Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. И. Осолков, Об одном результате Теляковского и кратных преобразованиях Гильберта с полиномиальными фазами, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 242–256

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:34:53

УДК 517

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ ТЕЛЯКОВСКОГО И КРАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ГИЛЬБЕРТА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ФАЗАМИ

К. И. Осколков

В работе получен кратный аналог теоремы, доказанной в 1987 г. Г. И. Архиповым и автором, дающей оценку дискретных преобразований Гильберта с полиномиальной фазой. Для линейного случая соответствующая оценка суммы кратного тригонометрического ряда была установлена С. А. Теляковским.

Библиография: 17 названий.

Я посвящаю эту работу моему учителю Сергею Александровичу Теляковскому к его семидесятилетию.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, \dots$, — d -мерное вещественное евклидово пространство векторов $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$; $\mathbb{Z}^d$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$; $\mathbb{N}^d$ — подмножество векторов $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ с натуральными координатами n_k ; $\mathbb{Z}^d/\mathbb{N}$ — множество векторов в $\mathbb{R}^d$ с рациональными координатами.

Будем говорить, что подмножество $\omega \subset \mathbb{R}^d$ *координатно выпуклое*, если пересечение ω с любой прямой, параллельной какой-либо из координатных осей, является либо интервалом, либо пустым множеством. Обозначим через Ω^d класс всех координатно выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$.

Теляковский [1], [2] установил следующий замечательный результат о кратных $\sin$ -рядах с линейной фазой.

ТЕОРЕМА 1. *Для $d \geq 2$ выполнено*

$$\sup_{\omega \in \Omega^d} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \left| \sum_{\mathbf{n} \in \omega \cap \mathbb{N}^d} \frac{\sin n_1 x_1}{n_1} \dots \frac{\sin n_d x_d}{n_d} \right| < \infty.$$

Эта теорема нашла многочисленные применения, в частности, в проблеме оценок поперечников по Колмогорову классов функций с ограниченной смешанной производной и, в целом, в теме приближения гиперболическим крестом, а также в теории сходимости кратных рядов Фурье функций многих переменных, имеющих ограниченную вариацию в смысле Харди, см. [3].

Следующий результат был установлен в [4] на основе метода тригонометрических сумм Виноградова [5]. Он касается одномерных дискретных преобразований Гильберта с полиномиальной фазой высшей степени (см. также [6]). Обозначение $\mathscr{P}^r$, $r \in \mathbb{N}$, используется для множества алгебраических многочленов p одной переменной с вещественными коэффициентами степени r таких, что $p(0) = 0$.

Работа выполнена при поддержке NSF, грант DMS-9706883.

ТЕОРЕМА 2. Для многочлена $p \in \mathcal{P}^r$ положим

$$h_m(p) := \sum_{n=1}^m \frac{e^{ip(n)} - e^{ip(-n)}}{n}, \quad m \geq 1.$$

Тогда

$$\sup_{p \in \mathcal{P}^r} \sup_m |h_m(p)| < \infty \quad (1)$$

и для каждого фиксированного многочлена $p \in \mathcal{P}^r$ существует предел

$$h(p) := \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(p).$$

Этот результат также нашел разнообразные приложения. Они включают решение некоторых задач о спектрах равномерной сходимости и исследование свойств решений задачи Коши для широкого класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Шрёдингера с периодическими начальными данными. По сути, теорема 2 стала отправной точкой для изучения широкого класса рядов Виноградова

$$V(f; x_1, \dots, x_r) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2\pi i(x_1 n + x_2 n^2 + \dots + x_r n^r)}, \quad c_n(f) := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Обзор некоторых результатов в этих направлениях содержится в работе [7], а дальнейшие развития – в [8], [9].

Здесь будет доказана теорема 3 о кратных дискретных преобразованиях Гильберта с полиномиальными фазами. Она обобщает и несколько усиливает теоремы 1 и 2.

Будем говорить, что числовая последовательность $f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ медленная, если она удовлетворяет условию Литтлвуда–Пэли (см. [10, гл. 15]):

$$\|f\|_{\mathcal{S}} := \|f\|_{\infty} + \sup_n \sum_{n \leq m \leq 2n} |f_m - f_{m+1}| < \infty, \quad \|f\|_{\infty} := \sup_n |f_n|.$$

Обозначим через $\mathcal{S}$ класс всех последовательностей с условием $\|f\|_{\mathcal{S}} < \infty$. Ясно, что если последовательность f имеет ограниченную вариацию в обычном смысле, т.е. $f \in \text{BV}$, то эта последовательность медленная. Однако класс $\mathcal{S}$ существенно шире, чем BV . Например, очевидно, что для любого фиксированного вещественного $t \neq 0$ мы имеем $f_t := \{n^{it}\} = \{e^{it \ln n}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, $f_t \notin \text{BV}$.

Мы будем говорить, что d -индексная последовательность $f = \{f_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$ координатно медленная (обозначение: $f \in \mathcal{S}^d$), если сужения f на прямые, параллельные координатным осям, являются равномерно медленными:

$$\|f\|_{\mathcal{S}^d} := \|f\|_{\infty} + \max_{1 \leq k \leq d} \sup_{\mathbf{n}_k} \sup_n \sum_{n \leq m \leq 2n} |f_{\mathbf{n}_k + m \mathbf{e}_k} - f_{\mathbf{n}_k + (m+1) \mathbf{e}_k}| < \infty,$$

где

$$\mathbf{e}_k := (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, d,$$

обозначает стандартный базис в $\mathbb{R}^d$ и для $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_d)$ используется обозначение $\mathbf{n}_k := \mathbf{n} - n_k \mathbf{e}_k$. Очевидно, что характеристическая функция координатно выпуклой области, т.е. $\omega \in \Omega^d$, является координатно медленной.

