Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Дмитрук, Н. В. Кузькина, Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 503–518

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:43:49

УДК 517.97

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

А. В. Дмитрук, Н. В. Кузькина

Рассматривается задача оптимального управления на бесконечном интервале времени. Система линейна по управлению, функционал выпуклый по управлению, а множество управлений есть выпуклый компакт. Относительно поведения функционала на бесконечности предлагается новое условие, которое слабее уже известных. При его выполнении доказана теорема существования решения. Рассмотрены некоторые частные случаи и предложена общая абстрактная схема.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени возникают как в теоретических, так и в прикладных разделах математики, например, в динамических моделях математической экономики [1]–[7]. Вопрос о существовании решения в таких задачах решается не столь просто, как в задачах на конечном отрезке времени [8]–[10]. В имеющихся на эту тему работах условия существования либо чересчур ограничительны, либо сложно формулируются и поэтому не очень просто проверяются. В данной работе мы рассматриваем широкий класс задач, включающий, в частности, многие задачи экономической динамики, и предлагаем довольно естественные условия, обеспечивающие существование решения в этих задачах, которые слабее всех известных условий.

2. Постановка задачи, предположения. На полуинтервале $[0, \infty)$ будем рассматривать n -мерные функции $x(t)$, абсолютно непрерывные на любом отрезке $[0, T]$ (будем писать, что $x(\cdot) \in AC[0, \infty)$), и измеримые r -мерные функции $u(t)$, которые на любом отрезке $[0, T]$ существенно ограничены; пространство таких функций обозначим $L_\infty[0, \infty)$.

Обратим внимание, что функции из $AC[0, \infty)$ могут не быть абсолютно непрерывными на всей полупрямой $[0, \infty)$. Аналогичное замечание относится и к функциям из $L_\infty[0, \infty)$. (Более специальных обозначений для пространств AC и L_∞ на $[0, \infty)$ мы не вводим, так как эти пространства будут у нас пониматься только в указанном смысле.)

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00482, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-304.2003.1.

На пространстве пар функций (x, u) будем рассматривать следующую задачу оптимального управления:

$$J(x, u) = \beta(x(0)) + \int_0^\infty \varphi(t, x, u) dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (2)$$

$$x(0) \in M_0, \quad (3)$$

$$u(t) \in U(t, x(t)), \quad (4)$$

$$x(t) \in S(t). \quad (5)$$

Пары функций $(x, u) \in AC \times L_\infty[0, \infty)$, удовлетворяющие на $[0, \infty)$ ограничениям (2)–(5), будем называть *допустимыми* (как обычно, для измеримых функций все соотношения понимаются выполненными почти всюду), а множество всех допустимых пар обозначим через Ω . Функционал (1) рассматривается на всех парах $(x, u) \in \Omega$, для которых соответствующий интеграл Лебега по любому отрезку $[0, T]$ существует и при $T \rightarrow \infty$ сходится к конечному или бесконечному пределу. Таким образом,

$$J(x, u) = \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x, u), \quad \text{где } J_T(x, u) = \beta(x(0)) + \int_0^T \varphi(t, x, u) dt,$$

а предел мы понимаем в указанном расширенном смысле. (Ниже мы приведем условие, гарантирующее сходимость интеграла на любой паре $(x, u) \in \Omega$.)

ЗАМЕЧАНИЕ. Чтобы избавиться от “неудобного” вопроса о сходимости интеграла в (1), в некоторых работах предлагается изменить само понятие оптимальности, а точнее, сам принцип сравнения двух допустимых пар: предлагается сравнивать не предельные значения функционала (1) (которых может не существовать), а рассматривать поведение разности функционалов $J_T(x'', u'') - J_T(x', u')$ на отрезках $[0, T]$ при $T \rightarrow \infty$. При этом естественного однозначного толкования, для какой пары семейство значений J_T “лучше”, не получается, приходится рассматривать несколько различных толкований, и соответственно, несколько разных понятий оптимальности (см. работы [4]–[7] и литературу в них). В данной статье мы не касаемся этих обобщений. Допустимые пары сравниваются здесь обычным образом – по значению функционала на них, и соответственно, оптимальность понимается как достижение минимально возможного значения функционала.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. Будем считать, что выполнены следующие условия.

П1. Функция $f(t, x, u)$ непрерывна по паре (t, x) и линейна по u , т.е.

$$f(t, x, u) = a(t, x) + B(t, x)u,$$

где n -мерный вектор a и $(n \times r)$ -матрица B непрерывно зависят от (t, x) .

П2. Множество $S(t)$ замкнуто для всех $t \geq 0$, а зависимость его от t произвольна.

П3. Множество M_0 есть компакт в $\mathbb{R}^n$.

П4. Многозначное отображение $U: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^r$ имеет замкнутый график, и для любых (t, x) множество $U(t, x)$ есть выпуклый компакт.

П5. Функция f вместе с отображениями S и U удовлетворяет *условию Филиппова* [8], т.е. существует такое c , что для всех $t \geq 0$, $x \in S(t)$, $u \in U(t, x)$

$$(x, f(t, x, u)) \leq c(|x|^2 + 1).$$

П6. Функция $\beta(\cdot)$ непрерывна на M_0 .

П7. Функция $\varphi(t, x, u)$ непрерывна по (t, x, u) и выпукла по u .

Обратим внимание, что если $S(t)$ и $U(t, x)$ равномерно ограничены, то предположение П5 заведомо выполнено. Однако выполнение П5 и в этом, и в общем случае еще не гарантирует существования допустимой траектории системы (2)–(5) на заданном отрезке $[0, T]$, и тем более на $[0, \infty)$. Наличие допустимой траектории, как и всегда в теоремах существования в задачах на экстремум, будет не доказываться, а просто постулироваться.

Все эти предположения вполне стандартны для теорем существования в задаче на фиксированном конечном отрезке. Кроме них, мы примем еще одно предположение относительно поведения семейства функций $\varphi(t, x(t), u(t))$ на бесконечности.

