Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данченко, Один критерий существования оценки производной рациональной функции, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 493–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:31:35

УДК 517.53

ОДИН КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В. И. Данченко

Пусть K – произвольный компакт на открытой комплексной плоскости. В заметке получен критерий существования оценки производной типа Маркова–Бернштейна для рациональных функций $R(z)$ в фиксированной точке $z_0 \in K$. Доказано, что при фиксированном натуральном s оценка вида $|R^{(s)}(z_0)| \leq C(K, z_0, s)n\|R\|_{C(K)}$, где R – произвольная рациональная функция, не имеющая полюсов на K , n – ее степень, C – конечная величина, зависящая только от указанных аргументов, имеет место тогда и только тогда, когда конечна величина $\omega(K, z_0, s) = \sup\{\text{dist}(z, K)/|z - z_0|^{s+1}\}$, где $\sup$ берется по всем точкам z из дополнения к K . При этом величина C не превосходит $\text{const} \cdot s! \omega(K, z_0, s)$.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть K – компакт на открытой комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При натуральном n обозначим через $\mathcal{R}_n(K)$ класс всех рациональных функций $R(z)$, $z \in \mathbb{C}$, степени $\leq n$, полюсы которых не лежат на K . При $z \in K$ и $s = 1, 2, \dots$ положим

$$\lambda_n^{(s)}(K, z) = \sup \left\{ \frac{|R^{(s)}(z)|}{\|R\|_{C(K)}} : R \in \mathcal{R}_n(K) \right\}.$$

В отличие от многочленов, производные которых оцениваются на всем *связном* компакте K через их степень, максимум модуля на K , диаметр K и порядок производных (неравенства Бернштейна, Маркова, Поммеренке и различные их обобщения), на любом компакте K можно указать точку z такую, что $\lambda_n^{(s)}(K, z) = \infty$ при всех s , $n = 1, 2, \dots$ (см. [1], [2]). Оценки производных рациональных функций $R \in \mathcal{R}_n(K)$ на *подмножествах* компакта K получены в работах Гончара [1], [3] и Долженко [2], [4]; для этого были разработаны различные методы построения множеств $E(R, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$ со сколь угодно малой мерой $\varepsilon > 0$ (в том или ином понимании меры) таких, что

$$\sup\{|R^{(s)}(z)| : z \in (K \setminus E(R, \varepsilon))\} \leq A(n, s, \varepsilon)\|R\|_{C(K)}$$

с некоторой конечной величиной $A(n, s, \varepsilon) > 0$, зависящей только от указанных аргументов. Конструкции множеств $E(R, \varepsilon)$ зависят от выбора функции R и, подчеркнем,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 04-01-00717 и № 05-01-00962, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1892.2003.1.

не зависят от свойств компакта K и не указывают, в каких именно точках $z \in K$ конечны величины $\lambda_n^{(1)}(K, z), \lambda_n^{(2)}(K, z), \dots$. В данной работе получено условие на компакт K , необходимое и достаточное для того, чтобы существовала оценка типа Бернштейна–Маркова

$$\lambda_n^{(s)}(K, z) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

в фиксированной точке $z \in K$ при фиксированном натуральном s .

Пусть $z \in K$ и $s > 0$. Положим

$$\omega_s(K, z) = \sup\{\rho(\zeta, K)|\zeta - z|^{-s-1} : \zeta \in \mathbb{C} \setminus K\},$$

где $\rho(\zeta, K)$ – евклидово расстояние от ζ до K . Величину $\omega_s(K, z)$ будем называть *s-пористостью* компакта K в точке z . Непосредственно из определения следует, что если при некотором $s > 0$ имеем $\omega_s(K, z) = \infty$, то $\omega_p(K, z) = \infty$ при $p > s$. Легко также видеть (см. п. 3), что $s!\omega_s(K, z) \leq \lambda_1^{(s)}(K, z)$ при всех $s = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – произвольный компакт на $\mathbb{C}$. Тогда для того, чтобы в фиксированной точке $z \in K$ при фиксированном натуральном s существовала оценка типа Бернштейна–Маркова (1), необходима и достаточна конечность s -пористости $\omega_s(K, z)$ в точке z . Кроме того, при выполнении (1) имеет место неравенство

$$\lambda_n^{(s)}(K, z) \leq 50 s! \cdot \omega_s(K, z)(n+1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Оценка (2) точна по порядку входящих в нее величин.

При $s = 1$ аналогичная теорема (принадлежащая автору настоящей заметки) без доказательства сформулирована в [5].

