведенных ниже утверждениях мы дополнительно предполагаем, что $V'(t, \varphi) \leq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$.

Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости нулевого решения уравнения (1). Пусть сначала правая часть уравнения удовлетворяет дополнительному предположению 1. Классическая теорема Разумихина [5] утверждает, что для устойчивости достаточно существование положительно определенной функции Ляпунова, производная которой в силу уравнения неположительна для всех $(t, \varphi) : t \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \Omega_t(V)$. Оказывается, использование определенных свойств предельных уравнений позволяет применять для доказательства устойчивости знакопостоянные функции. Для каждого числа $c \in \mathbb{R}^+$ и непрерывной функции $V(t, x)$ определим множество

$$V_{\max}^{-1}(\infty, c) = \left\{ \varphi \in C_H \mid \exists \varphi_n \rightarrow \varphi, t_n \rightarrow +\infty : \right. \\ \left. \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-r \leq s \leq 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(t_n, \varphi_n(0)) = c \right\}.$$

Определим также класс функций $\mathcal{K} = \{\sigma \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \sigma(u) \text{ строго возрастает и } \sigma(0) = 0\}$.

Тогда если существует функция Ляпунова V такая, что нулевое решение асимптотически устойчиво относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)\}$, то нулевое решение уравнения (1) устойчиво. Если при этом $V(t, x) \leq b(|x|)$, $b \in \mathcal{K}$, то нулевое решение уравнения (1) равномерно устойчиво [11].

Для исследования асимптотической устойчивости нам потребуются следующие дополнительные предположения [8].

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Функция $V(t, x)$ равномерно непрерывна и ограничена на множествах вида $\mathbb{R}^+ \times \overline{G}_q$, где $\overline{G}_q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq q\}$, $0 < q < H$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Функционал $U(t, \varphi) = V'(t, \varphi)$ равномерно непрерывен и ограничен на множествах вида $\mathbb{R}^+ \times K$, $K \subset C_H$ — компакт.

При таких условиях семейства сдвигов $\{V_\tau(t, x), \tau \in \mathbb{R}^+\}$ и $\{U_\tau(t, \varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\}$ предкомпактны в соответствующих пространствах $\mathcal{F}_V$ и $\mathcal{F}_U$ с метризуемой компактно-открытой топологией [12], [13] и существуют предельные функции, любую из которых мы будем обозначать $V^*(t, x)$, и предельные функционалы $U^*(t, \varphi)$.

Теперь для произвольных $c_0, t \in \mathbb{R}^+$ и последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, определяющей предельные V^* и U^* , обозначим

$$M(t, V^*, c_0) = \left\{ \varphi \in C_H \mid \max_{-r \leq s \leq 0} V^*(t+s, \varphi(s)) = V^*(t, \varphi(0)) = c_0 \right\},$$

$L(t, U^*) = \{\varphi \in C_H \mid U^*(t, \varphi) = 0\}$. Вместо множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$ будем использовать

$$N = \{\varphi \in C_H \mid \exists V^*(t, x) : V^*(s, \varphi(s)) = 0, s \in [-r, 0]\}$$

(для функции Ляпунова V , удовлетворяющей предположению 2, $N \equiv V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$).

Теорема Красовского об асимптотической устойчивости [14] использует положительно определенную функцию, производная которой отрицательно определена для каждого $t \in \mathbb{R}^+$ на множестве $\Omega_t(V, \eta) = \{\varphi \in C_H : V(t+s, \varphi(s)) \leq \eta(V(t, \varphi(0))), -r \leq s \leq 0\}$, где функция $\eta \in \mathcal{K}$, $\eta(u) > u$ при $u > 0$ (очевидно, $\Omega_t(V, \eta)$ содержит $\Omega_t(V)$, но в общем случае не совпадает с ним).

Для уравнений с правой частью, удовлетворяющей дополнительному предположению 1, в работе [8] асимптотическая устойчивость доказана в предположении существования знакоопределенной функции Ляпунова с производной, знакопостоянной на множестве $\Omega_t(V)$. Однако и этот результат можно улучшить, отказавшись от знакоопределенности функции V .

А именно, если правая часть уравнения (1) удовлетворяет предположению 1, то в приведенных обозначениях справедлив следующий результат [11].

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что существует функция Ляпунова $V: \mathbb{R}^+ \times G_H \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что выполняются предположения 2–3, нулевое решение асимптотически устойчиво относительно множества N равномерно по $\{\dot{x}(t) = X^*(t, \varphi)\}$ и для любого достаточно малого $c > 0$ существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, для которой множество $M(t, V^*, c) \cap L(t, U^*)$ не содержит решений уравнения $\dot{x} = X^*(t, x_t)$. Тогда нулевое решение уравнения (1) эквивалентно асимптотически устойчиво. Если вдобавок $V(t, x) \leq b(|x|)$, $b \in \mathcal{K}$, и последнее условие выполняется для любой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, то нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Для случая, когда правая часть уравнения не зависит от t или периодична по t с некоторым периодом T , из приведенной теоремы легко получить следствия, в которых не используются предельные уравнения, поскольку для $X(t, \varphi) \equiv X(\varphi)$ все предельные функционалы совпадают с $X(\varphi)$, а для периодического $X(t, \varphi)$ имеют вид $X^*(t, \varphi) = X(t+\gamma, \varphi)$, $\gamma \in [0, T)$. Отсюда получаем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X(t, \varphi) \equiv X(\varphi)$ и существует функция Ляпунова $V: G_H \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что нулевое решение асимптотически устойчиво относительно множества