Будут также использоваться следующие обозначения: $\mathcal{P}^{r,d}$ – множество наборов многочленов $\vec{p} = (p_1, \dots, p_d)$, где $p_k \in \mathcal{P}^r$; $\square_{\mathbf{m}}$ – параллелепипед $\{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d : n_k \leq m_k, k = 1, \dots, d\}$. Символы $\ll_r, \ll_{r,d}$ в соотношениях типа $A \ll_r B$, $A \ll_{r,d} B$ обозначают, что существуют конечные множители $c_r, c_{r,d}$, которые зависят только от указанных параметров (r или r, d) такие, что $|A| \leq c_r |B|$ или соответственно $|A| \leq c_{r,d} |B|$.

ТЕОРЕМА 3. Для $\vec{p} \in \mathcal{P}^{r,d}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ положим

$$h_{\mathbf{m}}(f, \vec{p}) := \sum_{\mathbf{n} \in \square_{\mathbf{m}}} f_{\mathbf{n}} \prod_{k=1}^d \frac{e^{ip_k(n_k)} - e^{ip_k(-n_k)}}{n_k}.$$

Если $f \in \mathcal{S}^d$, то

$$\sup_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d} \sup_{\vec{p}} |h_{\mathbf{m}}(f, \vec{p})| \stackrel{r,d}{\ll} \|f\|_{\mathcal{S}^d} \quad (2)$$

и для любого набора многочленов $\vec{p} \in \mathcal{P}^{r,d}$ предел $h(f, \vec{p}) := \lim_{\min_k m_k \rightarrow \infty} h_{\mathbf{m}}(f, \vec{p})$ существует.

Интересно сравнить эту теорему со следующим результатом отрицательного характера, полученным недавно Гараевым [11]: существует такое действительное число x , что последовательность

$$h_N := \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{\sin(mnx)}{mn}$$

расходится при $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для $p \in \mathcal{P}^r$ положим

$$e_{-}^{ip(t)} := \frac{e^{ip(t)} - e^{ip(-t)}}{2i},$$

и для $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $\vec{p} \in \mathcal{P}^{r,d}$ рассмотрим следующие тригонометрические суммы и интегралы:

$$\begin{aligned} T_n(p) &:= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n e_{-}^{ip(m)}, \quad I_n(p) := \frac{1}{n} \int_0^n e_{-}^{ip(t)} dt, \quad T_0(p) = I_0(p) := 0, \\ A_n(p) &:= T_n(p) - T_{n-1}(p), \quad B_n(p) := I_n(p) - I_{n-1}(p), \\ A_{\mathbf{n}}(\vec{p}) &:= \prod_{k=1}^d A_{n_k}(p_k), \quad B_{\mathbf{n}}(\vec{p}) := \prod_{k=1}^d I_{n_k}(p_k). \end{aligned}$$

Имеем

$$\frac{e_{-}^{ip(n)}}{n} = A_n(p) + \frac{T_{n-1}(p)}{n}, \quad \int_{n-1}^n \frac{e_{-}^{ip(t)}}{t} dt = B_n(p) + \frac{I_{n-1}(p)}{n}. \quad (3)$$

В [4] установлено, что

$$\text{a) } \sup_{p \in \mathcal{P}^r} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|T_{n-1}(p)|}{n} < \infty, \quad \text{b) } \sup_{p \in \mathcal{P}^r} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|I_{n-1}(p)|}{n} < \infty. \quad (4)$$

Утверждение б) относится к интегральным преобразованиям Гильберта

$$g(p) := \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(p), \quad g_m(p) := \int_0^m \frac{e_{-}^{ip(t)}}{t} dt.$$

Равномерная ограниченность $\sup_{m>0} \sup_{p \in \mathcal{P}^r} |g_m(p)| < \infty$ и существование предела $g(p)$ – результаты, установленные Стейном и Вейнгером [12].

Утверждение а) в (4) более сложное, потому что существенную роль играют арифметические характеристики вектора коэффициентов многочлена p и доказательство требует применения кругового метода Харди–Литтлвуда–Виноградова. Это утверждение было установлено в работе [4]. Независимо и несколько позже, чем в [4], глобальная ограниченность $\sup_{m>0} \sup_{p \in \mathcal{P}^r} |h_m(p)| < \infty$, см. (1), была доказана Стейном и Вейнгером, см. [6], а также [13, с. 373].

Для подмножества индексов $\mathcal{A} \subset [1, d]$ (возможно пустого) рассмотрим составные интегрально-дискретные произведения

$$C_{\mathbf{n}}(\mathcal{A}, \vec{p}) := \left(\prod_{k \in \mathcal{A}} A_{n_k}(p_k) \right) \left(\prod_{k \in [1, d] \setminus \mathcal{A}} B_{n_k}(p_k) \right), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \quad \vec{p} \in \mathcal{P}^{r, d}.$$

Тогда ввиду (3) и (4) теорема 3 есть следствие, соответствующее частному случаю $\mathcal{A} = [1, d]$, из следующего утверждения.

ЛЕММА 1. *Допустим, что $f := \{f_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$ – координатно медленная последовательность, $\|f\|_{\mathcal{S}^d} \leq 1$, $\mathcal{A} \subset [1, d]$ – подмножество индексов и $\vec{p} \in \mathcal{P}^{r, d}$. Тогда предел*

$$S(f, \mathcal{A}, \vec{p}) := \lim_{\min_k m_k \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{n} \in \square_m} f_{\mathbf{n}} C_{\mathbf{n}}(\mathcal{A}, \vec{p})$$

существует и

$$|S(f, \mathcal{A}, \vec{p})| \stackrel{r, d}{\ll} 1. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для многочлена $p \in \mathcal{P}^r$ обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ вектор коэффициентов многочлена $p/(2\pi)$, и пусть

$$p(t) = 2\pi P(\mathbf{x}, t) := 2\pi(x_1 t + \dots + x_r t^r), \quad p_*(t) := 2\pi(|x_1|t + \dots + |x_r|t^r).$$

Следующие оценки тривиальны:

$$\begin{aligned} \max(|T_n(p)|, |I_n(p)|) &\leq \min(1, p_*(n)), \\ |C_n(p)| &\leq \max(|A_n(p)|, |B_n(p)|) \ll \frac{\min(1, p_*(n))}{n} \end{aligned} \quad (6)$$

просто в силу того, что $|e_-^{ip}| = |\sin p_-|$, где $p_-(t) := (p(t) - p(-t))/2$, и $|p_-| \leq p_*$.