Из неравенств $\omega_s(K, z) \leq \lambda_1^{(s)}(K, z)/s!$ и (2) получается

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\lambda_1^{(s)}(K, z) < \infty$ в некоторой точке $z \in K$, то и $\lambda_n^{(s)}(K, z) < \infty$ при всех n .

ПРИМЕР 1. Пусть $\alpha > 1$ и

$$K_1 = \{z = x + iy : 1 \geq |y| \geq |x|^\alpha, x \in [-1, 1]\}.$$

Тогда $\omega_s(K_1, z) = \infty$ при $z \in (\partial K_1 \setminus \{0\})$ и $\omega_s(K_1, z) < \infty$ во всех внутренних точках компакта K_1 . Конечность величины $\omega_s(K_1, 0)$ равносильна неравенству $s \leq \alpha - 1$ и, следовательно, только при таких натуральных s в точке $z = 0$ выполняются неравенства (1), (2); для производных порядка $> \alpha - 1$ в этой точке оценок нет.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$K_2 = \left\{z = \frac{e^{i\varphi}}{\varphi} : \varphi \geq 1\right\} \cup \{0\}.$$

Тогда $\omega_1(K_2, z) = \infty$ при всех $z \in (K_2 \setminus \{0\})$ и, как легко проверить, $\omega_1(K_2, 0) < \infty$, $\omega_2(K_2, 0) = \infty$. Следовательно, только при $s = 1$ и только в точке $z = 0$ компакта K_2 выполняются неравенства (1), (2).

Взяв на K_2 точки $z_0 = 0$ и $z_k = e^{i\sqrt{k}}/\sqrt{k}$, $k = 1, 2, \dots$, получим пример счетного компакта $K_3 = \{z_0, z_1, \dots\}$, в точке $z_0 = 0$ которого по-прежнему $\omega_1(K_3, 0) < \infty$ и выполнены неравенства (1), (2) при $s = 1$. Этот пример показывает, что в таких терминах, как α -мера или емкость критерий существования оценок получить нельзя.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим конструкцию типа “швейцарского сыра”. Удалим из замыкания единичного круга $\mathcal{D}$ попарно не пересекающиеся открытые круги $d_k \subset \mathcal{D}$ с радиусами r_k и оставшийся компакт обозначим через K_4 . Пусть $\varepsilon \in [1/2; 1]$ и $\sum_{k=1}^{\infty} r_k^\varepsilon < \infty$. Тогда $\omega_1(K_4, z) < \infty$ всюду на компакте K_4 за исключением множества $E \subset K_4$ хаусдорфовой размерности $\leq 2\varepsilon$. Кроме того, $\text{mes}_{2\varepsilon} E = 0$ при $\varepsilon \neq 1/2$.

Действительно, положим $L = \partial\mathcal{D} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial d_k$ и при каждом натуральном n через E_n обозначим объединение открытых кругов $D_k, k = n, n+1, \dots$, концентрических с d_k и имеющих радиусы $\rho_k = \sqrt{r_k}$. Тогда оба утверждения следуют из того, что $E \subset L \cup E_n$ при всех n (поскольку $\omega_1(K_4, z) < \infty$ всюду на множестве $K_4 \setminus (L \cup E_n)$), а E_n есть объединение кругов с суммой радиусов

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{2\varepsilon} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

В случае $\varepsilon = 1$ приведенный пример обобщается: если K – связный компакт (континуум), компоненты G_k дополнения которого имеют спрямляемые границы ∂G_k и

$$\sum_k \text{mes}_1 \partial G_k < \infty,$$

то для множества F точек $z \in K$, в которых $\omega_1(K, z) < \infty$, имеем $\text{mes}_2 F = \text{mes}_2 K$ (см. [6]).

2. Основная лемма.

ЛЕММА. Пусть K – произвольный компакт на $\mathbb{C}$, $R \in \mathcal{R}_n(K)$, $n \geq 1$, $M = \|R\|_{C(K)} > 0$. Тогда существует линия $\Gamma = \Gamma(K, R) \subset \mathbb{C} \setminus K$, состоящая из конечного числа замкнутых кусочно аналитических кривых и отделяющая компакт K от множества полюсов функции R , со свойствами

$$\|R\|_{C(\Gamma)} \leq \frac{8}{5}M, \quad J(\Gamma, K) := \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{\rho(\zeta, K)} \leq 59\pi(n+1). \quad (3)$$

ПРИМЕЧАНИЯ. Сходные задачи о построении разделяющих линий типа Γ рассматривались во многих работах.