Для любого числа a обозначим $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \max(-a, 0)$ (обе эти величины неотрицательные), так что $a = a^+ - a^-$.

Назовем *куском* функционала J на отрезке $[T', T'']$ величину

$$\int_{T'}^{T''} \varphi(t, x(t), u(t)) dt.$$

Следующее предположение является ключевым для наших целей.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ П8. Отрицательные части кусков функционала сходятся к 0 при $T', T'' \rightarrow \infty$, $T' < T''$, равномерно по всем допустимым траекториям.

Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ существует T_ε такое, что для всех $T'' > T' > T_\varepsilon$, для всех $(x, u) \in \Omega$

$$\int_{T'}^{T''} \varphi(t, x(t), u(t)) dt > -\varepsilon.$$

Это условие очевидно эквивалентно следующему: существует функция $\alpha(T) \rightarrow 0+$ при $T \rightarrow \infty$ и число T_0 такие, что для любого $T > T_0$ и для любых $T'' > T' \geq T$, $(x, u) \in \Omega$

$$\int_{T'}^{T''} \varphi(t, x(t), u(t)) dt \geq -\alpha(T). \quad (6)$$

Ниже мы укажем некоторые случаи, когда это предположение заведомо выполнено.

Установим, что выполнение предположения П8 на Ω гарантирует сходимость интеграла (в указанном выше расширенном смысле) для любой пары $(x, u) \in \Omega$. Нам потребуется следующий простой факт.

ЛЕММА 1. Пусть числовая последовательность γ_k не имеет предела (конечного или бесконечного). Тогда существуют числа $z_1 < z_2$ такие, что для любого номера K найдутся $k_1, k_2 > K$, для которых $\gamma_{k_1} < z_1$ и $\gamma_{k_2} > z_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательность γ_k не имеет предела, из нее можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам: $\gamma_{k_s^1} \rightarrow c_1$ и $\gamma_{k_s^2} \rightarrow c_2$, где $c_1 < c_2$ (при этом возможны случаи $c_1 = -\infty, c_2 = +\infty$). Возьмем любые $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $c_1 < z_1 < z_2 < c_2$. Тогда для любого номера K найдутся номер $k_1 > K$ из последовательности k_s^1 и номер $k_2 > K$ из последовательности k_s^2 такие, что $\gamma_{k_1} < z_1, \gamma_{k_2} > z_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть функционал J удовлетворяет предположению П8. Тогда для всех $(x, u) \in \Omega$ соответствующий интеграл сходится либо к конечному пределу, либо к $+\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что для некоторой пары $(x, u) \in \Omega$ интеграл не сходится (в нашем расширенном смысле), т.е. не существует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi(t, x(t), u(t)) dt. \quad (7)$$

Значит, этот предел не существует и для некоторой счетной последовательности $T \rightarrow \infty$. Тогда по лемме 1 найдутся числа $z_1 > z_2$ такие, что для любого T существуют $T_1 > T$ и $T_2 > T_1$ из этой счетной последовательности, для которых $J_{T_1}(x, u) > z_1, J_{T_2}(x, u) < z_2$, и поэтому

$$\int_{T_1}^{T_2} \varphi(t, x(t), u(t)) dt = J_{T_2}(x, u) - J_{T_1}(x, u) < z_2 - z_1 = \text{const} < 0.$$

Но это противоречит предположению П8. Значит, наше допущение неверно.

Рассмотрим теперь случай, когда предел (7) равен $-\infty$. Тогда для любого T' найдется такое $T'' > T'$, что

$$\int_0^{T''} \varphi(t, x(t), u(t)) dt < \int_0^{T'} \varphi(t, x(t), u(t)) dt - 1,$$

и, следовательно,

$$\int_{T'}^{T''} \varphi(t, x(t), u(t)) dt < -1,$$

т.е. при $\varepsilon = 1$ опять приходим к противоречию с П8. Лемма доказана.

Таким образом, для любой допустимой пары (x, u) величина

$$J(x, u) = \lim_T J_T(x, u)$$

определена корректно, причем J всегда принимает либо конечные значения, либо $+\infty$. Кроме того, из доказательства леммы 2 видно, что П8 является наиболее естественным предположением, обеспечивающим эти свойства функционала J .

ТЕОРЕМА 1 (основная). Пусть при сделанных предположениях П1–П8 существует хотя бы одна пара $(x, u) \in \Omega$, на которой $J(x, u) < +\infty$. Тогда найдется пара $(x_0, u_0) \in \Omega$, на которой функционал достигает своего минимального значения (т.е. в поставленной задаче существует решение).

Для доказательства нам потребуется ряд свойств функционала J и множества допустимых траекторий на фиксированном отрезке $[0, T]$.

3. Некоторые свойства для фиксированного отрезка.

ЛЕММА 3. Пусть $U(y)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ с компактными значениями. Тогда на любом компактном (а значит, и на любом ограниченном) множестве y значения $U(y)$ равномерно ограничены, т.е. для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ существует такая константа R , что для любого $y \in K$ множество $U(y)$ содержится в шаре $B_R(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу полунепрерывности сверху отображения $U(y)$ для любого y существует некоторая его окрестность $\theta(y)$ такая, что для любого $y' \in \theta(y)$ выполнено включение $U(y') \subset U(y) + B_1(0)$. Объединение окрестностей $\theta(y)$ по всем $y \in K$ покрывает весь компакт K , и по определению компакта из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. То есть существует конечное число точек $y_1, \dots, y_m \in K$ и их окрестностей $\theta(y_i)$ таких, что для любого $y' \in \theta(y_i)$ множество $U(y')$ содержится в $U(y_i) + B_1(0)$ и эти окрестности покрывают весь компакт K .

