Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Гирнык, Приближение субгармонической в полуплоскости функции логарифмом модуля аналитической функции, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 483–492

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:00:04

УДК 517.538+517.574

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИИ ЛОГАРИФМОМ МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

М. А. Гирнык

Получено приближение в равномерной метрике вне исключительного множества функции, субгармонической в открытой полуплоскости, логарифмом модуля аналитической в полуплоскости функции для случаев конечного порядка и бесконечного нижнего порядка, а также оценка величины исключительного множества. Показано, что в случае конечного порядка найденная точность приближения существенно не улучшается.

Библиография: 9 названий.

Результаты о приближении субгармонической функции логарифмом модуля аналитической имеют многочисленные приложения в теории распределения значений, так как построить субгармоническую функцию с требуемыми асимптотическими свойствами зачастую значительно проще, чем аналитическую функцию. Главным образом в связи с этим возникает задача приближения элементов более широкого множества субгармонических функций элементами из меньшего множества аналитических функций. Впервые в общем виде в классе субгармонических в плоскости функций конечного порядка эту проблему исследовал Азарин [1]. В 1985 году такое приближение для произвольных субгармонических функций в произвольных областях рассмотрено в статье Юлмухаметова [2], где, в частности, найдена предельно точная аппроксимация для случая плоскости $\mathbb{C}$. Исследования Юлмухаметова продолжены и развиты в разных направлениях рядом авторов (см. обзор в [3], а также недавнюю работу [4]).

Здесь мы изучаем вышеуказанное приближение в равномерной метрике для случая полуплоскости $\mathbb{H} := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, рассматривая функции как конечного, так и бесконечного порядка и оценивая величину исключительного множества. В случае субгармонических в $\mathbb{H}$ функций конечного порядка мы показываем, что существенно уточнить найденную аппроксимацию невозможно.

Используем основные факты и стандартные обозначения теории субгармонических функций [5]. Обозначим через $\mathcal{B}(r, u)$ максимум субгармонической в $\mathbb{H}$ функции $u(z)$ на множестве $\mathcal{D}(r) := \{z : |z - ir/2| \leq r/2, |z| \geq 1\}$, через $n(r, \mu_u)$ меру Рисса μ_u функции $u(z)$ множества $\mathcal{D}(r)$, буквами C с индексами положительные постоянные, в скобках указываем зависимость от параметров. Обозначим через FM множество подмножеств $[1, \infty)$ конечной меры. Определим порядок $\rho[u]$ субгармонической в $\mathbb{H}$ функции u формулой

$$\rho[u] := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{B}(r, u)}{\log r}.$$

Сформулируем результаты нашей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть субгармоническая в $\mathbb{H}_1 := \mathbb{H} \cup \{z : |z| \leq 1\}$ функция u имеет конечный порядок $\rho = \rho[u]$ и число $\alpha > \rho + 2$. Тогда существуют аналитическая в $\mathbb{H}_1$ функция f , постоянная $C_1(\alpha)$ и множество E такие, что выполнено неравенство

$$|u(z) - \log |f(z)|| \leq C_1(\alpha) \left(\log^+ |z| + \log^+ \left(\frac{1}{\operatorname{Im} z} \right) + 1 \right), \quad z \notin E. \quad (1)$$

Исключительное множество E , зависящее от функций u, f и числа α , содержится в объединении кругов $D(z_j, r_j) := \{z : |z - z_j| < r_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, и

$$\sum_{z_j \notin \mathcal{D}(r)} r_j = o(r^{\rho-\alpha}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть субгармоническая в $\mathbb{H}_1$ функция u имеет бесконечный нижний порядок и число $\varepsilon > 0$. Тогда существуют аналитическая в $\mathbb{H}_1$ функция f , постоянная $C_2(\varepsilon)$ и множество E такие, что для всех $z \notin E$ выполнено неравенство

$$|u(z) - \log |f(z)|| \leq C_2(\varepsilon) \left(\log |z| + \log \left(\frac{1}{\operatorname{Im} z} \right) + \log \mathcal{B} \left(\frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}, u \right) \right). \quad (3)$$

Исключительное множество E , зависящее от функций u, f и числа ε , содержится в объединении кругов $D(z_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$, причем $(R = r + 1/\log \mathcal{B}(r, u))$

$$\sum_{z_j \in \mathcal{D}(R) \setminus \mathcal{D}(r)} r_j = o(\mathcal{B}(r, u)^{-\varepsilon}), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin S \in FM. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{a_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, — нули функции f , аналитической в $\mathbb{H}$, и круги $D(a_j, (\operatorname{Im} a_j / |a_j|^2)^{5/2})$ не пересекаются. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\max\{|1/\operatorname{Im} z - \log |f(z)|| : z \in \mathcal{D}(r) \setminus \bigcup_j D(a_j, (\operatorname{Im} a_j / |a_j|^2)^{5/2})\}}{\log r} \geq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Прокомментируем эти формулировки. Условие субгармоничности приближаемой функции также и в круге $\{z : |z| \leq 1\}$ чисто техническое; оно вызвано методом доказательства и в приложениях не обременительно. При доказательстве теоремы 2 используется новый прием, который приводит к улучшению аналогичного известного результата для субгармонических в $\mathbb{C}$ функций бесконечного порядка (см. [6]).