Пусть K – компакт, содержащий неограниченный континуум E , $\zeta_0 \in E$, $R \in \mathcal{R}_n(K)$. В работе [7] с помощью аппарата экстремальных длин и гриновых емкостей, в частности, доказано существование линии $\gamma = \gamma(K, \zeta_0, R)$, разделяющей множество полюсов функции R и компакт K , со свойствами

$$\|R\|_{C(\gamma)} \leq eM, \quad \int_{\gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \zeta_0|} \leq 2\pi n.$$

В [8]–[12] применялись геометрические конструкции покрытий множеств уровня гармонических и аналитических функций в полуплоскостях и кругах диадическими квадратами, а также их конформными образами в произвольных односвязных областях. Разделяющие линии – границы покрытий – в определенном смысле значительно лучше границ самих множеств уровня, в частности, они допускают приемлемые оценки длин. Так, в [10, лемма 2] показано, что для произведения Бляшке

$$R_0(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - z\overline{z_k}}{z - z_k}, \quad z_k \in \mathcal{D} = \{z : |z| < 1\},$$

существует конечное покрытие $U = U(R_0)$ диадическими квадратами множества уровня $\{z : |R_0(z)| > 2\}$ такое, что разделяющая линия ∂U удовлетворяет свойствам, аналогичным (3) при $K = \partial \mathcal{D}$, т.е. $J(\partial U, \partial \mathcal{D}) \leq Cn$ с некоторой абсолютной постоянной C . В [11] этот результат был усилен и обобщен на случай односвязных областей.

Впервые конструкции покрытий такого вида появились в работах Карлесона в известных теоремах об интерполяции и короне (см. [8], [9, гл. 8, теоремы 4.1, 5.1]).

В [13, лемма 4] другими методами были построены разделяющие линии Γ с указанными в (3) свойствами (но с менее точными константами) в произвольных областях $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, $K = \partial G \subset \mathbb{C}$, для мероморфных функций R , имеющих конечное число полюсов в G . Сформулированную выше лемму можно получить из этого результата, но мы проведем ее доказательство непосредственно для рациональных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Для рациональной функции $R(z)$ можно подобрать сколь угодно малый параметр δ , при котором функция $\tilde{R}_\delta(z) = R(z) + \delta z$ удовлетворяет условиям

- (i) все нули $h_\delta = \{a_1, \dots, a_N\}$, $N \leq 2n$, производной $\tilde{R}'_\delta$ конечные и простые;
- (ii) $\tilde{R}_\delta(\infty) = \infty$, $\|\tilde{R}_\delta\|_{C(K)} > 0$.

Например, можно выбрать δ так, чтобы вместе с выполнением условий (ii) на линии уровня $|R'(z)| = |\delta|$ не было нулей второй производной R'' .

Фиксируем параметр δ с указанными свойствами и для новой рациональной функции $\tilde{R}(z) = \tilde{R}_\delta(z)$ положим $\mu = \mu_\delta = \|\tilde{R}\|_{C(K)}$, $h = h_\delta$. Фиксируем также точку $\zeta \notin h$ так, чтобы $r = |\tilde{R}(\zeta)| > \mu$. Пусть $F(z, \zeta) = \tilde{R}(z) - \tilde{R}(\zeta)$. При $a > 0$ через $D(a; \zeta)$ обозначим компоненту связности множества $\{z : |F(z, \zeta)| < a\}$, содержащую точку ζ . Пусть $m(\zeta) = \sup\{a\}$, где $\sup$ берется по всем числам a , $a \leq r - \mu$, при которых область $D(a; \zeta)$ не содержит точек множества h .

Легко видеть, что значению $m(\zeta)$ соответствует некоторая ограниченная односвязная область

$$D(\zeta) = D(m(\zeta); \zeta) = \{z : |F(z, \zeta)| < m(\zeta)\}$$

со следующими свойствами (подробные выкладки см. в [13]):

- а) $\tilde{R}(z)$ однолистка в $D(\zeta)$;
- б) либо $m(\zeta) = r - \mu$, либо, в противном случае, $m(\zeta) < r - \mu$ и граница $\partial D(\zeta)$ имеет общие точки с множеством h (в обоих случаях $D(\zeta) \cap (h \cup K) = \emptyset$).