Объединение V ограниченных множеств $U(y_i) + B_1(0)$ по всем $i = 1, \dots, m$ также будет ограниченным, т.е. будет целиком содержаться в шаре $B_R(0)$ при некотором R . А так как для любого $y \in K$ найдется номер i , для которого $y \in \theta(y_i)$, то $U(y) \subset U(y_i) + B_1(0) \subset V$, и поэтому $U(y) \subset B_R(0)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть отображение $U(t, x): \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^r$ имеет замкнутый график и компактные значения. Тогда для любого $T > 0$ и любого ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое $R = R(T, Q)$, что для любого $t \in [0, T]$, для любого $x \in Q$ выполнено включение $U(t, x) \subset B_R(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается применением леммы 3 к отображению $U(y)$, где $y = (t, x)$, и компакт $K = [0, T] \times \overline{Q}$. При этом надо учесть, что замкнутость графика этого отображения эквивалентна его полунепрерывности сверху.

ЛЕММА 4. Пусть $U(t, x)$ имеет замкнутый график и компактные значения, и пусть функция $f(t, x, u)$ вместе с отображениями S и U удовлетворяет предположению П5 (т.е. условию Филиппова). Пусть также дано ограниченное множество $M_0 \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого T существуют такие константы D_T, D'_T, R_T , что для любого решения системы (2)–(5) почти всюду на $[0, T]$ выполняются оценки

$$|x(t)| \leq D_T, \quad |\dot{x}(t)| \leq D'_T, \quad |u(t)| \leq R_T. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $z(t) = |x(t)|^2 + 1$. Для нее на траекториях системы (2) имеем $\dot{z} = 2(x, f)$, поэтому в силу П5 имеем $\dot{z} \leq 2c(|x|^2 + 1)$, т.е. $\dot{z} \leq 2cz$. Учитывая, что $z(t) \geq 0$, отсюда получаем, что для любого $t \geq 0$ выполнено неравенство $z(t) \leq z(0)e^{2ct}$. Если $|M_0| \leq r$, то на отрезке $[0, T]$ будет выполнено неравенство $z(t) \leq (r^2 + 1)e^{2cT}$, из которого и вытекает первая требуемая оценка в (8).

Так как $|x(t)| \leq D_T$, то по следствию из леммы 3 $|u(t)| \leq R_T$ с некоторой R_T , поэтому тройка $(t, x(t), u(t))$ всегда принадлежит компакт $[0, T] \times B_{D_T}(0) \times B_{R_T}(0)$. В силу непрерывности функции f она ограничена на этом компакте некоторой константой D'_T . Отсюда $|\dot{x}(t)| \leq D'_T$. Лемма доказана.

Таким образом, множество решений $x(t)$ системы (2)–(5) равномерно ограничено и равномерно липшицево, а множество управлений $u(t)$ равномерно ограничено. Отсюда в силу теорем Асколи–Арцела и Алаоглу [11], получаем

СЛЕДСТВИЕ. Множество решений $x(t)$ системы (2)–(5) предкомпактно в пространстве $C[0, T]$, а соответствующее множество управлений $u(t)$ предкомпактно в пространстве $L_\infty[0, T]$ относительно $*$ -слабой топологии (т.е. относительно топологии, определяемой функционалами из $L_1[0, T]$).

Пусть Ω_T есть множество всех $(x, u) \in AC[0, T] \times L_\infty[0, T]$, удовлетворяющих на $[0, T]$ ограничениям (2)–(5). Из только что полученного следствия вытекает, что Ω_T предкомпактно относительно произведения равномерной и $*$ -слабой топологий. Как известно, на ограниченных множествах в пространстве $L_\infty[0, T]$ $*$ -слабая топология метризуема (так как L_1 сепарабельно), поэтому при ее изучении достаточно рассматривать сходящиеся последовательности.

ЛЕММА 5. Множество Ω_T замкнуто относительно равномерной сходимости $x(t)$ и $*$ -слабой сходимости $u(t)$: если $(x_k, u_k) \in \Omega_T$, $x_k \rightrightarrows x_0$, $u_k \xrightarrow{*-\text{сл.}} u_0$, то $(x_0, u_0) \in \Omega_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость ограничений $x(0) \in M_0$ и $x(t) \in S(t)$ очевидно вытекает из замкнутости множества M_0 и множества $S(t)$ при всех $t \geq 0$. Замкнутость ограничения $\dot{x} = f(t, x, u)$ также очевидно вытекает из линейности f по u , если перейти к интегральной форме этого уравнения.

Основная трудность – установить замкнутость включения $u(t) \in U(t, x(t))$. Это нетривиальный факт, представляющий самостоятельный интерес. Чтобы не отвлекаться далеко в сторону, мы здесь не приводим его доказательства. Отметим лишь, что он вытекает из замкнутости графика отображения $U(t, x)$ и выпуклости его значений (подробнее см., например, [10, § 8.5, § 10.6]). Лемма доказана.

Суммируя полученные факты, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 6. Множество Ω_T есть метризуемый компакт в пространстве пар $(x, u) \in AC[0, T] \times L_\infty[0, T]$ относительно произведения топологии, порожденной нормой $\|x\|_C$, и $*$ -слабой топологии по u .

Обратимся теперь к функционалу J_T , который можно считать заданным на пространстве $C[0, T] \times L_\infty[0, T]$.

ЛЕММА 7. Пусть функция φ удовлетворяет предположению П7 и даны последовательности $x_k \rightrightarrows x_0$ (равномерно), $u_k \xrightarrow{*-\text{сл.}} u_0$ (слабо в L_∞ относительно L_1) на отрезке $[0, T]$. Тогда

$$\int_0^T \varphi(t, x_0(t), u_0(t)) dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi(t, x_k(t), u_k(t)) dt,$$

т.е. функционал $\int_0^T \varphi(t, x, u) dt$ полунепрерывен снизу относительно указанной сходимости.

Этот факт широко известен (см., например, [9], [10], [12], [13]). Отсюда и из непрерывности $\beta(x)$ следует, что и наш функционал J_T также полунепрерывен снизу относительно указанной сходимости.

4. Доказательство основной теоремы. Вернемся к рассмотрению задачи на бесконечном интервале. Введем сходимость в пространствах функций на $[0, \infty)$.