Если субгармоническую в $\mathbb{H}$ функцию $1/\operatorname{Im} z$ приближать аналитической (при этом в продолжении на круг $\{z : |z| \leq 1\}$ нет надобности), то по теореме 1 круги $D(z_j, r_j)$, объединение которых содержит исключительное множество, таковы, что

$$r_j \asymp \left(\frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_j|^2} \right)^3.$$

Теорема 3 утверждает, что даже значительное увеличение исключительного множества не приводит к улучшению приближения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Определим множество точек, (β, s) -нормальных относительно меры μ , условием

$$N(\beta, s, \mu) := \{z : \forall t \in (0, s) \quad (\mu(D(z, t)) \leq \beta t)\}.$$

Будем использовать следующий результат Юлмухаметова [2, с. 275].

ТЕОРЕМА А. Пусть функция u субгармоническая в неограниченной области Ω . Тогда существует аналитическая в Ω функция f , для всех (β, s) -нормальных точек относительно мер μ_u и $\mu_{\log |f|}$ удовлетворяющая неравенству

$$|u(z) - \log |f(z)|| \leq \left| \int_{D(0,2)} \log |z - \xi| d\mu_u(\xi) \right| + C_3 |\log s| + C_4 \log |z| + \beta s (|\log s| + 1) + C_5. \quad (6)$$

При этом постоянные C_3, C_4, C_5 не зависят от области Ω и от функций u, f .

Как отмечает Юлмухаметов [2, с. 275], оценка сверху для функции $\log |f(z)|$, которая получается из (6), выполняется для точек, (β, s) -нормальных только относительно меры μ_u .

Согласно теореме А в условиях теоремы 1 существует аналитическая в $\mathbb{H}_1$ функция f , удовлетворяющая неравенству (1) для всех точек

$$z \in N(\beta, s, \mu_u) \cap N(\beta, s, \mu_{\log |f|}),$$

где

$$\beta := \left(\frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z} \right)^\alpha, \quad s = \beta^{-1}, \quad \alpha > \rho + 2.$$

Переходим к доказательству оценки (2) величины исключительного множества

$$E = \mathbb{H}_1 \setminus (N(\beta, s, \mu_u) \cap N(\beta, s, \mu_{\log |f|})).$$

(Отметим, что доказательство аналогичной оценки для случая плоскости в [1, с. 278–279] не полно.) Положим $\mu = \mu_u + \mu_{\log |f|}$. Далее будет доказано неравенство

$$n(r, \mu) \leq C_6 r^{\rho+1+\varepsilon}. \quad (7)$$

В предположении, что (7) верно, оценим величину исключительного множества E . По определению точки, нормальной относительно меры, каждая точка $z \in E$ является центром круга $D(z, r(z))$ такого, что

$$\mu(D(z, r(z))) \geq \left(\frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z} \right)^\alpha r(z), \quad r(z) \in (0, s). \quad (8)$$

По теореме о покрытии [7, с. 246] из покрытия $\{D(z, r(z))\}$ множества E можно выбрать не более чем счетное подпокрытие $\{D(z_j, r(z_j))\}$ (далее обозначаем $r_j := r(z_j)$), кратность которого не более 6. Обозначим

$$I_n := \{j : z_j \in \mathcal{D}(2^{n+1}) \setminus \mathcal{D}(2^n)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя оценку (8), имеем

$$\sum_{j \in I_n} \mu(D(z_j, r_j)) \geq \sum_{j \in I_n} r_j \left(\frac{|z_j|^2}{\operatorname{Im} z_j} \right)^\alpha \geq \sum_{j \in I_n} r_j \min_j \left(\frac{|z_j|^2}{\operatorname{Im} z_j} \right)^\alpha \geq 2^{n\alpha} \sum_{j \in I_n} r_j. \quad (9)$$

Последнее неравенство в (9) следует из того, что функция $|z|^2 / \operatorname{Im} z = r$ на окружности $\{z : |z - ir/2| = r/2\}$.

