Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Тихонов, Об интегрируемости тригонометрических рядов, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 476–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:19:28

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

С. Ю. Тихонов

1. Введение. В работе изучаются вопросы интегрируемости рядов $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx$ и $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$. Прежде всего, запишем классический результат Янга–Боаса–Хейвуда для рядов с монотонно убывающими коэффициентами.

ТЕОРЕМА 1 [1]–[3]. Пусть $\lambda_n \downarrow 0$. Если $0 \leq \alpha < 2$, то

$$\frac{g(x)}{x^\alpha} \in L(0, \pi) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \lambda_n < \infty.$$

Если $0 < \alpha < 1$, то

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} \in L(0, \pi) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \lambda_n < \infty.$$

В дальнейших исследованиях этот результат обобщался в нескольких направлениях (см., например, [4], [5]): рассматривались более общие весовые функции γ , рассматривалась интегрируемость с весом γ функций $g(x)$ и $f(x)$ в степени p для разных значений p , также рассматривались более общие условия на коэффициенты $\{\lambda_n\}$.

Запишем следующее определение (см. [6]). Нуль-последовательность положительных чисел $c := \{c_n\}$ принадлежит классу $R_0^+ BVS$, если неравенство $\sum_{n=m}^{\infty} |c_n - c_{n+1}| \leq K(c) c_m$ справедливо для всех натуральных m . Ясно, что класс монотонных последовательностей $M = \{c : c_n \downarrow 0\}$ есть подкласс $R_0^+ BVS$, но класс квазимонотонных последовательностей $QM = \{c : \exists \tau \geq 0 \text{ такое, что } c_n n^{-\tau} \downarrow 0\}$ не сравним с классом $R_0^+ BVS$ (см. [6]), т.е. найдется $c^* \in QM$, но $c^* \notin R_0^+ BVS$, и наоборот.

В [6] показано, что ряды с коэффициентами из класса $R_0^+ BVS$ сходятся, кроме, возможно, $x = 0$ для косинус-ряда и сходятся равномерно на промежутке $\delta \leq x \leq \pi - \delta$ для любого $0 < \delta < \pi$. Там же доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\lambda_n\} \in R_0^+ BVS$, $1 < p < \infty$ и $1/p - 1 < \theta < 1/p$. Тогда

$$\frac{|\psi(x)|^p}{x^{p\theta}} \in L(0, \pi) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{p\theta+p-2} \lambda_n^p < \infty,$$

где функция $\psi(x)$ – или $f(x)$, или $g(x)$.

Недавно в [7] были рассмотрены более общие, чем степенные, весовые функции и найдены достаточные условия интегрируемости с такими весами синус-рядов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\lambda_n\} \in R_0^+ BVS$ и последовательность $\gamma := \{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-2+\varepsilon}\}$ почти убывает. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \lambda_n < \infty \implies \gamma(x) g(x) \in L(0, \pi).$$

Здесь и далее мы определяем функцию $\gamma(x)$ по последовательности γ следующим образом: $\gamma(\pi/n) := \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$, и существуют положительные константы A и B такие, что

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00080, European Commission, Contract MIF 1-2004-509465, и Centre de Recerca Matematica, Barcelona.

$A\gamma_n \leq \gamma(x) \leq B\gamma_{n+1}$ для $x \in (\pi/(n+1), \pi/n)$. Последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_n\}$ называется *почти возрастающей* (почти убывающей), если неравенство $C\gamma_n \geq \gamma_m$ ($\gamma_n \leq C\gamma_m$) справедливо для всех натуральных $n \geq m$.

В данной работе решается следующая задача: найти необходимые и достаточные условия интегрируемости в p -й степени сумм синус- и косинус-рядов с весом γ . В качестве решения мы выпишем условия на коэффициенты $\{\lambda_n\}$, которые, в зависимости от поведения γ , будут достаточными или необходимыми. Полученные результаты уточняют результаты теорем 1–3.

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{\lambda_n\} \in R_0^+ BVS$ и $1 \leq p < \infty$.

А) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-p-1+\varepsilon_1}\}$ является почти убывающей, то условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^{p-2} \lambda_n^p < \infty \quad (1)$$

достаточно для выполнения условия

$$\gamma(x)|g(x)|^p \in L(0, \pi). \quad (2)$$

Б) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_2}\}$ является почти возрастающей, то условие (1) необходимо для выполнения условия (2).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\lambda_n \in R_0^+ BVS$ и $1 \leq p < \infty$.

А) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_3 > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-1+\varepsilon_3}\}$ является почти убывающей, то условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^{p-2} \lambda_n^p < \infty \quad (3)$$

достаточно для выполнения условия

$$\gamma(x)|f(x)|^p \in L(0, \pi). \quad (4)$$

Б) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_4 > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_4}\}$ является почти возрастающей, то условие (3) необходимо для выполнения условия (4).

3. Доказательство теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. А) Пусть $x \in (\pi/(n+1), \pi/n]$. Тогда, используя преобразование Абеля, получим

$$|g(x)| \leq x \sum_{k=1}^n k\lambda_k + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \sin kx \right| \leq x \sum_{k=1}^n k\lambda_k + \sum_{k=n}^{\infty} |(\lambda_k - \lambda_{k+1})\tilde{D}_k(x)|,$$

где $\tilde{D}_k(x) := \sum_{n=1}^k \sin nx$, $k \in \mathbb{N}$. Используя соотношение $|\tilde{D}_k(x)| = O(1/x)$ и условие $\{\lambda_n\} \in R_0^+ BVS$, получим

$$|g(x)| \leq C \left(x \sum_{k=1}^n k\lambda_k + n \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \right) \leq C \left(x \sum_{k=1}^n k\lambda_k + n\lambda_n \right) \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n k\lambda_k.$$

В последнем неравенстве мы использовали тот факт, что если $\lambda = \{\lambda_n\} \in R_0^+ BVS$, то λ почти убывает. Здесь и далее C и C_i будут обозначать положительные константы, быть может, разные в разных случаях.

Таким образом,

$$\int_0^\pi \gamma(x) |g(x)|^p dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} \gamma(x) |g(x)|^p dx \leq C \sum_{n=1}^\infty \frac{\gamma_n}{n^{2+p}} \left(\sum_{k=1}^n k \lambda_k \right)^p.$$

Применяя (см., например, [8]) неравенство для последовательностей $\{a_n \geq 0\}$ и $\{\lambda_n > 0\}$:

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{\nu=n}^\infty \lambda_\nu \right)^p, \quad p \geq 1, \quad (5)$$

получим

$$\int_0^\pi \gamma(x) |g(x)|^p dx \leq C \sum_{k=1}^\infty (k \lambda_k)^p \left(\frac{\gamma_k}{k^{2+p}} \right)^{1-p} \left[\sum_{\nu=k}^\infty \frac{\gamma_\nu}{\nu^{2+p}} \right]^p.$$

Используя условия на последовательность $\{\gamma_\nu\}$, получим

$$\sum_{\nu=k}^\infty \frac{\gamma_\nu}{\nu^{2+p}} \leq C \frac{\gamma_k}{k^{1+p-\varepsilon_1}} \sum_{\nu=k}^\infty \nu^{-\varepsilon_1-1} \leq C \frac{\gamma_k}{k^{1+p}};$$

тогда

$$\int_0^\pi \gamma(x) |g(x)|^p dx \leq C \sum_{k=1}^\infty \gamma_k k^{p-2} \lambda_k^p,$$

что завершает доказательство пункта А.

Б) Заметим, что из условия (2) следует, что $g(x) \in L(0, \pi)$. Действительно, если $p \in (1, \infty)$, то применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\int_0^\pi |g(x)| dx \leq \left(\int_0^\pi |g(x)|^p \gamma(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\pi (\gamma(x))^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} =: I,$$

где $p' = p/(p-1)$. Так как

$$\int_0^\pi (\gamma(x))^{-p'/p} dx \leq C \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{\gamma_n} \right)^{1/(p-1)} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} dx \leq \left(\frac{C}{\gamma_1} \right)^{1/(p-1)} \sum_{n=1}^\infty n^{-1-\frac{\varepsilon_2}{p-1}} \leq C_1,$$

то из условия (2) следует $I \leq C_2$.

Пусть $p = 1$. Тогда можно утверждать, что γ_n почти возрастает и, значит,

$$\int_0^\pi |g(x)| dx \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{A \gamma_n} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} |g(x)| \gamma(x) dx \leq \frac{C}{\gamma_1} \int_0^\pi |g(x)| \gamma(x) dx < C.$$

В дальнейшем будем использовать условие $g(x) \in L(0, \pi)$. Интегрируя $g(x)$, получим

$$F(x) := \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{n} (1 - \cos nx) = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{n} \sin^2 \frac{nx}{2}.$$

Используя тот факт, что последовательность $\{\lambda_n\}$ почти убывает, получим

$$F\left(\frac{\pi}{k}\right) \geq C \sum_{n=[k/2]}^k \frac{\lambda_n}{n} \left(\frac{n}{k}\right)^2 \geq C \frac{\lambda_k}{k^2} \sum_{n=[k/2]}^k n \geq C \lambda_k.$$