Мы разобьем доказательство леммы 1 на 4 следующих случая:

- 1) $\mathcal{A} = \emptyset, d = 1$;
- 2) $\mathcal{A} = \emptyset, d \geq 2$;
- 3) $\mathcal{A} = \{1\}, d = 1$;
- 4) общее множество $\mathcal{A} \subset [1, d], d \geq 2$.

Случай 1) самый простой. Здесь нужно рассмотреть сумму интегралов

$$S(f, p) = S(f, \emptyset, p) := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n B_n(p).$$

Применяя преобразование Абеля для m -ой частной суммы, имеем

$$\begin{aligned} S_m(f, p) &:= \sum_{n=1}^m f_n B_n(p) = \sum_{n=1}^m f_n (I_n(p) - I_{n-1}(p)) \\ &= f_m I_m(p) + \sum_{n=1}^{m-1} I_n(p) \Delta f_n, \quad \Delta f_n := f_n - f_{n+1}. \end{aligned}$$

Поэтому, достаточно доказать, что $I_n(p) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, и если $f \in \mathcal{S}, \|f\|_{\mathcal{S}} \leq 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n(p) \Delta f_n| \stackrel{r}{\ll} 1. \quad (7)$$

Из определения медленной последовательности вытекает, что

$$\sum_{n=1}^m p_*(n) |\Delta f_n| \ll p_*(m), \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} p_*^{-\rho}(n) |\Delta f_n| \stackrel{\rho}{\ll} p_*^{-\rho}(m), \quad p \in \mathcal{P}^r, \quad \rho > 0. \quad (8)$$

Далее, для интеграла I_n выполнена следующая оценка (см. также [4], [8]):

$$|I_n(p)| \ll \min(p_*(n), p_*^{-\rho}(n)), \quad \rho := \frac{1}{r}. \quad (9)$$

Ввиду (6) эта оценка является следствием неравенства

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^n e^{ip(t)} dt \right| \ll \min(1, p_*^{-\rho}(n)), \quad p \in \mathcal{P}^r,$$

которое эквивалентно известной оценке Виноградова стандартного осцилляционного интеграла с полиномиальной фазой (см. [5, гл. 2, лемма 4]):

$$\left| \int_0^1 e^{ip(t)} dt \right| = \left| \int_0^1 e^{2\pi i P(\mathbf{x}, t)} dt \right| \leq \min(1, 32 \min_k |x_k|^{-\rho}) \leq \min(1, 32 r^\rho p_*^{-\rho}(1)).$$

Поэтому из (9) вытекает, что, и в самом деле, $I_n(p) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n(p) \Delta f_n| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \min(p_*(n), p_*^{-\rho}(n)) |\Delta f_n| \stackrel{r}{\ll} \min(p_*(m) + p_*^{-\rho}(m)) \stackrel{r}{\ll} 1.$$

Более того, мы имеем

$$\begin{aligned} |S(f, p) - S_m(f, p)| &= \left| \sum_{n=m}^{\infty} f_n B_n(p) \right| \leq |f_m I_m(p)| + \sum_{n=m}^{\infty} |I_n(p) \Delta f_n| \\ &\ll \sum_{n=m}^{\infty} \min(p_*(n), p_*^{-\rho}(n)) |\Delta f_n| \stackrel{r}{\ll} \min(1, p_*^{-\rho}(m)), \end{aligned} \quad (10)$$

что представляет собой оценку скорости сходимости интеграла в случае 1) и завершает доказательство леммы 1 в случае 1).

Случай 2). Здесь надо рассмотреть кратные суммы интегралов

$$S(f, \vec{p}) = S(f, \emptyset, \vec{p}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} f_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}(\vec{p}).$$

Мы воспользуемся модификацией основной идеи Теляковского доказательства теоремы 1. Для данного набора многочленов $\vec{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathcal{P}^{r,d}$ разобьем область суммирования $\mathbb{N}^d$ на $d!$ подобластей в соответствии с величиной многочленов $p_{*1}, \dots, p_{*d}$. Типичными подобластями являются “алгебраические октанты”

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(\vec{p}) := \{(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d : p_{*1}(n_1) \geq \dots \geq p_{*d}(n_d)\}, \\ \omega_m &= \omega_m(\vec{p}) := \{(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d : p_{*1}(n_1) \geq \dots \geq p_{*d}(n_d), n_d \geq m\}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (11)$$

Другие октанты (их количество равно $d! - 1$) получаются из ω всевозможными перестановками неравенств между многочленами $p_{*k}(n_k)$ и заменой $\leq$ на строгие неравенства $<$ везде или в части неравенств, так что получающиеся подмножества не имеют общих точек и разбивают все $\mathbb{N}^d$.

Докажем, что для последовательности f с компактным носителем и такой, что $\|f\|_{\mathcal{S}^d} \leq 1$, выполнено

$$|S_{\omega_m}| \stackrel{r,d}{\ll} \min(1, p_{*d}^{-\rho}(m)), \quad m \in \mathbb{N}, \quad S_{\omega_m} := \sum_{\mathbf{n} \in \omega_m} f_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}(\vec{p}). \quad (12)$$

Для краткости положим $n_1 := n$, $p_1 := p$ и для $\mathbf{n} = (n, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, d-1$ обозначим $\mathbf{n}^k := (n_{k+1}, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^{d-k}$,

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{n}^k}(\vec{p}) &:= \prod_{l=k+1}^d B_{n_l}(p_l), \quad \Pi_{\mathbf{n}^k}(\vec{p}) := \prod_{l=k+1}^d \frac{\min(1, p_{*l}(n_l))}{n_l}, \\ \omega_m^k &:= \{\mathbf{n}^k \in \mathbb{N}^{d-k} : p_{*k+1}(n_{k+1}) \geq \dots \geq p_{*d}(n_d), n_d \geq m\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда

$$S_{\omega_m} = \sum_{\mathbf{n}^1 \in \omega_m^1} B_{\mathbf{n}^1}(\vec{p}) \left(\sum_{n: p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)} f_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}(p) \right), \quad (14)$$