Для каждой точки $a_s \in h$, $s = \overline{1, N}$, положим $b_s = b_s(\delta) := \tilde{R}(a_s)$ и

$$E_s = E_s(\delta) := \{\zeta : \zeta \notin h, |\tilde{R}(\zeta)| > \mu, a_s \in \partial D(\zeta)\}.$$

Таким образом, при $\zeta \in E_s$ образ $W(\zeta) = \tilde{R}(D(\zeta))$ области $D(\zeta)$ есть круг

$$W(\zeta) = \{w : |w - \tilde{R}(\zeta)| < m(\zeta)\},$$

на границе которого лежит точка b_s . Положим

$$E_0 = E_0(\delta) := \{\zeta : \zeta \notin h, |\tilde{R}(\zeta)| > \mu, m(\zeta) = |\tilde{R}(\zeta)| - \mu\}.$$

Множества E_s с различными номерами могут иметь общие точки, точки b_s могут совпадать, возможно также, что $E_s = \emptyset$ при некоторых s . Каждая точка ζ , в которой $|\tilde{R}(\zeta)| > \mu$, принадлежит по меньшей мере одному из множеств E_s , $s = \overline{0, N}$.

Из того, что нули производной $\tilde{R}'$ простые, следует, что при каждом фиксированном $s = \overline{1, N}$ на множестве E_s функция $\tilde{R}(\zeta)$ не более чем двулистка. Действительно, предположим, что $E_s \neq \emptyset$ и $\zeta \in E_s$. В пересечении $V = V(b_s, \zeta)$ круга $W(\zeta)$ и достаточно малой окрестности точки b_s выделяются две различные регулярные ветви $z = g_k(w)$, $k = 1, 2$, обратной функции $z = \tilde{R}^{-1}(w)$, для которых

$$\lim g_k(w) = a_s \quad \text{при } w \rightarrow b_s, \quad w \in V.$$

По определению множества E_s при $\zeta \in E_s$ в каждый круг $W(\zeta)$ однозначно продолжается хотя бы одна из ветвей g_k , $k = 1, 2$. При этом выполняется одно из двух равенств: $\zeta = g_1(\tilde{R}(\zeta))$ или $\zeta = g_2(\tilde{R}(\zeta))$ (ветвь g_k , для которой выполняется равенство, определяется соотношением $D(\zeta) = g_k(\tilde{R}(D(\zeta)))$). Следовательно, равенства $\tilde{R}(\zeta_1) = \tilde{R}(\zeta_2) = \tilde{R}(\zeta_3)$ в трех попарно различных точках $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ множества E_s невозможны.

Нам понадобится следующее неравенство (см., например, [13]). Пусть D и W – односвязные ограниченные области на $\mathbb{C}$ и $w = w(z)$ – конформное однолистное отображение D на W . Тогда

$$\rho^{-1}(z, \partial D) |dz| \leq 4\rho^{-1}(w(z), \partial W) |dw(z)|, \quad z \in D. \quad (4)$$

Пусть $\zeta \in E_s$, $s = \overline{0, N}$. Применив (4) к функции $w(z) = \tilde{R}(z)$ в (ограниченной) области $D(\zeta)$, получим

$$\rho^{-1}(\zeta, K) \leq \rho^{-1}(\zeta, \partial D(\zeta)) \leq 4m^{-1}(\zeta) |\tilde{R}'(\zeta)|, \quad \zeta \in E_s, \quad (5)$$

где $m(\zeta) = |\tilde{R}(\zeta) - b_s|$ при $s \geq 1$ и $m(\zeta) = |\tilde{R}(\zeta)| - \mu$ при $s = 0$.

Фиксируем $r > \mu$ так, чтобы линия уровня $\alpha_r = \{z : |\tilde{R}(z)| = r\}$ не имела общих точек с h . Тогда отображение $w = \tilde{R}(z)$ локально гомеоморфно на α_r , и α_r состоит из конечного числа жордановых аналитических замкнутых кривых. При $s = 0, \dots, N$ положим $\gamma_s = E_s \cap \alpha_r$. Тогда $\alpha_r = \bigcup_{s=0}^N \gamma_s$. С учетом (5) и того, что функция $\tilde{R}(\zeta)$ не более чем двулистка на γ_s при всех $s = 1, \dots, N$ находим

$$J(\gamma_s; K) \leq 4 \int_{\gamma_s} m^{-1}(\zeta) |\tilde{R}'(\zeta)| |d\zeta| \leq 2 \cdot 4 \int_{\beta_s(r)} |w - b_s|^{-1} |dw|, \quad (6)$$

где $\beta_s(r)$ – дуга окружности $|w| = r$, на которой $|w - b_s| \leq |r - \mu|$ при $2r \geq \mu + |b_s|$ и $\beta_s(r) = \emptyset$ при $2r < \mu + |b_s|$. Очевидно, что

$$\beta_s(r) \subset \lambda_s(r) := \left\{ w : |w| = r, \left| \arg \left(\frac{w}{b_s} \right) \right| \leq \arcsin \left(1 - \frac{\mu}{r} \right) \right\}. \quad (7)$$

