Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. М. Стругова, Об устойчивости линейных стохастических разностных систем с почти периодическими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 472–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:20:23

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. М. Стругова

Введение. В цикле работ [1]–[7] предложен вариант прямого метода Ляпунова для различных классов уравнений с почти периодическими коэффициентами, в котором условие на производную функции (функционала) Ляпунова вдоль траекторий системы существенно ослаблено по сравнению с известными результатами для систем общего вида. В данной работе развитый в [1]–[7] подход к анализу устойчивости решений почти периодических уравнений распространен на класс линейных неавтономных динамических систем с дискретным временем, параметры которых подвергаются случайным воздействиям типа белого шума. Задача об устойчивости в среднем квадратичном решений этой системы приводится к задаче об устойчивости решений детерминированного линейного разностного уравнения с почти периодическими коэффициентами, фазовым пространством которого является конус K эрмитово-неотрицательных матриц в пространстве $H = \text{Mat}(N, \mathbb{C})$. На основе указанного подхода получен достаточный признак экспоненциальной устойчивости. Преодолеваемые трудности связаны со спецификой фазового пространства и, соответственно, со спецификой функции Ляпунова. Центральным местом в обосновании является построение “разрешающей” пары (E, f) : компакта E в прямом произведении конуса K и банахова пространства ограниченных функций $Z \rightarrow \text{Hom}(H \rightarrow H)$ и непрерывного отображения $f: E \rightarrow [0, 1]$; вытекающая отсюда оценка $\sup f(E) < 1$ позволила получить требуемую экспоненциальную оценку для нормы решения.

Далее применяются следующие обозначения: $\mu(h)$ – максимальное собственное число эрмитовой матрицы $h \in H$; $|h| = [\mu(hh^*)]^{1/2}$ – норма $h \in H$; $[H] = \text{Hom}(H \rightarrow H)$; $|\Lambda| = \sup_{|h|=1} |\Lambda h|$ – норма оператора $\Lambda \in [H]$; L – банахово пространство ограниченных оператор-функций $\Lambda_n: \mathbb{Z} \rightarrow [H]$ с нормой $\|\Lambda_n\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\Lambda_n|$. Здесь “*” означает транспонирование и комплексное сопряжение.

Постановка задачи. Формулировка результата. Рассматривается система

$$x_{n+1} = (A_n + B_n \xi_n) x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Здесь A_n, B_n – почти периодические матрицы порядка N , ξ_n – последовательность независимых случайных величин со значениями в C ,

$$M[\xi_n] = 0, \quad M[\xi_n^2] = 1. \quad (2)$$

Почти периодичность матриц A_n, B_n означает выполнение критерия Бохнера [8]: каждое из семейств сдвигов $A_{n+m}, B_{n+m}, m \in \mathbb{Z}$, – предкомпакт в L . Под решением системы (1) понимается случайная функция со значениями в $\mathbb{C}^N$, с вероятностью единица обращающая (1) в тождество на каждом отрезке $[0, n] \subset \mathbb{Z}$. Имеет место однозначная разрешимость задачи Коши для системы (1) в указанном классе функций с начальным условием $x_0 \in \mathbb{C}^N$. Обозначим h_n матрицу вторых моментов случайного вектора x_n в (1):

$$h_n = M[x_n x_n^*]. \quad (3)$$

Так как реализации случайной матрицы $x_n x_n^*$ эрмитово-неотрицательны, матрица h_n так же эрмитово-неотрицательна.

Будем говорить, что решение $x_n = 0$ системы (1) *экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном*, если существуют такие постоянные $\alpha > 0, \beta > 0$, что для любого решения x_n соответствующая матрица (3) удовлетворяет оценке

$$\mu(h_n) \leq \alpha e^{-\beta n} \mu(h_0), \quad n > 0. \quad (4)$$

Умножая столбец x_{n+1} в (1) справа на строку $x_{n+1}^* = x_n^* (A_n^* + B_n^* \bar{\xi}_n)$ и переходя в полученном равенстве к математическим ожиданиям, с учетом (2) получим уравнение на h_n :