и в силу (10), (8)

$$\left| \sum_{n: p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)} f_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}(p) \right| \stackrel{r}{\ll} \min(1, p_{*2}^{-\rho}(n_2)), \quad |B_{\mathbf{n}^1}(\vec{p})| \stackrel{d}{\ll} \Pi_{\mathbf{n}^1}(\vec{p}).$$

Поэтому соотношение (12) вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned}
 |S_{\omega_m^d}| &\ll^{r,d} \sum_{\mathbf{n}^1 \in \omega_m^1} \Pi_{\mathbf{n}^1}(\vec{p}) \min(1, p_{*2}^{-\rho}(n_2)) \\
 &= \sum_{\mathbf{n}^2 \in \omega_m^2} \Pi_{\mathbf{n}^2}(\vec{p}) \left(\sum_{n_2: p_{*2}(n_2) \geq p_{*3}(n_3)} \frac{\min(p_{*2}(n_2), p_{*2}^{-\rho}(n_2))}{n_2} \right) \\
 &\ll^r \sum_{\mathbf{n}^2 \in \omega_m^2} \Pi_{\mathbf{n}^2}(\vec{p}) \min(1, p_{*3}^{-\rho}(n_3)) \ll^{r,d} \dots \\
 &\ll^{r,d} \sum_{n_d=m}^{\infty} \frac{\min(p_{*d}(n_d), p_{*d}^{-\rho}(n_d))}{n_d} \ll^r \min(1, p_{*d}^{-\rho}(m)). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Ясно, что оценка (15) влечет глобальную ограниченность сумм $S(f, \vec{p})$ для произвольной координатно медленной последовательности f , $\|f\|_{\mathcal{S}^d} \leq 1$, с компактным носителем:

$$\sup_{\vec{p} \in \mathcal{S}^{r,d}} |S(f, \vec{p})| \ll^{r,d} 1.$$

Из (15) также вытекает сходимость бесконечного ряда в смысле Прингсхейма, если f не имеет компактного носителя. Более того, справедлива следующая оценка для скорости сходимости последовательности прямоугольных частных сумм:

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbf{m}}(f, \vec{p}) &:= \sum_{\mathbf{n} \in \square_{\mathbf{m}}} f_{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}(\vec{p}), \quad \mu = \mu(\mathbf{m}) := \min_k m_k, \\
 |S(f, \vec{p}) - S_{\mathbf{m}}(f, \vec{p})| &\ll^{r,d} \min\left(1, \max_{1 \leq k \leq d} p_{*k}^{-\rho}(\mu)\right). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Случай 3). Здесь $\mathcal{A} = \{1\}$, и нам надо рассмотреть простую дискретную тригонометрическую сумму

$$S(f, p) = S(f, \{1\}, p) := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n A_n(p).$$

Как и выше, применяя преобразование Абеля, для частной суммы ряда имеем

$$S_m(f, p) := \sum_{n=1}^m f_n A_n(p) = \sum_{n=1}^m f_n (T_n(p) - T_{n-1}(p)) = f_m T_m(p) + \sum_{n=1}^{m-1} T_n(p) \Delta f_n.$$

Поэтому, в силу теоремы 2 и оценки а) из (4) в этом случае нам надо доказать, что если f – медленная последовательность, то

$$\sup_{p \in \mathcal{S}^r} \sum_{n=1}^{\infty} |T_n(p) \Delta f_n| < \infty. \tag{17}$$

Хотя доказательство этого утверждения по сути такое же, как и доказательство оценки а) из (4) в статье [4], мы воспроизведем здесь наиболее существенные детали.

Эти детали потребуются для полного доказательства нашей теоремы и, вероятно, будут полезны для читателя.

Дадим сначала общее описание конструкции. Для данного многочлена $p \in \mathcal{P}^r$ область суммирования $\mathbb{N}$ разбивается на два непересекающихся множества. Каждое из этих множеств является объединением попарно непересекающихся интервалов натуральных чисел:

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_1(p) \cup \mathbb{N}_2(p),$$

$$\mathbb{N}_1(p) = \bigcup_{j \geq 1} [\mu_j, \nu_j], \quad \mathbb{N}_2(p) = \bigcup_{j \geq 1} (\nu_j, \mu_{j+1}), \quad \mu_j = \mu_j(p), \quad \nu_j = \nu_j(p). \quad (18)$$

Это разбиение производится в соответствии с арифметическими свойствами вектора коэффициентов $\mathbf{x}$ многочлена $p/(2\pi) = P(\mathbf{x}, \cdot)$. А именно, разбиение зависит от аппроксимации $\mathbf{x}$ векторами с рациональными координатами. Для $n \in [\mu_j, \nu_j]$ точка $\mathbf{x}$ находится вблизи к рациональной точке $\mathbf{y}_j$ с “относительно малым знаменателем”. Здесь для тригонометрических сумм T_n, A_n выполнены *асимптотические формулы*:

$$T_n(p) = \sigma_j I_n(\tilde{p}_j) + \varepsilon_n, \quad A_n(p) = \sigma_j B_n(\tilde{p}_j) + (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}), \quad n \in [\mu_j, \nu_j],$$

$$\sigma_j = \sigma_j(\mathbf{x}), \quad \sum_j |\sigma_j| \stackrel{r}{\ll} 1, \quad \tilde{p}_j \in \mathcal{P}^r, \quad \varepsilon_n \stackrel{r}{\ll} n^{-\alpha}, \quad \alpha = \alpha(r) > 0. \quad (19)$$

Напротив, если $n \in \mathbb{N}_2(p)$, то $\mathbf{x}$ держится в стороне от рациональных векторов с малыми знаменателями. Для таких n выполнены оценки

$$T_n(p) = \varepsilon_n, \quad A_n(p) = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}, \quad |\varepsilon_n| \stackrel{r}{\ll} n^{-\beta}, \quad \beta = \beta(r) > 0. \quad (20)$$