Пусть $C[0, \infty)$ есть пространство всех непрерывных n -мерных функций на $[0, \infty)$. Для элементов этого пространства будем писать $x_k \rightrightarrows x_0$, если x_k равномерно сходится к x_0 на любом отрезке $[0, T]$.

Для элементов введенного выше пространства $L_\infty[0, \infty)$ будем писать $u_k \xrightarrow{*-\text{с.л.}} u_0$, если u_k $*$ -слабо сходится к u_0 на любом отрезке $[0, T]$.

Допустимое множество Ω можно рассматривать как подмножество пространства $C[0, \infty) \times L_\infty[0, \infty)$. Как следует из его определения, Ω состоит из всех тех пар (x, u) , сужение которых на любой отрезок $[0, T]$ принадлежит соответствующему множеству Ω_T .

ЛЕММА 8. *Допустимое множество Ω замкнуто относительно введенной сходимости, т.е. если $(x_k, u_k) \in \Omega$, $x_k \rightrightarrows x_0$, $u_k \xrightarrow{*-\text{с.л.}} u_0$, то $(x_0, u_0) \in \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению для любого $T > 0$ имеем $(x_k, u_k) \in \Omega_T$ и $x_k \rightrightarrows x_0$, $u_k \xrightarrow{*-\text{с.л.}} u_0$ на отрезке $[0, T]$, а так как по лемме 5 множество Ω_T замкнуто, то $(x_0, u_0) \in \Omega_T$. Отсюда и на всей полупрямой $(x_0, u_0) \in \Omega$, что и требовалось доказать.

Введем еще одно определение, которое будет удобно использовать в дальнейшем. Назовем *хвостом* функционала J на интервале (T, ∞) величину

$$\Theta_T(x, u) = \int_T^\infty \varphi(t, x(t), u(t)) dt.$$

Это определение корректно, так как при выполнении предположения П8 интеграл сходится (в расширенном смысле) на любой паре $(x, u) \in \Omega$.

ЛЕММА 9. *Если на Ω выполняется предположение П8, то отрицательные части хвостов функционала стремятся к 0 при $T \rightarrow \infty$ равномерно по всем $(x, u) \in \Omega$.*

Более того, при той же функции $\alpha(T)$ и при том же T_0 (фигурирующих в П8) для всех $(x, u) \in \Omega$ и всех $T \geq T_0$ выполнена оценка

$$\Theta_T(x, u) \geq -\alpha(T). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется предположение П8, т.е. найдутся T_0 и $\alpha(T) \rightarrow 0+$ такие, что для всех $T > T_0$ и всех $T'' > T' \geq T$ для любой пары $(x, u) \in \Omega$ выполнена оценка

$$\int_{T'}^{T''} \varphi(t, x(t), u(t)) dt \geq -\alpha(T).$$

Фиксируя здесь T' и устремляя $T'' \rightarrow +\infty$, получаем требуемое неравенство (9).

Установим теперь аналог леммы 7 о полунепрерывности снизу функционала для бесконечного интервала.

ЛЕММА 10. *Пусть выполнены предположения П1–П8. Тогда функционал J полунепрерывен снизу на Ω относительно введенной сходимости, т.е. если $(x_k, u_k) \in \Omega$, $x_k \rightrightarrows x_0$, $u_k \xrightarrow{*-\text{с.л.}} u_0$, то*

$$J(x_0, u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(x_k, u_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, по лемме 8 имеем $(x_0, u_0) \in \Omega$. Далее, пусть

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(x_k, u_k) = \mu_0.$$

Надо показать, что $J(x_0, u_0) \leq \mu_0$.

Опять считаем $\beta(\cdot) \equiv 0$. Обозначим для краткости $\varphi_k(t) = \varphi(t, x_k(t), u_k(t))$. Для любого T функционал $J(x_k, u_k)$ можно представить в виде

$$J(x_k, u_k) = \int_0^T \varphi_k(t) dt + \Theta_T(x_k, u_k).$$

Так как J удовлетворяет предположению П8, то по лемме 9 для любого $T \geq T_0$ имеем $\Theta_T \geq -\alpha(T)$, поэтому

$$\int_0^T \varphi_k(t) dt = J(x_k, u_k) - \Theta_T(x_k, u_k) \leq J(x_k, u_k) + \alpha(T),$$

и, следовательно, при любом фиксированном T

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_k(t) dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(x_k, u_k) + \alpha(T) = \mu_0 + \alpha(T).$$

Отсюда по лемме 7 получаем

$$\int_0^T \varphi_0(t) dt \leq \mu_0 + \alpha(T).$$

Устремив теперь $T \rightarrow \infty$ и учитывая лемму 2, получаем окончательно

$$J(x_0, u_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_0(t) dt \leq \mu_0.$$

Лемма доказана.

Следующий пример показывает, что предположение П8 в этой лемме существенно: если его отбросить, она перестает быть верной.

ПРИМЕР. Рассмотрим последовательность функций $u_k(t)$, равных -1 при $t \in [k, k+1]$ и 0 в остальных случаях. Эта последовательность $*$ -слабо сходится в нашем смысле к $u_0 \equiv 0$. Положим $\varphi(t, x, u) = u$, $\beta(x) = 0$, $f(t, x, u) = 0$, $x(0) = 0$, $U(t, x) = [-1, 0]$.

Тогда все условия леммы 10, кроме предположения П8, выполнены. Но при этом неравенство

$$\int_0^\infty \varphi(u_0(t)) dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(u_k(t)) dt$$

не выполняется: слева имеем 0 , а интеграл справа при всех k есть

$$\int_0^\infty \varphi(u_k(t)) dt = \int_k^{k+1} (-1) dt = -1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Возьмем произвольную минимизирующую последовательность $(x_k, u_k) \in \Omega$: $J(x_k, u_k) \rightarrow \inf J = J_*$. Надо показать, что существует пара $(x, u) \in \Omega$, для которой $J(x, u) = J_*$.