Обозначим $d_\nu := \int_{\pi/(\nu+1)}^{\pi/\nu} |g(x)| dx$, $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда $\lambda_k \leq CF(\pi/k) \leq C \sum_{\nu=k}^{\infty} d_\nu$. Далее запишем (см. [8]) неравенство ($\{a_n \geq 0\}$ и $\{\lambda_n > 0\}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \right)^p, \quad p \geq 1, \quad (6)$$

применяя которое, получим

$$J := \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \lambda_k^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} d_\nu \right)^p \leq C \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^p (\gamma_\nu \nu^{p-2})^{1-p} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k k^{p-2} \right\}^p.$$

По условию теоремы последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_2}\}$ почти возрастает. Тогда

$$J \leq C \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^p (\gamma_\nu \nu^{p-2})^{1-p} \left\{ \gamma_\nu \nu^{p-1-\varepsilon_2} \sum_{k=1}^{\nu} k^{\varepsilon_2-1} \right\}^p \leq C \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^p \gamma_\nu \nu^{2(p-1)}. \quad (7)$$

Если $p \in (1, \infty)$, то применяя неравенство Гёльдера, получим ($p' = p/(p-1)$)

$$\begin{aligned} d_\nu^p &= \left(\int_{\pi/(\nu+1)}^{\pi/\nu} |g(x)| dx \right)^p \leq C \int_{\pi/(\nu+1)}^{\pi/\nu} |g(x)|^p dx \left(\frac{1}{\nu^2} \right)^{p/p'} \\ &= C \nu^{2(1-p)} \int_{\pi/(\nu+1)}^{\pi/\nu} |g(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно,

$$J \leq C \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \int_{\pi/(\nu+1)}^{\pi/\nu} |g(x)|^p dx \leq C \int_0^\pi |g(x)|^p \gamma(x) dx. \quad (9)$$

Если $p = 1$, то

$$J \leq C \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \gamma_\nu \leq C \int_0^\pi |g(x)| \gamma(x) dx. \quad (10)$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пункт А) доказывается так же, как и в теореме 4. Действительно, используя неравенство $|f(x)| \leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k$ для $x \in (\pi/(n+1), \pi/n]$, неравенство (5) и условия на γ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \gamma(x) |f(x)|^p dx &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^p \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p \left(\frac{\gamma_k}{k^2} \right)^{1-p} \left[\sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\nu^2} \right]^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \lambda_k^p. \end{aligned}$$

Б) Из условия (4) следует (аналогично доказательству $g(x) \in L(0, \pi)$ в теореме 4), что $f(x) \in L(0, \pi)$. Интегрируя $f(x)$, запишем

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} \sin nx.$$

Так как $\{\lambda_n\} \in R_0^+ BVS$ влечет $\{\lambda_n/n\} \in R_0^+ BVS$, то, применяя пункт Б) теоремы 4 для функции $H(x)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^* k^{p-2} \left(\frac{\lambda_k}{k} \right)^p \leq C \int_0^\pi \gamma^*(t) |H(t)|^p dt,$$

где $\{\gamma_k^*\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n^* n^{p-1-\varepsilon}\}$ почти возрастает. Для $\{\gamma_n^* = \gamma_n n^p\}$ это условие, очевидно, выполнено. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \lambda_k^p \leq C \int_0^{\pi} \frac{\gamma(x)}{x^p} |H(x)|^p dx \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} \int_{\pi/(\nu+1)}^{\pi/\nu} |f(t)| dt \right)^p.$$

Обозначая $f_{\nu} = \int_{\pi/(\nu+1)}^{\pi/\nu} |f(x)| dx$, $\nu \in \mathbb{N}$ и используя (6), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \lambda_k^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} f_{\nu} \right)^p \leq C \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu}^p (\gamma_{\nu} \nu^{p-2})^{1-p} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k k^{p-2} \right\}^p.$$

Аналогично (7)–(10) для $p \geq 1$ можно записать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \lambda_k^p \leq C \int_0^{\pi} |f(x)|^p \gamma(x) dx.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Young W. H. // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 12. P. 41–70.
2. Boas Jr. R. P. // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1952. V. 3. P. 217–221.
3. Heywood P. // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1954. V. 5. P. 71–76.
4. Aljancic S., Bojanic R., Tomic M. // Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math. 1955. V. 8. P. 67–84.
5. Igari S. // Tôhoku Math. J. 1960. V. 12. P. 139–146.
6. Leindler L. // Anal. Math. 2002. V. 28. № 4. P. 279–286.
7. Németh J. // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2003. V. 4. № 1. Article 3, 6 pp.
8. Потапов М. К., Бериша М. // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.). 1979. T. 26 (40). С. 215–228.