При $\zeta \in \gamma_0$ неравенство (5) имеет вид $\rho^{-1}(\zeta, K) \leq 4(r - \mu)^{-1} |\tilde{R}'(\zeta)|$, откуда, принимая во внимание очевидные неравенства

$$\int_{\gamma_0} |\tilde{R}'(\zeta)| |d\zeta| \leq \int_{\alpha_r} |\tilde{R}'(\zeta)| |d\zeta| = ir \int_{\alpha_r} \frac{\tilde{R}'(\zeta)}{\tilde{R}(\zeta)} d\zeta \leq 2\pi(n+1)r,$$

находим

$$J(\gamma_0; K) \leq 4(r - \mu)^{-1} \int_{\gamma_0} |\tilde{R}'(\zeta)| |d\zeta| \leq 8\pi(n+1)r(r - \mu)^{-1}. \quad (8)$$

Просуммировав все неравенства из (6) и (8), будем иметь

$$J(\alpha_r; K) \leq J(\gamma_0; K) + \sum_{s=1}^N J(\gamma_s; K) \leq \frac{8\pi(n+1)r}{r - \mu} + 8 \sum_{s=1}^N \int_{\beta_s(r)} \frac{|dw|}{|w - b_s|}. \quad (9)$$

Пусть $1 < a < b < \infty$. Из (9) получаем

$$\begin{aligned} I(a, b) &:= \frac{1}{(b-a)\mu} \int_{a\mu}^{b\mu} J(\alpha_r; K) dr \\ &\leq 8\pi(n+1) \left(1 + \frac{1}{b-a} \ln \frac{b-1}{a-1} + \frac{2}{\pi\mu(b-a)} \max_s \int_{d(s)} \frac{d \operatorname{mes}_2(w)}{|w - w_s|} \right), \end{aligned}$$

где $d(s) = \{w : w \in \beta_s(r), a\mu \leq r \leq b\mu\}$. Площадь σ_s каждого четырехугольника $d(s)$ легко оценивается с учетом (7) интегрированием величины $r|\lambda_s(r)|$ по $r \in [a\mu, b\mu]$:

$$\sigma_s \leq (P(b) - P(a))\mu^2, \quad P(t) = t^2 \arcsin\left(1 - \frac{1}{t}\right) - \frac{(t+1)\sqrt{2t-1}}{3},$$

и получается оценка

$$\int_{d(s)} \frac{d \operatorname{mes}_2(w)}{|w - w_s|} \leq 2\pi \int_0^{\sqrt{\sigma_s/\pi}} dr \leq 2\sqrt{\pi} \mu \sqrt{P(b) - P(a)},$$

откуда находим

$$I(a, b) \leq 8\pi(n+1) \left(1 + \frac{1}{b-a} \ln \frac{b-1}{a-1} + \frac{4}{\sqrt{\pi}(b-a)} \sqrt{P(b) - P(a)} \right). \quad (10)$$

При $a = a_0 = 6/5 + 10^{-3}$ и $b = b_0 = 8/5 - 10^{-3}$ это дает $I(a_0, b_0) < 56\pi(n+1)$. Следовательно, существует $r_0 \in [a_0\mu, b_0\mu]$ такое, что линия уровня $\alpha_{r_0} = \{z : |\tilde{R}(z)| = r_0\}$ удовлетворяет свойству $J(\alpha_{r_0}, K) \leq 56\pi(n+1)$.

Мы не можем взять в качестве Γ линию α_{r_0} , поскольку на ней модуль функции $R(z) = \tilde{R}(z) - \delta z$ может быть большим. Обозначим через U содержащий K открытый круг достаточно большого радиуса ρ_0 с условием $J(\partial U, K) \leq 3\pi$. Обозначим через G открытое множество, состоящее из связных компонент пересечения $U \cap \{z : |\tilde{R}(z)| < r_0\}$, имеющих общие точки с K . Тогда $K \subset G$.