Допустим, что такая конструкция осуществима. Тогда мы оценим сумму (17), используя (19) и (20), следующим образом:

$$\sum_{n \in [\mu_j, \nu_j]} |I_n(\tilde{p}_j) \Delta f_n| \leq \sup_{\tilde{p} \in \mathcal{P}^r} \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n(\tilde{p}) \Delta f_n| \stackrel{r}{\ll} 1;$$

$$\begin{aligned} \sum_n |T_n(p) \Delta f_n| &= \sum_{n \in \mathbb{N}_1} |T_n(p) \Delta f_n| + \sum_{n \in \mathbb{N}_2} |T_n(p) \Delta f_n| \\ &\stackrel{r}{\ll} \sum_j |\sigma_j| \sum_{n \in [\mu_j, \nu_j]} |I_n(\tilde{p}_j) \Delta f_n| + \sum_n (n^{-\alpha} + n^{-\beta}) \Delta f_n \\ &\stackrel{r, \alpha, \beta}{\ll} \sum_j |\sigma_j| + 1 \stackrel{r, \alpha, \beta}{\ll} 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Для конкретной реализации такого построения мы воспользуемся круговым методом Харди–Литтлвуда–Виноградова. Этот метод создан для получения асимптотических формул и оценок тригонометрических сумм Вейля

$$E_n(p) = E_n(\mathbf{x}) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e^{ip(t)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e^{2\pi i P(\mathbf{x}, t)}.$$

Если одна из координат $x_1, \dots, x_r$ вектора $\mathbf{x}$ – иррациональное число, то согласно теореме Вейля [14]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(p) = 0.$$

Для рациональной точки $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^r / \mathbb{N}$ обозначим $Q = Q(\mathbf{y})$ наименьшее общее кратное знаменателей координат в несократимом представлении и перепишем $\mathbf{y}$ в виде $\mathbf{y} = \mathbf{a}/Q$:

$$\mathbf{y} = \left(\frac{b_1}{q_1}, \dots, \frac{b_r}{q_r} \right) \in \mathbb{Z}^r / \mathbb{N}^r, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{N}^r, \quad (b_s, q_s) = 1,$$

$$Q = Q(\mathbf{y}) := [q_1, \dots, q_r], \quad \mathbf{y} = \left(\frac{a_1}{Q}, \dots, \frac{a_r}{Q} \right) = \frac{\mathbf{a}}{Q}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^r, \quad Q \in \mathbb{N}.$$

Для такого рационального $\mathbf{y}$ обозначим через $\sigma(\mathbf{y})$ соответствующую (нормированную) полную рациональную тригонометрическую сумму (сумму Гаусса высшего порядка), т.е.

$$\sigma(\mathbf{y}) := \frac{1}{Q} \sum_{n=1}^Q e^{2\pi i P(\mathbf{y}, n)} = \frac{1}{Q} \sum_{n=1}^Q e^{2\pi i (a_1 n + \dots + a_r n^r) / Q}, \quad Q = Q(\mathbf{y}).$$

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(p) = E_Q(p) = \sigma(\mathbf{y}), \quad p = 2\pi P(\mathbf{y}, \cdot),$$

и для $\sigma(\mathbf{y})$ выполнены оценки Хуа Ло Гена (доказательство см. [15], [16])

$$|\sigma(\mathbf{y})| \ll_r Q^{-\rho}(\mathbf{y}), \quad \rho = \frac{1}{r}. \quad (22)$$

Как и в работе [4], мы воспользуемся результатами Архипова [17] в круговом методе. Соответственно, пространство $\mathbb{R}^r$ разбивается для данного натурального n на два множества $\mathbb{R}^r = \mathcal{E}_n \cup \mathcal{F}_n$. Вектор коэффициентов $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ многочлена $p = P(\mathbf{x}, \cdot) / (2\pi) \in \mathcal{P}^r$ принадлежит $\mathcal{E}_n$ (или *большой дуге*), если в малой прямоугольной окрестности $\mathbf{x}$ находится рациональная точка $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ с малым знаменателем $Q(\mathbf{y})$:

$$\max_{1 \leq s \leq r} n^s |x_s - y_s| = \max_{1 \leq s \leq r} n^s \left| x_s - \frac{a_s}{Q} \right| \leq n^{0.3}, \quad Q = Q(\mathbf{y}) \leq n^{0.3}. \quad (23)$$

Все $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$, которые не обладают этим свойством, по определению составляют множество $\mathcal{F}_n$ (или *малую дугу*).

Необходимые элементы конструкции (18)–(20) содержатся в следующих утверждениях.

ЛЕММА 2 (Архипов [17, леммы 7 и 6]). 1) Если $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$ и $\mathbf{y}$ – рациональная точка, удовлетворяющая (23), $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$, то

$$E_n(p) = \sigma(\mathbf{y}) \frac{1}{n} \int_0^n e^{i\tilde{p}(t)} dt + \varepsilon, \quad \tilde{p} := 2\pi P(\mathbf{z}, \cdot), \quad |\varepsilon| \leq 9rQn^{-1} \ll_r n^{-0.7}. \quad (24)$$

2) Если $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_n$, то

$$|E_n(p)| \ll_r n^{-\beta}, \quad \beta \geq \frac{8r^2}{\ln r + 1.5 \ln \ln r + 4.2}. \quad (25)$$

Далее, очевидно, что

$$p(-t) = 2\pi \sum_{s=1}^r (-1)^s x_s t^s = 2\pi P(\mathbf{x}', t), \quad \mathbf{x}' := (-x_1, \dots, (-1)^r x_r),$$

и отметим, что выполнены следующие соотношения, важные для оценок дискретных сумм:

$$\sigma(\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{y}'), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{Z}^r / \mathbb{N}^r, \quad \mathbf{y}' := (-y_1, \dots, (-1)^r y_r).$$

Поэтому, следующее утверждение является следствием из леммы 2.