$$h_{n+1} = \Lambda_n h_n, \quad (5)$$

где Λ_n при каждом n – оператор из $[H]$, определяемый формулой

$$\Lambda_n h = A_n h A_n^* + B_n h B_n^*.$$

Очевидно, оператор Λ_n переводит конус K в себя:

$$\Lambda_n: K \rightarrow K;$$

поэтому траектории системы (5), начинающиеся в K , целиком лежат в K . Из почти периодичности матриц A_n, B_n следует, что оператор-функция $\Lambda_n \in L$ почти периодична в топологии пространства L . Определение (4) экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном нулевого решения системы (1) означает требование сходимости траекторий такого типа системы (5) к вершине конуса $h = 0$ с экспоненциальной скоростью.

Зафиксируем почти периодическую матрицу Γ_n порядка N , $|\det \Gamma_n| \geq \text{const} > 0$, и определим оператор-функцию $G_n \in L$ и функцию $V: K \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ формулами

$$G_n h = \Gamma_n^* h \Gamma_n, \quad V(h, n) = \mu^2(G_n, h). \quad (6)$$

Разностная производная (первая разность) функции V вдоль лежащих в конусе K траекторий системы (5) имеет вид

$$\Delta V(h, n) = \mu^2(G_{n+1} \Lambda_n h) - \mu^2(G_n h). \quad (7)$$

ТЕОРЕМА. Пусть существует матрица Γ_n с указанными выше свойствами такая, что

- 1) $\Delta V(h, n) \leq 0$;
- 2) $\Delta V(h, n)$ отлична от тождественного нуля на каждом ненулевом решении системы (5) со значениями в K .

Тогда решение $x_n = 0$ системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном.

Обоснование результата. (i) Выполняя в (5) замену $h_n \rightarrow y_n$ по формуле $y_n = G_n h_n$, получим эквивалентную систему

$$y_{n+1} = \pi_n y_n, \quad \pi_n = G_{n+1} \Lambda_n G_n^{-1}. \quad (8)$$

Функции (6), (7) принимают вид

$$V(y) = \mu^2(y), \quad \Delta V(y, n) = \mu^2(\pi_n y) - \mu^2(y), \quad y \in K, \quad (9)$$

а условия 1), 2) теоремы – соответственно вид

$$\Delta V(y, n) \leq 0, \quad \Delta V(y, n) \not\equiv 0 \quad (10)$$

на каждом ненулевом решении y_n системы (8) со значениями в K . С учетом выбора матрицы Γ_n имеем $G_n, G_n^{-1}, \pi_n \in L$ почти периодически в топологии пространства L и при каждом $n \in \mathbb{Z}$ переводят конус K в себя. Для доказательства теоремы достаточно получить для решений системы (8) со значениями в K оценку (4) с заменой h_n на y_n .

(ii) Пусть Π – оболочка почти периодической оператор-функции, π_n – замыкание в топологии L семейства сдвигов π_{n+m} , $m \in \mathbb{Z}$; S – пересечение единичной сферы в H с конусом K . В силу критерия Бохнера множество $E = \Pi \times S$ – компакт в метрическом пространстве $L \times K$.

Будем кратко обозначать произвольный элемент компакта E буквой δ . Поставим в соответствие каждому $\delta = (P_n, z_0) \in E$ решение $z_n = z_n(\delta)$ задачи Коши

$$z_{n+1} = P_n z_n, \quad z_0 \text{ задано.} \quad (11)$$

Очевидно $P_n: K \rightarrow K, z_n \in K$ при всех n . Построим последовательность функций $\omega_n: E \rightarrow [0, \infty)$ по формуле

$$\omega_n(\delta) = \mu^2(z_n(\delta)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из (10) следуют соотношения

$$0 \leq \omega_{n+1}(\delta) \leq \omega_n(\delta), \quad \omega_{n+1}(\delta) - \omega_n(\delta) \not\equiv 0. \quad (12)$$

Рассмотрим множества

$$M(\delta) = \{n \in \mathbb{N} : \omega_{n-1}(\delta) - \omega_n(\delta) > 0\}, \quad \delta \in E.$$

Нетрудно убедиться, что функция $\varphi: E \rightarrow \mathbb{N}$, определяемая формулой

$$\varphi(\delta) = \min_{\delta \in E} M(\delta),$$

полунепрерывна сверху на компакте E , поэтому ограничена сверху. Отсюда следует, что существует число $r \geq 1$ такое, что для любого $\delta \in E$ множество $M(\delta) \cap [0, r]$ непусто.