1) Возьмем произвольное $T_1 > 0$. По лемме 6 множество Ω_{T_1} есть метризуемый компакт. Поэтому из последовательности (x_k, u_k) можно выбрать подпоследовательность (x_k^1, u_k^1) , сходящуюся на $[0, T_1]$ к некоторой паре $(x_0^1, u_0^1) \in \Omega_{T_1}$. (Говоря, что x_k^1 есть подпоследовательность последовательности x_k , мы имеем в виду, что существует возрастающая последовательность номеров $n_k \rightarrow \infty$ такая, что для любого k $x_k^1 = x_{n_k}$.)

2) Возьмем любое $T_2 > T_1 + 1$. По аналогии с предыдущим, из последовательности (x_k^1, u_k^1) можно выбрать подпоследовательность (x_k^2, u_k^2) , сходящуюся на $[0, T_2]$ к некоторой паре $(x_0^2, u_0^2) \in \Omega_{T_2}$.

При этом, так как (x_k^2, u_k^2) – подпоследовательность последовательности (x_k^1, u_k^1) , то на $[0, T_1]$ их пределы совпадают: $x_0^2 \equiv x_0^1$, $u_0^2 \equiv u_0^1$, т.е. новая предельная пара есть продолжение старой на отрезок $[T_1, T_2]$.

3) Далее возьмем любое $T_3 > T_2 + 1$ и из последовательности (x_k^2, u_k^2) выберем подпоследовательность (x_k^3, u_k^3) , и т.д.

Таким образом, на m -ом шаге данной процедуры мы имеем $T_m > T_{m-1} + 1$ и последовательность (x_k^m, u_k^m) , сходящуюся к некоторой паре $(x_0^m, u_0^m) \in \Omega_{T_m}$, которая на предыдущем отрезке $[0, T_{m-1}]$ совпадает с (x_0^{m-1}, u_0^{m-1}) .

Определим пару $(x_0, u_0) \in AC \times L_\infty[0, \infty)$, которая на каждом отрезке $[0, T_m]$ совпадает с (x_0^m, u_0^m) . Такое определение корректно, ибо при любом $k > m$ на отрезке $[0, T_m]$ имеем совпадение $(x_0^k, u_0^k) \equiv (x_0^m, u_0^m)$. Тогда на каждом $[0, T_m]$ имеем $(x_0, u_0) \in \Omega_{T_m}$, откуда по определению Ω вытекает, что на всей полупрямой $(x_0, u_0) \in \Omega$.

4) Рассмотрим диагональную последовательность (x_k^k, u_k^k) . Она, очевидно, обладает следующим свойством: для любого фиксированного m при всех $k \geq m$ эта последовательность содержится в последовательности (x_i^m, u_i^m) , $i = 1, 2, \dots$, и поэтому на отрезке $[0, T_m]$ она сходится к $(x_0^m, u_0^m) = (x_0, u_0)$. А поскольку $T_m \rightarrow \infty$, последовательность (x_k^k, u_k^k) сходится к (x_0, u_0) на любом отрезке $[0, T]$, т.е. по определению сходится в пространстве $C[0, \infty) \times L_\infty[0, \infty)$.

5) Рассмотрим теперь функционал $J(x_k^k, u_k^k)$. По лемме 10 он полунепрерывен снизу относительно данной сходимости, поэтому

$$J(x_0, u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(x_k^k, u_k^k) = J_*,$$

и так как $J_* = \inf J$, то неравенство $J(x_0, u_0) < J_*$ невозможно, и значит, $J(x_0, u_0) = J_*$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как для всех $T > 0$ сходимость в Ω_T задается некоторой метрикой ρ_T , то сходимость в Ω также может быть задана метрикой, в качестве которой можно взять, например, стандартную комбинацию

$$\rho((x', u'), (x'', u'')) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} F(\rho_{T_m}((x', u'), (x'', u''))),$$

где $T_m \rightarrow \infty$, а $F(z) = z/(1+z)$. В пунктах 1)–4) приведенного доказательства фактически установлено, что из каждой последовательности элементов Ω можно выбрать

сходящуюся подпоследовательность, т.е. что в этой метрике Ω есть компакт. Таким образом, наша основная теорема полностью укладывается в рамки общего принципа Вейерштрасса: полунепрерывная снизу функция на компакте достигает своей нижней грани.

5. Частные случаи. Приведем некоторые условия, гарантирующие выполнение предположения П8.

1. Наиболее простое условие, которое отмечается во многих работах и которое действительно наиболее часто выполнено в конкретных задачах, состоит в том, что $\varphi(t, x, u)$ ограничена снизу интегрируемой функцией, т.е. существует такая $l(t) \in L_1(0, \infty)$, $l(t) \geq 0$, что

$$\varphi(t, x(t), u(t)) \geq -l(t) \quad \text{п.в. на } (0, \infty)$$

для любой пары $(x, u) \in \Omega$. В этом случае имеем очевидную оценку для кусков функционала

$$\int_{T'}^{T''} \varphi(t, x(t), u(t)) dt \geq \int_{T'}^{T''} -l(t) dt \geq \int_{T'}^{\infty} -l(t) dt = -\alpha(T'),$$

и так как $\alpha(T') \rightarrow 0$ при $T' \rightarrow \infty$, то наше условие (6) выполнено.

2. Пусть все ограничения задачи не зависят от t , а функционал имеет вид

$$J = \beta(x(0)) + \int_0^{\infty} e^{-rt} L(x, u) dt \rightarrow \max, \quad (10)$$

где функция L непрерывна по (x, u) и вогнута (т.е. выпукла вверх) по u ; а r – некоторое положительное число (оно называется *показателем дисконтирования*). Такие задачи характерны для динамических моделей математической экономики [1]–[7].

Предположим, что существуют такие неотрицательные числа p, h, q, C, K , что для всех $x \in S, u \in U(x)$ выполняются оценки

$$(x, f(x, u)) \leq p(|x|^2 + h), \quad (11)$$

$$L(x, u) \leq C|x|^q + K, \quad (12)$$

и пусть $pq < r$. Тогда функция $\varphi(t, x, u) = e^{-rt} L(x, u)$ ограничена сверху интегрируемой функцией, и, следовательно, согласно п. 1 для задачи максимизации предположение П8 выполнено.