ЛЕММА 3. 1) Если $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$, а $\mathbf{y}$ — рациональная точка, удовлетворяющая (23), $\tilde{p} := 2\pi P(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \cdot)$, то

$$T_n(p) = \sigma(\mathbf{y}) I_n(\tilde{p}) + \varepsilon_n, \quad |\varepsilon_n| \stackrel{r}{\ll} n^{-\alpha}, \quad \alpha = 0.7. \quad (26)$$

2) Если $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_n$, то (см. также (25))

$$|T_n(p)| \stackrel{r}{\ll} n^{-\beta}. \quad (27)$$

ЛЕММА 4 [4]. Если $n > n_0 := 1024$, то для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$ рациональная точка $\mathbf{y} = \mathbf{a}/Q$ с условием (23) является единственной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, допустим противное. Тогда найдется другая рациональная точка $\mathbf{y}' = \mathbf{a}'/Q' \neq \mathbf{a}/Q$ такая, что

$$\max \left(Q', \max_{1 \leq s \leq r} n^s \left| x_s - \frac{a'_s}{Q'} \right| \right) \leq n^{0.3}.$$

Поскольку $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}'$, то найдется $s \in [1, r]$, для которого $a_s/Q \neq a'_s/Q'$, так что

$$\frac{1}{QQ'} \leq \left| \frac{a_s}{Q} - \frac{a'_s}{Q'} \right| \leq 2n^{0.3-s} \leq 2n^{-0.7}, \quad \max(Q, Q') \leq n^{0.3}.$$

Если $n > 1024$, то последние две оценки противоречат друг другу. Это доказывает единственность $\mathbf{y}$ для $n > n_0$.

Зафиксируем многочлен $p = 2\pi P(\mathbf{x}, \cdot) \in \mathcal{P}^r$. По мере возрастания $n \geq n_0$, точка $\mathbf{x}$ поочередно пребывает то в $\mathcal{E}_n$, то в $\mathcal{F}_n$. Соответственно этому, мы разбиваем $\mathbb{N}$ на два подмножества

$$\mathbb{N}_1(p) := \{n \geq n_0, \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n\}, \quad \mathbb{N}_2(p) := [1, n_0] \cup \{n \geq n_0, \mathbf{x} \in \mathcal{F}_n\}. \quad (28)$$

Рассмотрим набор различных рациональных точек $\mathcal{Y}(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots\}$ в $\mathbb{R}^r$, которые последовательно являются, по мере возрастания n , рациональными аппроксимантами $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x}$ в соответствии с (23). Таким образом, $\mathbb{N}_1(p)$ есть объединение непересекающихся интервалов натуральных чисел $[\mu_j, \nu_j](p)$:

$$\mathbb{N}_1(p) = \bigcup_{j \geq 1} [\mu_j, \nu_j](p), \quad [\mu_j, \nu_j](p) := \left\{ n \geq n_0, \mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_j = \frac{\mathbf{a}_j}{Q_j} \right\}. \quad (29)$$

Соответственно, пусть $\mathbb{N}_2(p) = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1(p)$.

ЛЕММА 5 (см. также [4, лемма 3]). Каждая пара последовательных интервалов $[\mu_j, \nu_j]$, $[\mu_{j+1}, \nu_{j+1}]$ в (29) “широко разнесена”, а знаменатели Q_j “быстро возрастают”:

$$\mu_{j+1} \geq (0.5)^{10/3} \nu_j^{4/3}, \quad Q_{j+1} \geq 0.5 Q_j^{4/3}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 4. Поскольку $\mathbf{y}_j \neq \mathbf{y}_{j+1}$, то найдется такое $s \in [1, r]$, что

$$\frac{1}{Q_j Q_{j+1}} \leq \left| \frac{a_{s,j}}{Q_j} - \frac{a_{s,j+1}}{Q_{j+1}} \right| \leq \nu_j^{-0.7} + \nu_{j+1}^{-0.7} \leq 2\nu_j^{-0.7}.$$

Поэтому $(\mu_j \mu_{j+1})^{0.3} \geq Q_j Q_{j+1} \geq 0.5 \nu_j^{0.7}$, так как $Q_j \leq \mu_j^{0.3}$, $Q_{j+1} \leq \mu_{j+1}^{0.3}$, что и завершает доказательство оценок (30).

Мы заключаем, что асимптотические формулы (19) и оценки (20) справедливы с $\sigma_j = \sigma(\mathbf{y}_j)$ и в виду (30), (22)

$$\sum_j |\sigma_j| \ll \sum_j Q_j^{-\rho} \ll 1.$$

Это завершает рассмотрение случая 3).

В отношении скорости сходимости последовательности частных сумм $S_m(f, p)$ в этом случае скажем, что ситуация, естественно, более сложная, чем в предыдущих случаях, см. (16) и (10). Скорость зависит от арифметических свойств вектора коэффициентов $\mathbf{x}$. Для положительного числа ε в ε -окрестности точки $\mathbf{x}$ найдем рациональный вектор $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ с наименьшим знаменателем $Q(\mathbf{y})$ и обозначим этот знаменатель через $Q(p, \varepsilon)$. Ясно, что $Q(p, \varepsilon) \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда из приведенной выше конструкции вытекает, что

$$|S(f, p) - S_m(f, p)| \ll Q^{-\rho}(p, m^{-0.3}) + m^{-\beta}.$$

Подробности см. в [9].

Случай 4). Опять временно предположим, что последовательность $f = \{f_{\mathbf{n}}\}$ имеет компактный носитель и докажем оценку (5). Мы воспользуемся индукцией по числу элементов $a := \#\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ и главной идеей Теляковского, т.е. разбиением области суммирования на полиномиальные октанты.

Если $a = 0$, т.е. $\mathcal{A} = \emptyset$, утверждение (5) верно в силу уже рассмотренного случая 2). Заметим, что если мы рассмотрим $A_n(p) = T_n(p) - T_{n-1}(p)$ как функцию коэффициентов многочлена p для фиксированного n , то эта функция периодична по каждой из этих переменных и период $= 2\pi$. Поэтому мы можем, не теряя общности, предположить, что коэффициенты многочлена p_k в $A_n(p_k)$ не превосходят π по абсолютной величине.