Пусть параметр δ , фиксированный в начале доказательства, кроме условий (i) и (ii) удовлетворяет условию $r_0 + \delta\rho_0 \leq 8M/5$ (такой выбор δ зависит только от M и ρ_0). Тогда на $\Gamma = \partial G$ имеем $|R(z)| \leq 8M/5$, и Γ удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $R \in \mathcal{R}_n(K)$, $M = \|R\|_{C(K)} > 0$, Γ — указанная в лемме линия. По интегральной формуле Коши при $z \in K$ находим

$$|R^{(s)}(z)| \leq \frac{s!}{2\pi} \frac{8M}{5} \int_{\Gamma} \frac{\rho(\zeta, K)}{|\zeta - z|^{s+1}} \frac{|d\zeta|}{\rho(\zeta, K)} \leq \frac{s!}{2\pi} \frac{8M}{5} \omega_s(K, z) J(\Gamma, K). \quad (11)$$

Отсюда и из (3) следует достаточность конечности s -пористости $\omega_s(K, z)$ для выполнения (1), а также неравенство (2). Для доказательства необходимости рассмотрим простейшие рациональные дроби вида

$$R(z_0; z) = \frac{\rho(z_0, K)}{z - z_0}, \quad z_0 \notin K,$$

с очевидной нормировкой $\|R(z_0; \cdot)\|_{C(K)} = 1$. Из условия (1) в фиксированной точке $z \in K$ находим

$$|R^{(s)}(z_0; z)| = s! \rho(z_0, K) |z - z_0|^{-s-1} \leq C, \quad C = \lambda_1^{(s)}(K, z) < \infty,$$

при всех $z_0 \notin K$. Отсюда следует, что $\omega_s(K, z) \leq C/s! < \infty$.

Приведем пример, подтверждающий точность (2). Покажем, что для любых фиксированных $s = 1, 2, \dots$ и $\Omega \geq 1$ существует компакт K_0 со свойствами: $\Omega \leq \omega_s(K_0, 0) \leq 2\Omega$; для любого натурального n найдется функция $R \in \mathcal{R}_n(K_0)$, для которой

$$|R^{(s)}(0)| \geq A s! \omega_s(K_0, 0) n \|R\|_{C(K_0)}$$

с некоторой абсолютной постоянной $A > 0$.

Пусть $\Omega \geq 1$, $s \geq 1$. При натуральных $m \geq m_0$, удовлетворяющих неравенствам $2^{-ms}\Omega < 1/4$ и $(1 - 2^{-ms}\Omega)^{s+1} > 1/2$, положим $r_m = 2^{-m}$, $\rho_m = \Omega r_m^{s+1}$, $N_m = [2^{sm}\Omega^{-1}]$. При всех указанных m исключим из круга $\{z : |z| \leq 1\}$ открытые круги $d_k^{(m)}$ радиуса ρ_m с центрами в точках $z_k^{(m)} = r_m e^{2\pi k i / N_m}$, $k = 1, \dots, N_m$, и оставшийся компакт обозначим через K_0 . Легко проверить, что круги $d_k^{(m)}$ не имеют общих точек, $0 \in K_0$ и $\Omega \leq \omega_s(K_0, 0) \leq 2\Omega$.

При фиксированных $n > 2$ и m положим

$$R(z) = \rho_m \sum_l (z - t_l)^{-1},$$

где $l = 1, \dots, n$, а точки t_l выбраны на множестве $\{z_k^{(m)}\}$, $k = 1, \dots, N_m$, так, что $0 < \arg t_k < 1/s$ и $|t_k - t_l| \geq r_m / (4sn)$ при $l \neq k$. Это возможно при достаточно больших $m \geq m_1(n) \geq m_0$. Поскольку аргументы чисел t_l^{s+1} лежат в промежутке $(0, 1 + 1/s)$, то $|R^{(s)}(0)| \geq s! \Omega n \cos 1$. Кроме того,

$$\|R\|_{C(K_0)} = \max_k \|R\|_{C(\partial d_k^{(m)})} \leq \max_k \left(1 + 2\rho_m \sum_{l \neq k} |t_k - t_l|^{-1} \right) \leq 1 + Csn\rho_m r_m^{-1} \ln n \leq 2$$

при достаточно больших $m \geq m_2(n) \geq m_1(n)$.

Теорема 1 доказана.

4. Одно обобщение неравенства (2). При $z \in K$, $s = 1, 2, \dots$, $r \in (0, \infty]$ положим

$$\omega_s(K, z, r) = \sup \{ \rho(\zeta, K) |\zeta - z|^{-s-1} : \zeta \in \mathbb{C} \setminus K, |\zeta - z| < r \}.$$