Действительно, рассмотрим функцию $z(t) = |x(t)|^2 + h$. Из (11) следует, что $|\dot{z}| \leq 2pz$, откуда $z(t) \leq z(0)e^{2pt}$ и поэтому $|x(t)| \leq C_1 e^{pt}$ с некоторой константой C_1 . Тогда $L(x, u) \leq C_2 e^{pqt} + K$ с некоторой C_2 , и отсюда

$$e^{-rt} L(x, u) \leq C_2 e^{(pq-r)t} + K e^{-rt} = l(t),$$

где функция $l(t)$ интегрируема на $(0, \infty)$, поскольку $pq - r < 0$.

3. Рассмотрим также случай, когда задача имеет тот же вид, что и в п. 2, но управляемая система линейна (с постоянными коэффициентами): $\dot{x} = Ax + Bu$, а множество управлений U не зависит от x . Пусть число p таково, что все собственные значения λ матрицы A имеют $\operatorname{Re} \lambda < p$, и существуют такие неотрицательные числа q, C, K , что для всех $x \in S, u \in U$ выполняется оценка (12) и при этом $pq < r$. Тогда опять семейство функций $\varphi(t, x, u) = e^{-rt} L(x, u)$ ограничено сверху интегрируемой функцией, и, следовательно, предположение П8 выполнено.

Действительно, в этом случае, как известно, найдется такая константа C_1 , что любое решение системы $\dot{x} = Ax + Bu, u \in U$, с начальным значением $x(0) \in M_0$ удовлетворяет оценке $|x(t)| \leq C_1 e^{pt}$, и далее надо повторить соответствующие рассуждения предыдущего пункта.

6. Сравнение с известными результатами. Наиболее общие результаты по данному вопросу были получены в работе Балдера [3]. Сравним его и наше предположения относительно поведения функционала на бесконечности. В указанной работе введено понятие сильной равномерной интегрируемости семейства функций и потребовано, чтобы семейство $\{\varphi^-(t, x(t), u(t))\}$ обладало этим свойством.

Пусть M – измеримое множество на прямой. Через $L_1(M)$ обозначим пространство измеримых интегрируемых по Лебегу функций, а через $L_1^+(M)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_1(M)$.

Напомним, что множество функций $G \subset L_1(M)$ называется *равномерно интегрируемым* (на M), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если измеримое множество $E \subset M$ имеет $\operatorname{mes} E < \delta$, то

$$\int_E |g(t)| dt < \varepsilon$$

для всех $g \in G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (Балдер [3]). Множество функций $G \subset L_1(M)$ называется *сильно равномерно интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $h \in L_1^+(M)$ такая, что

$$\int_{E(|g|>h)} |g(t)| dt < \varepsilon \quad \text{для любой } g \in G,$$

где $E(f > h) = \{t \in M \mid f(t) > h(t)\}$.

Нетрудно заметить, что для множества M конечной меры это свойство совпадает с равномерной интегрируемостью, а для множества бесконечной меры оно сильнее последнего свойства.

Вместо определения 1 мы будем пользоваться следующим эквивалентным определением 2, которое представляется нам более удобным.

Пусть $h, g \in L_1^+(M)$. Будем говорить, что h *мажорирует* g , если $h(t) \geq g(t)$ п.в. на M , и h *мажорирует* g с *интегральной точностью* $\varepsilon > 0$, если

$$\int_M (g(t) - h(t))^+ dt < \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество функций $G \subset L_1(M)$ назовем *сильно равномерно интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $h \in L_1^+(M)$, которая мажорирует $|g(t)|$ с интегральной точностью ε для любой $g \in G$.

ЛЕММА 11. *Определение 1 и определение 2 эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без нарушения общности считаем, что $G \subset L_1^+(M)$. Так как $h \geq 0$, то всегда $g - h \leq g$, следовательно,

$$\int_M (g - h)^+ dt = \int_{E(g>h)} (g - h) dt \leq \int_{E(g>h)} g dt,$$

поэтому любое множество G , удовлетворяющее определению 1, удовлетворяет и определению 2.

Установим обратное. Пусть множество G удовлетворяет определению 2. Допустим, что оно не удовлетворяет определению 1, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $h \in L_1^+(M)$ найдется $g_h \in G$, для которой

$$\int_{E_h} g_h dt \geq \varepsilon > 0, \quad \text{где } E_h = E(g_h > h). \quad (13)$$

Фиксируем это ε . По определению 2 для него существует $h_0 \in L_1^+(M)$ такое, что для любого $g \in G$ выполнено

$$\int_M (g - h_0)^+ dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда и для всех $h \geq h_0$ выполнено

$$\int_M (g - h)^+ dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любого $h \geq h_0$ имеем

$$\int_M (g_h - h)^+ dt = \int_{E_h} (g_h - h) dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

и отсюда с учетом (13) получаем

$$\int_{E_h} h dt > \frac{\varepsilon}{2}.$$

По определению на E_h всегда имеем $g_h - h/2 = (g_h - h) + h/2 > h/2$, откуда с учетом предыдущего неравенства получаем

$$\int_{E_h} \left(g_h - \frac{h}{2} \right) dt > \frac{\varepsilon}{4},$$

и так как $E(g_h > h/2) \supset E(g_h > h) = E_h$, то

$$\int_{E(g_h > h/2)} \left(g_h - \frac{h}{2} \right)^+ dt = \int_M \left(g_h - \frac{h}{2} \right)^+ dt > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Полученное неравенство выполнено для любого $h \geq h_0$. Но это противоречит определению 2, согласно которому найдется $h \geq h_0$ такое, что для любого $g \in G$

$$\int_M \left(g - \frac{h}{2}\right)^+ dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим случай $M = (0, +\infty)$. Пусть множество $\Phi \subset L_1(0, \infty)$ таково, что семейство функций $\{\varphi^- \mid \varphi \in \Phi\}$ сильно равномерно интегрируемо. Пользуясь определением 2 и равенством $a^- = (-a)^+$, нетрудно показать, что это условие эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h_\varepsilon \in L_1^+(0, \infty)$ такая, что для всех $\varphi \in \Phi$

$$\int_0^\infty (\varphi + h_\varepsilon)^- dt < \varepsilon.$$

Покажем, что в этом случае и наше условие о равномерной сходимости отрицательной части кусков функционала к нулю для множества Φ выполнено. Имеем при любых $T' < T''$ следующую оценку:

$$\int_{T'}^{T''} (\varphi + h_\varepsilon)^- dt \leq \int_0^\infty (\varphi + h_\varepsilon)^- dt < \varepsilon.$$