С другой стороны, применив оценку (7), мы получаем

$$\sum_{j \in I_n} \mu(D(z_j, r_j)) \leq 6C_6 2^{(\rho+1+\varepsilon)(n+1)}. \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), находим, что

$$\sum_{j \in I_n} r_j \leq 6C_6 2^{\rho+1+\varepsilon} 2^{(\rho+1+\varepsilon-\alpha)n}, \quad (11)$$

а отсюда легко получается оценка (2). Отметим, что из оценки (11) следует, что исключительные круги $D(z_j, r_j)$, для которых $j \in I_n$, не покрывают дуг единичной окружности в $\mathcal{D}(2^{n+1}) \setminus \mathcal{D}(2^n)$, так как сумма длин указанных дуг является числом $\asymp 2^{-n}$, а $\alpha > \rho + 2$. Осталось доказать (7). В этом месте мы используем формулу Левина [8, с. 22, 41], которую для удобства читателей процитируем.

Пусть f — мероморфная в $\mathbb{H}_1$ функция. Обозначим через $n(r, f)$ число полюсов функции f (с учетом их кратностей), принадлежащих $\mathcal{D}(r)$. Положим

$$\mathcal{N}(r, f) := \int_1^{\kappa(r)} \frac{n(t, f)}{t^2} dt, \quad \kappa(r) := \arcsin(r^{-1}).$$

ТЕОРЕМА В. Пусть функция f , не равная тождественно нулю, мероморфна в $\mathbb{H}_1$. Тогда выполнено равенство

$$\mathcal{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \mathcal{N}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \log |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi} + Q(r, f),$$

где

$$\begin{aligned} Q(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \left(\log |f(e^{i\varphi})| (-\sin \varphi) - \left(\sin \varphi - \frac{1}{R} \right) (\log |f(re^{i\varphi})|)'_r \Big|_{r=1} \right) d\varphi \\ &= O(1) \end{aligned}$$

при $r \rightarrow \infty$.

Заметим, что ограниченность $Q(r, f)$ в теореме В следует именно из мероморфности функции f в круге $\{z : |z| \leq 1\}$. Из субгармонического варианта теоремы В получаем (при $\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned} n(r, \mu_u) \frac{r}{4r^2} &\leq n(r, \mu_u) \int_r^{2r} \frac{dt}{t^2} \leq \int_r^{2r} \frac{n(t)}{t^2} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(2r)}^{\pi - \kappa(2r)} u(2re^{i\varphi} \sin \varphi) \frac{d\varphi}{2r \sin^2 \varphi} \\ &\leq \frac{\mathcal{B}(2r, u)}{2\pi} \int_{\kappa(2r)}^{\pi - \kappa(2r)} \frac{d\varphi}{2r \sin^2 \varphi} \leq C_7 r^{\rho+1+\varepsilon}, \end{aligned}$$

а отсюда неравенство

$$n(r, \mu_u) \leq C_8 r^{\rho+1+\varepsilon}. \quad (12)$$

Выше также было использовано определение порядка субгармонической в $\mathbb{H}_1$ функции u . Таким образом, для исключительного множества $E_u := \mathbb{H}_1 \setminus N(\beta, s, \mu_u)$ выполняется (2). Как отмечено после формулировки теоремы А, функция f удовлетворяет оценке сверху

$$\log |f(z)| \leq u(z) + C_1(\alpha) \left(\log^+ |z| + \log^+ \frac{1}{\operatorname{Im} z} \right) \quad (13)$$

вне E_u . Из (12) и доказательства неравенств (9), (10) следует, что для любой точки $z \in \mathbb{H}$ существует окружность $\{w : |w - ir/2| = r/2\}$, где $r/2 \in [|z|^2 / \operatorname{Im} z, |2z|^2 / \operatorname{Im}(2z)]$, все точки которой (β, s) -нормальны относительно меры μ_u и на которой, таким образом, выполняется неравенство (13). Опять применим теорему В и получим

$$\begin{aligned} \frac{n(r, \mu_{\log |f|})}{4r} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(2r)}^{\pi - \kappa(2r)} u(2re^{i\varphi} \sin \varphi) \frac{d\varphi}{2r \sin^2 \varphi} \\ &\leq \left(\mathcal{B}(2r, u) + C_1(\alpha) \left(\log^+(2r) + \log^+ \frac{1}{\kappa(2r)} \right) \right) \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(2r)}^{\pi - \kappa(2r)} \frac{d\varphi}{2r \sin^2 \varphi} \\ &\leq C_9(\alpha) r^{\rho+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (14)$$

Объединяя (12) и (14), получаем (7). Заметим, что при доказательстве соотношения (7) не возникает порочный круг импликаций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Оно в значительной мере похоже на предыдущее доказательство, поэтому будем излагать кратко, отмечая новые моменты. Снова применим теорему А с $\beta = \mathcal{B}(|z|^2 / \operatorname{Im} z, u)^{1+\varepsilon}$, $s = \beta^{-1}$ и отсюда получим (3).