Пусть $\omega_s(K, z, r) < \infty$ при фиксированных z, s, r . Заменим в (11) Γ на границу Γ_r максимальной области $G_r \subset \mathcal{D}_r := \{ \zeta : |\zeta - z| < r \}$, содержащей точку z и не имеющей общих точек с Γ . Тогда $\|R\|_{C(\Gamma_r)} \leq 8M/5$. Интегрируя ядро $|\zeta - z|^{-s-1}$ отдельно по множествам $\Gamma_r \cap \mathcal{D}_r$ и $\Gamma_r \cap \partial \mathcal{D}_r$, мы вместо (2) получим оценку

$$\lambda_n^{(s)}(K, z) \leq 50 s! ((n+1)\omega_s(K, z, r) + r^{-s}), \quad r \in (0, \infty], \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в некоторой точке $z \in K$ при некотором $\alpha > 0$ имеем $\omega_s(K, z, r) = O(r^\alpha)$ при $r \rightarrow 0$, то

$$\lambda_n^{(s)}(K, z) \leq A(z) s! n^{s/(s+\alpha)}.$$

Для доказательства достаточно в (12) положить $r = n^{-1/(s+\alpha)}$.

5. Интегральная оценка производной. Аналогично лемме доказывается следующая теорема. Пусть K – произвольный компакт на $\mathbb{C}$, $R \in \mathcal{R}_n(K)$, $n \geq 1$, $M = \|R\|_{C(K)} > 0$. Положим

$$G(a, b) = \{ z : aM \leq |R(z)| \leq bM \}, \quad 1 < a < b < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Имеет место оценка

$$\int_{G(a,b)} |R'(\zeta)| \frac{d \operatorname{mes}_2(\zeta)}{\rho(\zeta, K)} \leq 8\pi M(n+1) \left(\ln \frac{b-1}{a-1} + 5\sqrt{b(b-a)} \right). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы, рассматривая функцию $\tilde{R}_\delta(z) = R(z) + \delta z$ с выбранной там сколь угодно малой величиной δ (удовлетворяющей условиям (i), (ii)), из (5) получаем

$$\rho^{-1}(\zeta, K) |\tilde{R}'_\delta(\zeta)| d \operatorname{mes}_2(\zeta) \leq 4m^{-1}(\zeta) d \operatorname{mes}_2(w), \quad w = \tilde{R}_\delta(\zeta), \quad (14)$$

при всех $\zeta \notin h_\delta$ с $|\tilde{R}_\delta(\zeta)| > \mu_\delta = \|\tilde{R}_\delta\|_{C(K)} > 0$. Пусть $r > 0$, $\delta < M/r$,

$$A = \frac{Ma - r\delta}{M + r\delta}, \quad B = \frac{Mb + r\delta}{M - r\delta}, \quad \mathcal{G}(A, B) = \left\{ z : |z| < r, A \leq \frac{|\tilde{R}_\delta(z)|}{\mu_\delta} \leq B \right\}.$$

Тогда $G(a, b) \cap \{z : |z| < r\} \subset \mathcal{G}(A, B)$ и при достаточно малых $\delta \leq \delta_0(a, M)$ имеем $\mathcal{G}(A, B) \subset C \setminus K$. Проинтегрируем при таких δ неравенство (14) по $\mathcal{G}(A, B)$. С учетом того, что функция $\tilde{R}_\delta$ не более чем двулистка на E_s , $s = 1, \dots, N$, и не более чем $(n+1)$ -листка на E_0 , получим оценку интеграла

$$((B-A)\mu_\delta)^{-1} \int_{\mathcal{G}(A,B)} \rho^{-1}(\zeta, K) |\tilde{R}'_\delta(\zeta)| d \operatorname{mes}_2(\zeta),$$

аналогичную (10) (с заменой a на A и b на B). Отсюда, переходя к пределу при удовлетворяющих условиям (i), (ii) значениях $\delta \rightarrow 0$, а затем при $r \rightarrow \infty$ и учитывая легко проверяемое неравенство

$$(b-a) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{P(b) - P(a)} \leq 5\sqrt{b(b-a)},$$

получаем (13).

6. Еще одно следствие основной леммы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть R – рациональная функция степени $\leq n$, аналитическая в единичном круге $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$, $a > 0$. Если $|R(z)|(1 - |z|) \ln(1 - |z|)^{-1} \leq a$ при всех $z \in \mathcal{D}$, то

$$\|R\|_{L^1(\partial\mathcal{D})} \leq C a \cdot n, \quad C = \text{const}. \quad (15)$$

Если $\varepsilon \in (0, 1)$ и $|R(z)|(1 - |z|)^\varepsilon \leq a_\varepsilon$ при всех $z \in \mathcal{D}$, то

$$\|R\|_{L^{1/\varepsilon}(\partial\mathcal{D})} \leq C(\varepsilon) a_\varepsilon \cdot n. \quad (16)$$