В силу интегрируемости h_ε найдется T_ε такое, что

$$\int_{T_\varepsilon}^\infty h_\varepsilon dt < \varepsilon.$$

Представим φ в виде $\varphi = (\varphi + h_\varepsilon) + (-h_\varepsilon)$. Так как функция $(\cdot)^-$ сублинейна, а $h_\varepsilon \geq 0$, то $\varphi^- \leq (\varphi + h_\varepsilon)^- + (-h_\varepsilon)^- = (\varphi + h_\varepsilon)^- + h_\varepsilon$.

Тогда при любых $T'' > T' > T_\varepsilon$ имеем

$$\int_{T'}^{T''} \varphi^- dt \leq \int_{T'}^{T''} (\varphi + h_\varepsilon)^- dt + \int_{T'}^{T''} h_\varepsilon dt < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

и отсюда опять же в силу сублинейности функции $(\cdot)^-$

$$\left(\int_{T'}^{T''} \varphi dt\right)^- \leq \int_{T'}^{T''} \varphi^- dt < 2\varepsilon,$$

следовательно, предположение П8 для множества Φ также выполнено.

Однако, обратное утверждение, очевидно, неверно уже потому, что функции, удовлетворяющие П8, не обязательно интегрируемы по Лебегу на $(0, \infty)$ (т.е. их интегралы не обязательно сходятся абсолютно). Например, если вместо функций $\varphi(t) \in \Phi$ рассмотреть $\varphi(t) + \frac{1}{t+1} \sin t$, то полученные функции уже не будут принадлежать $L_1(0, \infty)$, тогда как куски их интегралов по-прежнему будут удовлетворять оценке (6), поскольку

$$\int_{T'}^{T''} \frac{\sin t}{t+1} dt = -\frac{\cos t}{t+1} \Big|_{T'}^{T''} - \int_{T'}^{T''} \frac{\cos t}{(t+1)^2} dt \rightarrow 0$$

при $T', T'' \rightarrow \infty$. Таким образом, требование сильной равномерной интегрируемости семейства функций, принятое в работе [3], более жесткое, чем наше требование П8.

Если даже ослабить условие работы [3], потребовав сильной равномерной интегрируемости семейства функций $\{\varphi^-(t)\}$ лишь на интервале (T, ∞) при достаточно большом T , то в силу тех же причин это ослабленное требование останется строго сильнее нашего условия П8.

7. Возможные обобщения. 1. Если в задаче (1)–(5) присутствуют дополнительные ограничения неравенства вида

$$J_i = \beta_i(x(0)) + \int_0^\infty \varphi_i(t, x, u) dt \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (14)$$

где функции β_i, φ_i удовлетворяют тем же предположениям, что и β, φ (в том числе и предположению П8), а интеграл по $[0, \infty)$ по-прежнему понимается как предел интегралов по отрезкам $[0, T]$ при $T \rightarrow \infty$, то ясно, что основная теорема останется верной и доказательство не изменится. Действительно, функционалы J_j будут полунепрерывны снизу на “старом” множестве Ω (не учитывающем ограничение (14)) относительно введенной сходимости, поэтому множество пар $(x, u) \in \Omega$, удовлетворяющих ограничению (14), будет замкнутым, а тогда новое множество допустимых траекторий, задающееся теперь ограничениями (2)–(5) и (14), по-прежнему будет компактным.

2. Можно также добавить в задачу и ограничения равенства вида

$$F_j = \beta_j(x(0)) + \int_0^\infty f_j(t, x, u) dt = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (15)$$

где функции f_j удовлетворяют предположению П1 (т.е. они непрерывны по (t, x) и линейны по u), а β_j – предположению П6 (т.е. $\beta_j(x)$ непрерывны). При этом мы потребуем, чтобы функции f_j и $-f_j$ удовлетворяли предположению П8, т.е. чтобы

$$\int_{T'}^{T''} f_j(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } T', T'' \rightarrow \infty$$

равномерно по “старому” множеству Ω . Последнее условие эквивалентно тому, что для любой допустимой пары интегралы в (15) имеют конечные значения, причем они сходятся к своим значениям равномерно по всем допустимым траекториям. В этой ситуации опять основная теорема останется справедливой, так как множество пар $(x, u) \in \Omega$, удовлетворяющих (15), замкнуто относительно введенной сходимости.

Ограничение (15) позволяет рассматривать финальные ограничения равенства на конец траектории

$$x(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} x(T)$$

типа

$$(a_j, x(\infty)) = c_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

где $a_j \in \mathbb{R}^n$, которые в эквивалентной форме могут быть представлены в виде

$$(a_j, x(0)) + \int_0^\infty (a_j, f(t, x(t), u(t))) dt = c_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Здесь надо предполагать, что функции $\pm(a_j, f(t, x, u))$ удовлетворяют П8.

3. Задача, в которой вместо управляемой системы имеется дифференциальное включение $\dot{x} \in V(t, x)$, где многозначное отображение V удовлетворяет предположению П4, легко сводится к рассмотренной. Для этого надо перейти к системе $\dot{x} = u, u \in V(t, x)$.