Согласно принципу индукции предположим

$$\sup_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{r,d}} |S(f, \mathcal{A}, \vec{p})| \stackrel{r,d}{\ll} 1, \quad \#\mathcal{A} = a, \quad (31)$$

и выведем из этого предположения границу для сумм по октантам ω_m , $m \in \mathbb{N}$, см. (11):

$$S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p}) := \sum_{\mathbf{n} \in \omega_m} f_{\mathbf{n}} C_{\mathbf{n}}(\mathcal{A}, \vec{p}), \quad \#\mathcal{A} = a + 1.$$

Перепишем эти суммы, как и в [14]:

$$S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p}) = \sum_{\mathbf{n}^1 \in \omega_m^{d-1}} C_{\mathbf{n}^1}(\vec{p}) D_{\mathbf{n}^1}(f, \mathcal{A}, p), \quad (32)$$

где

$$C_{\mathbf{n}^1}(\mathcal{A}, \vec{p}) := \prod_{k=2}^d C_{n_k}(\mathcal{A}, p_k), \quad D_{\mathbf{n}^1}(f, \mathcal{A}, p) := \sum_{n: p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)} f_{\mathbf{n}} C_n(\mathcal{A}, p).$$

В силу (6) мы можем оценить произведение $C_{\mathbf{n}^1}(\mathcal{A}, \vec{p})$ тривиально, см. также (13):

$$|C_{\mathbf{n}^1}(\mathcal{A}, \vec{p})| \ll \prod_{k=2}^d \frac{\min(1, p_{*k}(n_k))}{n_k} = \Pi_{\mathbf{n}^1}(\vec{p}). \quad (33)$$

Что касается сумм $D_{\mathbf{n}^1}(f, p)$, то тут есть две возможности.

(i) $1 \notin \mathcal{A}$, так что $C_n(\mathcal{A}, p) = B_n(p)$. В этом случае мы оцениваем $D_{\mathbf{n}^1}(f, p)$ и $S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p})$ с помощью (33), (15), не используя предположения индукции (31):

$$\begin{aligned} |D_{\mathbf{n}^1}(f, \mathcal{A}, p)| &= \left| \sum_{n: p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)} f_{\mathbf{n}} B_n(p) \right| \ll^r \min(1, p_{*2}^{-\rho}(n_2)), \\ |S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p})| &\ll^{r,d} \sum_{\mathbf{n}^1 \in \omega_m^{d-1}} \Pi_{\mathbf{n}^1}(\vec{p}) \min(1, p_{*2}^{-\rho}(n_2)) \ll^{r,d} \min(1, p_{*d}^{-\rho}(m)). \end{aligned} \quad (34)$$

(ii) $1 \in \mathcal{A}$, так что $C_n(\mathcal{A}, p) = A_n(p)$ и

$$D_{\mathbf{n}^1}(f, \mathcal{A}, p) = \sum_{n: p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)} f_{\mathbf{n}} A_n(p) = \sum_{n: p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)} f_{\mathbf{n}} (T_n(p) - T_{n-1}(p)). \quad (35)$$

Здесь нам потребуется воспользоваться предположением, что коэффициенты многочлена p не превосходят π по абсолютной величине. Соответственно, из условия $p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)$ вытекает

$$n \gg p_{*2}^{\rho}(n_2), \quad n^{-\beta} \ll \min(1, p_{*2}^{-\gamma}(n_2)), \quad \gamma := \rho\beta. \quad (36)$$

Рассмотрим числовую последовательность $\{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющую оценке $|\varepsilon_n| \ll n^{-\beta}$, а также последовательность $f = \{f_n\} \in \mathcal{S}$, $\|f\|_{\mathcal{S}} \leq 1$. Применяя преобразование Абеля (см. также (8)), мы видим, что

$$\left| \sum_{n \geq m} f_n (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \right| = \left| \varepsilon_{m-1} f_m - \sum_{n \geq m} \varepsilon_n \Delta f_n \right| \ll^{\beta} m^{-\beta},$$

и поэтому из (36) следует, что

$$\left| \sum_{n: p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)} f_{\mathbf{n}} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \right| \ll \min(1, p_{*2}^{-\gamma}(n_2))$$

Отсюда, рассуждая в точности так же, как и выше, мы получаем

$$\left| \sum_{\mathbf{n}^1 \in \omega_m^{d-1}} C_{\mathbf{n}^1}(\mathcal{A}, \vec{p}) \left(\sum_{n: p_*(n) \geq p_{*2}(n_2)} f_{\mathbf{n}}(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \right) \right| \\ \ll_{r,d} \sum_{\mathbf{n}^1 \in \omega_m^{d-1}} \Pi_{\mathbf{n}^1}(\vec{p}) \min(1, p_{*2}^{-\gamma}(n_2)) \ll_{r,d} \min(1, p_{*d}^{-\gamma}(m)).$$

С помощью этой оценки мы “выметаем” суммирование остаточных членов ε_n асимптотических формул (26), а также суммирование по $n \in \mathbb{N}_2(p)$. С точностью до равномерно ограниченной ошибки суммирование по n локализуется на главные члены асимптотических формул на множестве $\mathbb{N}_1(p) = \bigcup_j [\mu_j, \nu_j](p)$. Из (26), (27) мы видим, что

$$\left| S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p}) - \sum_j \sigma_j S(f^{(j,m)}, \vec{p}'_j) \right| \ll_{r,d} \min(1, p_{*d}^{-\gamma}(m)), \quad (37)$$

где

$$\vec{p}'_j = (\tilde{p}_j, p_2, \dots, p_d), \quad S(f^{(j,m)}, \vec{p}'_j) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} f_{\mathbf{n}}^{(j,m)} B_n(\tilde{p}_j) C_{\mathbf{n}^1}(\vec{p}), \\ f_{\mathbf{n}}^{(j,m)} := \begin{cases} f_{\mathbf{n}} & \text{для } \mathbf{n} \in \omega_m, n \in [\mu_j, \nu_j](p), \\ 0 & \text{для всех остальных } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d. \end{cases}$$