Отметим, что указанные условия на порядок роста функций R , достаточные для ограниченности интегралов в (15) и (16) в классе $\mathcal{R}_n(\overline{\mathcal{D}})$ (при любом фиксированном n), ослабить нельзя (т.е. в этих условиях нельзя увеличить степени множителей $1 - |z|$ или уменьшить степень $\ln(1 - |z|)^{-1}$). Это легко проверяется на однополосных рациональных дробях. Например, при $\alpha \in (0, 1)$ и $0 < \delta < e^{-\alpha}$, как легко проверить, для дроби $R(z) = (\ln^\alpha(1/\delta)(z - 1 - \delta))^{-1}$ имеем

$$\|R\|_{L^1(\partial\mathcal{D})} > \ln^{1-\alpha} \frac{1}{\delta}$$

и $|R(z)|(1 - |z|) \ln^\alpha(1 - |z|)^{-1} < 1$ при всех $z \in \mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{z_1, \dots, z_m\}$ – множество всех полюсов R и $k_1, \dots, k_m$ – кратности этих полюсов, $k_1 + \dots + k_m \leq n$. Положим

$$B(z) = \frac{1}{z} \prod_{s=1}^m \left(\frac{z - z_s}{1 - \overline{z_s}z} \right)^{k_s}, \quad f(z) = R(z)B(z).$$

Рациональная функция f аналитична вне $\mathcal{D}$ и $f(\infty) = 0$. Пусть Γ – линия из леммы, построенная для функции B и компакта $K = \partial\mathcal{D}$. Тогда

$$|f(\zeta)| \ln(1 - |\zeta|)^{-1} \leq \frac{8}{5} a (1 - |\zeta|)^{-1}$$

при $\zeta \in \Gamma$. Отсюда, воспользовавшись интегральной формулой Коши, получаем (15):

$$\begin{aligned} \|R\|_{L^1(\partial\mathcal{D})} &= \|f\|_{L^1(\partial\mathcal{D})} \leq \int_{\Gamma} |f(\zeta)| |d\zeta| \int_{\partial\mathcal{D}} |\zeta - z|^{-1} |dz| \\ &\leq C_1 a \int_{\Gamma} (1 - |\zeta|)^{-1} |d\zeta| \leq C_1 a \cdot 59 \pi (n + 2) \leq C a n. \end{aligned}$$

Неравенство (16) получается аналогично с помощью обобщенного неравенства Минковского:

$$\begin{aligned} \|R\|_{L^{1/\varepsilon}(\partial\mathcal{D})} &\leq \int_{\Gamma} |f(\zeta)| |d\zeta| \left(\int_{\partial\mathcal{D}} |\zeta - z|^{-1/\varepsilon} |dz| \right)^\varepsilon \\ &\leq C_2(\varepsilon) a \int_{\Gamma} (1 - |\zeta|)^{-1} |d\zeta| \leq C(\varepsilon) a n. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гончар А. А. О наилучших приближениях рациональными функциями // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100. С. 205–208.
- [2] Долженко Е. П. Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения // Anal. Math. 1978. Т. 4. № 4. С. 247–268.
- [3] Гончар А. А. Обратные теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. С. 347–356.
- [4] Долженко Е. П. Оценки производных рациональных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. № 1. С. 9–28.
- [5] Данченко В. И., Данченко Д. Я. Один критерий существования оценки бернштейновского типа для производной рациональной функции // Труды 10-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 39–40.
- [6] Данченко Д. Я. Некоторые вопросы аппроксимации и интерполяции рациональными функциями. Приложение к уравнениям эллиптического типа. Дисс. . . . к.ф.-м.н. Владимир: Владимирский гос. пед. ун-т, 2001.
- [7] Гончар А. А., Григорян Л. Д. Об оценке компонент ограниченных аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 132. С. 299–303.
- [8] Carleson L. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem // Ann. of Math. (2). 1962. V. 76. P. 547–559.
- [9] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
- [10] Пекарский А. А. Обобщенная рациональная аппроксимация в круге // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. 1990. № 6. С. 9–14.
- [11] Пекарский А. А. Наилучшие рациональные аппроксимации в комплексной области // Тр. МИАН. 1989. Т. 190. С. 222–233.
- [12] Dynkin E. M. Inequalities for rational functions // J. Approx. Theory. 1997. V. 91. № 3. P. 349–367.
- [13] Данченко В. И. О рациональных составляющих мероморфных функций и их производных // Anal. Math. 1990. Т. 16. № 4. С. 241–255.

Владимирский государственный университет
E-mail: danch@vpti.vladimir.ru

Поступило
06.02.2004
Исправленный вариант
12.10.2004