4. В настоящей статье мы предполагали, что система (2) линейна по управлению, а множество $U(t, x)$ есть выпуклый компакт. В случае общей нелинейной системы надо требовать, чтобы выпуклым и компактным было так называемое *расширенное множество скоростей* [10], [3]:

$$Q(t, x) = \{(z, v) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid \exists u \in U(t, x) : z \geq \varphi(t, x, u), v = f(t, x, u)\},$$

при этом надо рассматривать сходимости траекторий $x(t)$ в пространстве $C[0, T]$, а для представления предельной траектории в виде решения системы (2) при некотором управлении $u(t)$ применять один из вариантов теоремы об измеримом выборе, например, лемму Филиппова о включении [8].

Мы не стали рассматривать этот общий случай, так как соответствующие технические усложнения касаются задачи на фиксированном отрезке (и они хорошо известны), а нашей целью было как можно более четко выделить специфику задачи на бесконечном интервале. Отметим лишь, что этот общий случай укладывается в предлагаемую ниже абстрактную схему.

8. Абстрактная схема. Изложенная выше схема доказательства проходит и в следующей абстрактной постановке.

Пусть имеется возрастающее счетное семейство множеств $T_n \subset T_{n+1} \subset \dots$, $n = 1, 2, \dots$, и пусть $\mathfrak{R} = \bigcup T_n$. На каждом T_n задано некоторое множество функций $\Omega(T_n) = \{w : T_n \rightarrow Z\}$, принимающих значения в некотором множестве образов Z , и задан функционал $J_n : \Omega(T_n) \rightarrow \mathbb{R}$. Предполагается, что для любого n выполнено $\Omega(T_{n+1})|_{T_n} \subset \Omega(T_n)$.

Пусть Ω есть множество всех функций $w : \mathfrak{R} \rightarrow Z$ таких, что для любого n сужение $w_n = w|_{T_n}$ принадлежит $\Omega(T_n)$. Тогда для каждой функции $w \in \Omega$ определены функционалы $J_n(w) = J_n(w_n)$, $n = 1, 2, \dots$, и поэтому можно рассматривать функционал

$$J(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(w_n).$$

Точнее, он рассматривается лишь на множестве тех $w \in \Omega$, для которых этот предел (конечный или бесконечный) существует.

Ставится задача: $J(w) \rightarrow \min$ по всем $w \in \Omega$, для которых функционал существует.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. S1. Для каждого n множество функций $\Omega(T_n)$ есть компакт относительно некоторой топологии τ_n , имеющей счетную базу (и значит, метризуемой); при этом отображение $\pi_n : \Omega(T_{n+1}) \rightarrow \Omega(T_n)$, ставящее в соответствие каждой функции $w(t)$ на множестве T_{n+1} ее сужение на T_n , непрерывно.

S2. Для каждого n функционал J_n полунепрерывен снизу на $\Omega(T_n)$ относительно топологии τ_n .

S3. Существуют числовая последовательность $\alpha_N \rightarrow 0+$ и номер N_0 такие, что для любого $N > N_0$ и для любых $n_2 > n_1 \geq N$, для любого $w \in \Omega$

$$J_{n_2}(w) - J_{n_1}(w) \geq -\alpha_N,$$

или, что то же самое,

$$(J_{n_2}(w) - J_{n_1}(w))^- \rightarrow 0 \quad \text{при } n_1, n_2 \rightarrow \infty, \quad n_1 < n_2,$$

равномерно по всем $w \in \Omega$.

Таким образом, в этой абстрактной схеме роль кусков функционала играют разности $J_{n_2}(w) - J_{n_1}(w)$.

При сделанных предположениях справедлив аналог леммы 2, гарантирующий существование предела функционала (как и раньше, либо конечного, либо $+\infty$) на любой $w \in \Omega$, множество Ω есть метризуемый компакт в топологии сходимости на каждом T_n , функционал J полунепрерывен снизу на Ω относительно этой сходимости, и верна следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть существует $w \in \Omega$, на которой $J(w) < +\infty$. Тогда поставленная задача имеет решение, т.е. J достигает своего минимума на Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет основные пункты доказательства теоремы 1.

Можно предложить и еще более абстрактную схему, в которой множеств T_n нет, а вместо пространств функций $\Omega(T_n)$ рассматривается произвольное проективное семейство компактов Ω_n со счетными базами, и Ω есть проективный предел этого семейства. Однако для такой постановки (и тем более при отказе от счетности баз у топологий τ_n) пока нет достаточно убедительной мотивировки, поэтому мы здесь детально ее не рассматриваем.

Авторы выражают благодарность Б. А. Копейкину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Baum R. F. Existence theorems for Lagrange control problems with unbounded time domain // J. Optimization Theory Appl. 1976. V. 19. P. 89–116.
- [2] Magill M. Infinite horizon programs // Econometrica. 1981. V. 49. P. 679–711.
- [3] Balder E. J. An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 95. P. 195–213.
- [4] Carlson D. A., Haurie A. B., Leizarowitz A. Infinite-Horizon Optimal Control. Berlin: Springer, 1991.
- [5] Leonard D., Long N. V. Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [6] Zaslavski A. J. Optimal programs on infinite horizon // SIAM J. Control Optimization. 1995. V. 33. № 6. P. 1643–1686.
- [7] Zaslavski A. J. Turnpike property of optimal solutions of infinite-horizon variational problems // SIAM J. Control Optimization. 1997. V. 35. № 4. P. 1169–1203.
- [8] Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех., астрон., физ., хим. 1959. № 2. С. 25–32.
- [9] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [10] Cesari L. Optimization: Theory and Applications. New York: Springer, 1983.
- [11] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
- [12] Ioffe A. D. On lower semicontinuity of integral functions // SIAM J. Control Optimization. 1977. V. 15. P. 521–538.
- [13] Olech C. Weak lower semicontinuity of integral functions // J. Optimization Theory Appl. 1976. V. 15. P. 3–16.

(А. В. Дмитрук) Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва
(Н. В. Кузькина) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: avdmi@cemi.rssi.ru, nataly-k@yandex.ru

Поступило
04.02.2004
Исправленный вариант
04.03.2005