Для любой фиксированной пары $m, j \in \mathbb{N}$ множество $\{\mathbf{n} : \mathbf{n} \in \omega_m, n \in [\mu_j, \nu_j](p)\}$ координатно выпуклое (возможно пустое), так что последовательность $f_{\mathbf{n}}^{(j,m)} := \{f_{\mathbf{n}}^{(j,m)}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$ координатно медленная и при этом $\|f^{(j,m)}\|_{\mathcal{S}^d} \leq 2\|f\|_{\mathcal{S}^d} \leq 2$. Далее, общее число сомножителей типа A в произведении $B \prod_{k=2}^d C$ на единицу меньше, чем в исходном произведении $\prod_{k=1}^d C$. Поэтому, пользуясь предположением индукции (31), мы видим, что

$$|S(f^{(j,m)}, \vec{p}'_j)| \ll_{r,d} 1. \quad (38)$$

Поскольку также $\sum_j |\sigma_j| \stackrel{r}{\ll} 1$, то из (37) следует, что

$$|S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p})| \ll_{r,d} 1, \quad \#\mathcal{A} = a + 1.$$

Отсюда вытекает глобальная ограниченность всей суммы для f с компактным носителем:

$$\sup_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{r,d}} |S(f, \mathcal{A}, \vec{p})| < \infty.$$

В завершение докажем сходимость ряда $S(f, \mathcal{A}, \vec{p})$ для медленных последовательностей f , не имеющих компактного носителя. С этой целью достаточно установить, что для любого фиксированного набора многочленов $\vec{p} \in \mathcal{P}^{r,d}$

$$\sup_{f \in \mathcal{S}_0^d} |S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p})| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

где $\mathcal{S}_0^d$ обозначает множество всех медленных последовательностей с компактным носителем. Мы можем считать, что ни один из многочленов p_k не равен нулю тождественно, так что правые части (34) (случай (i)) и (37) (случай (ii)) равномерно малы на $\mathcal{S}_0^d$. В частности, мы можем ограничиться рассмотрением случая (ii).

Предположим, что одна из координат вектора коэффициентов $\mathbf{x}$ многочлена $P(\mathbf{x}, \cdot) = p(\cdot)/(2\pi)$ есть иррациональное число. Тогда для любого фиксированного j множество $\{\mathbf{n} \in \omega_m, n \in [\mu_j, \nu_j](p)\}$ пустое для всех достаточно больших m , так что

$$f^{(j,m)} \equiv 0, \quad m \geq M(j).$$

В самом деле, из условия $\mathbf{n} = (n, n_2, \dots, n_d) \in \omega_m$ вытекает, по определению (11) октанта ω_m , что $p_*(n) \geq p_*(m)$. Это противоречит границе $n \leq \nu_j(p)$, если m достаточно большое.

Таким образом, существует последовательность $\{J(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$J(m) \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad S(f^{(j,m)}, \vec{p}'_j) = 0, \quad j \leq J(m),$$

и следовательно, в силу (37)

$$S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p}) \stackrel{r,d}{\ll} p_*^{-\gamma}(m) + \left(\sum_{j > J(m)} \sigma_j \right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Наконец, если $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^r/\mathbb{N}$, то множество $\mathbb{N}_1(p) = \bigcup_j [\mu_j, \nu_j]$ завершается полуосью $[\mu_J, \infty)$ и $\tilde{p}_J \equiv 0$, так что для $n \geq \mu_J$ мы попросту имеем $B_n(\tilde{p}_J) \equiv 0$. Следовательно, если m достаточно велико, то $S(f^{(j,m)}, \vec{p}'_j) = 0$ для всех j , и для всех таких m

$$S_{\omega_m}(f, \mathcal{A}, \vec{p}) \stackrel{r,d}{\ll} p_*^{-\gamma}(m),$$

что и завершает доказательство леммы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Теляковский С. А. Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. матем. ж. 1963. Т. 4. № 6. С. 1404–1411.
- [2] Теляковский С. А. Равномерная ограниченность некоторых тригонометрических полиномов многих переменных // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 1. С. 33–39.
- [3] Теляковский С. А., Темляков В. Н. О сходимости рядов Фурье многих переменных ограниченной вариации // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 583–591.
- [4] Архипов Г. И., Осолков К. И. Об одном специальном тригонометрическом ряде и его применениях // Матем. сб. 1987. Т. 134 (176). № 2 (10). С. 147–157.
- [5] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сум в теории чисел. М.: Наука, 1971.
- [6] Stein E., Wainger S. Discrete analogues of singular Radon transforms // Bull. Amer. Math. Soc. 1990. V. 23. P. 537–544.
- [7] Oskolkov K. I. A class of I. M. Vinogradov's series and its applications in harmonic analysis // Progress in Approximation Theory. An International Prospective Proceedings of the International Conference on Approximation Theory held March 19–22, 1990, at the University of South Florida: Springer-Verlag, 1992. P. 353–402.
- [8] Oskolkov K. I. Schrödinger equation and oscillatory Hilbert transforms of second degree // J. Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4. P. 341–356.

- [9] Осколков К. И. Ряды И. М. Виноградова в задаче Коши для уравнения Шрёдингера // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 265–288.
- [10] Zygmund A. Trigonometric series. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.
- [11] Garaev M. Z. On a multiple trigonometric series // Acta Arithm. 2002. V. 102. № 2. P. 183–187.
- [12] Stein E., Wainger S. The estimation of an integral arising in multiplier transformations // Studia Math. 1970. V. 35. P. 101–104.
- [13] Stein E. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.
- [14] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 313–352.
- [15] Jing-run Chen. On Professor Hua's estimate of exponential sum. // Sci. Sinica. 1977. V. 20. P. 711–719.
- [16] Стечкин С. Б. Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Тр. МИАН. 1977. Т. 143. С. 188–207.
- [17] Архипов Г. И. О проблеме Гильберта–Камке // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 1. С. 3–52.

Университет Южной Каролины,
г. Колумбия, США

Поступило
29.01.2003