Построим отображение $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$f(\delta) = \omega_r(\delta).$$

а) Покажем, что $f(E) \subset [0, 1]$. В самом деле, в случае $\omega_r(\delta) \neq 0$ для некоторого $\delta \in E$ с учетом (12) имеем $\omega_i(\delta) \neq 0$ при $i < r$, и имеет место равенство

$$f(\delta) = \omega_0(\delta) \prod_{i=1}^r \frac{\omega_i(\delta)}{\omega_{i-1}(\delta)}.$$

Все множители в правой части ≤ 1 и, с учетом выбора r хотя бы один из них меньше 1.

б) В силу очевидной непрерывной зависимости решений задачи Коши (11) от коэффициентов и начальных данных отображение f непрерывно на компакте E .

Из а), б) следует, что $f(E)$ – компакт в $[0, 1)$. Поэтому существует такая константа $a > 0$, что $\sup f(E) = e^{-a}$; отсюда

$$\omega_r(\delta) \leq e^{-a}, \quad \delta \in E. \quad (13)$$

(iii) Пусть y_n – ненулевое решение системы (8). Покажем, что верна оценка

$$|y_{kr}| \leq e^{-ka/2} |y_0|, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где r – построенная выше константа. Рассматривая систему (8) на отрезке $[kr, (k+1)r]$ и вводя обозначения

$$z_m = \frac{y_{m+kr}}{|y_{kr}|}, \quad P_m^{(k)} = \pi_{m+kr},$$

получим

$$z_{m+1} = P_m^{(k)} z_m, \quad m \in [0, r],$$

где пара $\delta_k = (P_m^{(k)}, z_0)$ принадлежит компакту E . В силу (13) имеем $|z_r| \leq e^{-2}$ или, что то же,

$$|y_{(k+1)r}| \leq e^{-a/2} |y_k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

отсюда следует оценка (14).

Далее, пусть $n = kr + j$, $j \in [0, r)$. Так как $P_m^{(k)} \in L$, то $\|P_m^{(k)}\| \leq C$ при некотором $C > 0$; можно считать $C \geq 1$. Поэтому, с учетом (14) имеем

$$|y_n| \leq C^j |y_{kr}| \leq C^r e^{-ka/2} |y_0|.$$

Обозначая $\alpha = C^r e^{a/2}$, $\beta = a(2r)^{-1}$, получим

$$|y_n| \leq \alpha e^{-n\beta} |y_0|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [9] рассматривается линейная разностная стохастическая система вида (1) с непрерывным временем с постоянными матрицами A , B . Установлен, путем перехода к детерминированной системе вида (5) и последующего применения прямого метода Ляпунова, критерий асимптотической устойчивости в среднем квадратичном в терминах решений матричного уравнения Сильвестра

$$X - A^* X A - B^* X B = I,$$

а также спектральный критерий в терминах собственных чисел матрицы $A \otimes A + B \otimes B$, где $\otimes$ – знак кронекерова произведения. В построениях не использована специфика фазового пространства детерминированной системы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский С. М., Котюргина А. С., Романовский Р. К. // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 6. С. 10–14.
2. Кириченко О. В., Котюргина А. С., Романовский Р. К. // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 1. С. 170–174.
3. Добровольский С. М., Романовский Р. К. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 151–153.
4. Кириченко О. В. // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 1. С. 45–48.
5. Алексенко Н. В. // Изв. вузов. Матем. 2000. № 2. С. 3–6.
6. Алексенко Н. В., Романовский Р. К. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 147–153.
7. Романовский Р. К., Троценко Г. А. // Сиб. матем. ж. 2003. Т. 44. № 2. С. 444–453.
8. Леви-тан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
9. Корневский Д. Г. // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 2. С. 213–229.

Омский государственный технический университет

Поступило

10.05.2003

Исправленный вариант

15.11.2004