Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Васильчик, В. М. Гольдштейн, О разрешимости третьей краевой задачи для области с пиком, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 3, 466–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:25:52

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЛАСТИ С ПИКОМ

М. Ю. Васильчик, В. М. Гольдштейн

В заметке мы рассматриваем разрешимость третьей краевой задачи в пространстве Соболева $H^1(D)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, имеющая на границе ∂D особенность типа пика.

Краевая задача сводится к операторному уравнению вида

$$u + Au = F. \quad (1)$$

Если операторы вложения $H^1(D) \rightarrow L_2(D)$ и $H^1(D) \rightarrow S$, где S – пространство следов функций из $H^1(D)$ на ∂D , компактны, то оператор $I + A$ фредгольмов. Такой подход к исследованию разрешимости краевых задач хорошо известен (см., например, [1]). В смысле этой методики данная заметка является продолжением исследований [2]–[4], где рассматривалась область D с липпичевой границей и где $S = L_2(\partial D)$.

Не претендуя на большую общность, мы рассматриваем третью краевую задачу в следующей постановке:

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), \quad x \in D, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u \right|_{\partial D} = 0. \quad (3)$$

В (2), (3) k, a, σ – ограниченные измеримые функции, причем $k(x) \geq k_0 > 0$ почти всюду в D , $f \in L_2(D)$, $\partial u / \partial N$ означает производную функции u в направлении внешней нормали по отношению к D . Функции k, a и σ предполагаются вещественными, функции u и f могут быть комплекснозначными.

Относительно области $D \subset \mathbb{R}^n$ предполагается следующее. Обозначим через O начало координат. Тогда $\partial D \setminus \{O\}$ есть поверхность класса C^1 , и существует такая окрестность V точки O , что

$$D \cap V = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < 1, |x'| < \varphi(x_n)\}, \quad (4)$$

где $|x'|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$, и функция φ из $C^1([0, 1])$ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ при $t \in (0, 1)$ и $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi'(t) = 0$.

Через $H^1(D)$ далее обозначается пространство Соболева $W_2^1(D)$.

Обобщенным решением в $H^1(D)$ задачи (2), (3) называется функция $u \in H^1(D)$, удовлетворяющая при всех $\eta \in H^1(D)$ интегральному тождеству

$$\int_D (k \nabla u \nabla \bar{\eta} + a u \bar{\eta}) dx + \int_{\partial D} k \sigma u \bar{\eta} dS_x = - \int_D f \bar{\eta} dx. \quad (5)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00899.

В (5) dS_x — элемент площади поверхности на ∂D .

Обозначим через $L_{2,\varphi}(\partial D)$ пространство измеримых функций, определенных на ∂D , для которых конечен интеграл

$$\|\psi\|_{L_{2,\varphi}(\partial D)}^2 = \int_{\partial D \cap V} |\psi(x)|^2 \varphi(x_n) dS_x + \int_{\partial D \setminus V} |\psi(x)|^2 dS_x.$$

В силу условий, наложенных на функцию k , в $H^1(D)$ можно ввести следующее скалярное произведение:

$$[u, v] = \int_D (k \nabla u \nabla \bar{v} + u \bar{v}) dx.$$

Перепишем (5) в следующем виде:

$$[u, \eta] + \int_D (a - 1) u \bar{\eta} dx + \int_{\partial D} k \sigma u \bar{\eta} dS_x = - \int_D f \bar{\eta} dx, \quad (6)$$

и рассмотрим на $H^1(D)$ функционалы

$$l_1(\eta) = \int_D (a - 1) u \bar{\eta} dx, \quad l_2(\eta) = \int_{\partial D} k \sigma u \bar{\eta} dS_x, \quad l_3(\eta) = - \int_D f \bar{\eta} dx, \quad \eta \in H^1(D).$$

На функцию σ из (3) наложим условие

$$M_\sigma = \text{ess sup} \left\{ \frac{|\sigma(x)|}{\varphi(x_n)} : x \in \partial D \right\} < \infty. \quad (7)$$

Учитывая ограниченность функции a , с помощью неравенства Коши–Буняковского легко получается ограниченность функционалов l_1 и l_3 . Для функционала l_2 ограниченность следует из условия (7), неравенства Коши–Буняковского и вложения $H^1(D)$ в $L_{2,\varphi}(\partial D)$ [5].

Из теоремы Рисса следует, что существуют такие ограниченные операторы $B_i: H^1(D) \rightarrow H^1(D)$, что для всех $\eta \in H^1(D)$ выполняется

$$l_i(\eta) = [B_i u, \eta], \quad i = 1, 2, 3.$$

Учитывая это, перепишем (6) в следующем виде

$$[u + B_1 u + B_2 u, \eta] = [B_3 f, \eta],$$

откуда следует

$$u + (B_1 + B_2)u = B_3 f. \quad (8)$$

Положим $A = B_1 + B_2$, $B_3 f = F$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если операторы вложения $I_1: H^1(D) \rightarrow L_2(D)$, $I_2: H^1(D) \rightarrow L_{2,\varphi}(\partial D)$ компактны, то задача (2), (3) сводится к операторному уравнению (1) с фредгольмовым оператором $I + A$.

Компактность оператора I_1 для области с внешним пиком установлена В. Г. Мазьей (см. [6, § 4]).

ТЕОРЕМА 2. Оператор вложения $I_2: H^1(D) \rightarrow L_{2,\varphi}(\partial D)$, где D — ограниченная область с границей класса C^1 всюду, за исключением одной точки, в окрестности которой D имеет вид (4), компактен.

Доказательство компактности I_2 следует из компактности оператора I_1 и интегрального представления функций из $H^1(D)$. Представление получается по той же схеме, что интегральное представление для плоского случая в [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. Ramm A. G. Inverse Problems. New York: Springer, 2004.
3. Gol'dshtein V., Ramm A. G. // Math. Inequal. Appl. 2001. V. 4. № 1. P. 127–141.
4. Gol'dshtein V., Ramm A. G. Embedding operators and boundary value problems for rough domains (submitted).
5. Васильчик М. Ю. // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 9–45.
6. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985.
7. Васильчик М. Ю. // Исследования по математическому анализу и римановой геометрии. Новосибирск: Наука, 1992. С. 5–29.

(М. Ю. Васильчик) Новосибирский государственный технический университет

(В. М. Гольдштейн) Ben Gurion University of the Negev (Beer Sheva, Israel)

E-mail: mikl47@mail.ru, vladimir@bgumail.bgu.ac.il

Поступило

18.03.2005