$\{\varphi \in C_H : V(\varphi(s)) \equiv 0, s \in [-r, 0]\}$. Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно устойчиво. Если при этом множество

$$\left\{ \varphi \in C_H : \max_{-r \leq s \leq 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0)) > 0, V'(\varphi) = 0 \right\}$$

не содержит решений уравнения (1), то нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторого $T > 0$ $X(t, \varphi) \equiv X(t+T, \varphi)$ и существует функция Ляпунова $V: \mathbb{R}^+ \times G_H \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что $V(t+T, x) \equiv V(t, x)$ и нулевое решение асимптотически устойчиво относительно множества $\{\varphi \in C_H : V(s, \varphi(s)) \equiv 0, s \in [-r, 0]\}$. Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно устойчиво. Если при этом множество

$$\left\{ \varphi \in C_H : \max_{-r \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi(s)) = V(t, \varphi(0)) > 0, V'(t, \varphi) = 0 \right\}$$

не содержит решений уравнения (1), то нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 2 обобщает теорему из [7] на случай знакопостоянной функции $V(x)$; теорема 3 развивает аналогичный результат из [9], полученный в предположении существования положительно определенной функции $V(t, x)$ с неположительной на множестве $\Omega_t(V, \eta)$ производной.

Пусть теперь правая часть уравнения (1) является равномерно почти периодической по t , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и каждого компакта $K \subset C_H$ существует число $L = L(\varepsilon, K) > 0$ такое, что для любого $a \in \mathbb{R}$ найдется $\tau \in [a, a+L]$, при котором для всех $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in K$ выполняется неравенство $|X(t+\tau, \varphi) - X(t, \varphi)| < \varepsilon$. Тогда функционал $X(t, \varphi)$ удовлетворяет предположению 1 и существует предельный функционал $X^*(t, \varphi) \equiv X(t, \varphi)$. Поэтому из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X(t, \varphi)$ – равномерно почти периодический по t и существует функция Ляпунова $V: G_H \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что выполняется предположение 3, нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво относительно $\{\varphi \in C_H : V(\varphi(s)) \equiv 0, s \in [-r, 0]\}$, а множество

$$\left\{ \varphi \in C_H : \max_{-r \leq s \leq 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0)) > 0, V'(t, \varphi) = 0 \right\}$$

не содержит решений уравнения (1). Тогда нулевое решение уравнения (1) эквивалентно асимптотически устойчиво.

Приведем теперь результаты об устойчивости и асимптотической устойчивости для уравнения (1), правая часть которого не удовлетворяет предположению 1. Помимо множества $V_{\max}^{-1}(\infty, c)$ используем также множество

$$U^{-1}(\infty, 0) = \left\{ \varphi \in C_H \mid \exists \varphi_n \rightarrow \varphi, t_n \rightarrow +\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} U(t_n, \varphi_n) = 0 \right\},$$

определяемое функционалом $U: \mathbb{R}^+ \times C_H \rightarrow \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 5. Если существует функция Ляпунова $V: \mathbb{R}^+ \times G_H \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что нулевое решение является равномерно притягивающим относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$, то нулевое решение уравнения (1) устойчиво. Если к тому же $V(t, x) \leq b(|x|)$ для некоторой функции $b \in \mathcal{H}$, то нулевое решение уравнения (1) равномерно устойчиво. Наконец, потребовав дополнительно, чтобы $|V'(t, \varphi)| \geq U(t, \varphi) \geq 0$ для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$ (где $U(t, \varphi)$ – функционал, равномерно непрерывный на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, $K \subset C_H$ – компакт), и чтобы множество $U^{-1}(\infty, 0) \cap V_{\max}^{-1}(\infty, c)$ было пусто при $c > 0$, получим достаточные условия для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1).

Если на множестве $\{(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H : \varphi \in \Omega_t(V)\}$ справедлива оценка $V'(t, \varphi) \leq -c(V(t, \varphi(0)))$, $c \in \mathcal{X}$, то, очевидно, последнее условие теоремы 5 выполняется (аналогичная оценка предложена в [10] при исследовании асимптотической устойчивости решения обыкновенного дифференциального уравнения). В случае предкомпактности правой части уравнения (1) теорема 5 является следствием теоремы 1, а в случае автономной или периодической правой части совпадает соответственно с теоремами 2 и 3. Из теоремы 5 следует, что если в последнем условии теоремы 4 равенство $V'(t, \varphi) = 0$ заменить соотношением $\varphi \in U^{-1}(\infty, 0)$, то получим достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) с равномерно почти периодической по t правой частью (заметим, что в отличие от автономного и периодического случая, для почти периодического функционала $X(t, \varphi)$ асимптотическая устойчивость не обязана быть равномерной, более того, нулевое решение такого уравнения может быть равномерно устойчивым и притягивающим, но не являться равномерно асимптотически устойчивым).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. С., Павликов С. В. // ПММ. 1999. Т. 63. № 1. С. 3–12.
2. Андреев А. С., Хусанов Д. Х. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 7. С. 876–885.
3. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
5. Разумихин Б. С. // ПММ. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.
6. Андреев А. С. // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 2. С. 151–153.
7. Haddock J., Terj'eki J. // J. Differential Equations. 1983. V. 48. P. 95–122.
8. Andreev A. S., Sedova N. O. // Functional Differential Equations. 1998. V. 5. P. 21–37.
9. Ким А. В. i -Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
10. Iggidr A., Sallet G. // Automatica. 2003. V. 39. P. 167–171.
11. Sedova N. // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 281. № 1. P. 307–319.
12. Андреев А. С., Хусанов Д. Х. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 4. С. 435–440.
13. Sell G. R. // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. P. 214–262.
14. Красовский Н. Н. // ПММ. 1956. Т. 20. № 4. С. 513–518.