Далее будет показано, что мера $\mu := \mu_u + \mu_{\log |f|}$ удовлетворяет неравенству (при $0 < 3\delta < \varepsilon$)

$$n(r, \mu) \leq C_{10} \mathcal{B}(r, u)^{1+\delta}, \quad r \notin S \in FM. \quad (15)$$

В предположении, что (15) выполнено, докажем, что множество $E = \mathbb{H}_1 \setminus N(\beta, s, \mu)$ является исключительным. Таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что существует не более чем счетное покрытие E кругами $\{D(z_j, r_j)\}$, кратность которого не превышает 6, обладающее следующим свойством:

$$\mu(D(z_j, r_j)) \geq \mathcal{B}\left(\frac{|z_j|^2}{\operatorname{Im} z_j}, u\right)^{1+\varepsilon} r_j. \quad (16)$$

Положим $R = r + (\log \mathcal{B}(r, u))^{-1}$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{z_j \in \mathcal{D}(R) \setminus \mathcal{D}(r)} \mu(D(z_j, r_j)) \geq \sum_{z_j \in \mathcal{D}(R) \setminus \mathcal{D}(r)} \mathcal{B}(r, u)^{1+\varepsilon} r_j. \quad (17)$$

Выше мы применили (16), а также использовали неубывание функции $\mathcal{B}(r, u)$ и то обстоятельство, что при $z_j \in \mathcal{D}(R) \setminus \mathcal{D}(r)$ выполнены неравенства $r \leq |z_j|^2 / \operatorname{Im} z_j \leq R$. Мы будем применять следующий вариант теоремы Бореля–Неванлинны [8, с. 121].

ТЕОРЕМА С. Пусть на $[r_0, \infty)$ задана непрерывная функция $v(r)$, неубывающая, стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow \infty$, и число $\delta > 0$. Тогда для всех $r \geq r_0$, кроме, возможно, множества конечной меры, выполняется

$$v\left(r + \frac{1}{\log v(r)}\right) < v(r)^{1+\delta}.$$

Теперь, учитывая радиусы исключительных кругов и применяя теорему С, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{z_j \in \mathcal{D}(R) \setminus \mathcal{D}(r)} \mu(D(z_j, r_j)) &\leq 6\mu\left(\mathcal{D}\left(R + \frac{1}{\mathcal{B}(R, u)^{1+\varepsilon}}\right)\right) \\ &\leq 6\mu\left(\mathcal{D}\left(R + \frac{1}{\log \mathcal{B}(R, u)}\right)\right) \leq 6C_{10}\mathcal{B}(R, u)^{1+\delta}. \end{aligned} \quad (18)$$

Продолжим оценку (18):

$$\sum_{z_j \in \mathcal{D}(R) \setminus \mathcal{D}(r)} \mu(D(z_j, r_j)) \leq C_{11}\mathcal{B}(r, u)^{(1+\delta)^2} \leq C_{11}\mathcal{B}(r, u)^{1+3\delta}, \quad r \notin S \in FM. \quad (19)$$

Из (17) и (19) следует (4). Осталось доказать (15). Из условия $u(z) \leq \mathcal{B}|z|^2 / \operatorname{Im} z, u$ и теоремы В получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(R)}^{\pi-\kappa(R)} \frac{d\varphi}{R \sin^2 \varphi} \mathcal{B}(R, u) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(R)}^{\pi-\kappa(R)} u(Re^{i\varphi} \sin \varphi) \frac{d\varphi}{R \sin^2 \varphi} \\ &\geq C_{12} \int_r^R \frac{n(t, \mu_u)}{t^2} dt \geq C_{12} n(r, \mu_u) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$n(r, \mu_u) \leq C_{13}\mathcal{B}(r, u)^{1+\delta/2} r^2 \log \mathcal{B}(r, u) \leq \mathcal{B}(r, u)^{1+\delta}, \quad r \notin S \in FM. \quad (20)$$

Подобно доказательству теоремы 1 показываем, что из оценки (20) следует (4) для множества $E_u = \mathbb{H}_1 \setminus N(\beta, s, \mu_u)$. Согласно замечанию к теореме А аналитическая в $\mathbb{H}_1$ функция f , построенная по этой теореме, удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &\leq u(z) + C_2(\varepsilon) \left(\log^+ \mathcal{B}\left(\frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}, u\right) + \log^+ |z| + \log^+ \frac{1}{\operatorname{Im} z} \right) \\ &\leq 2\mathcal{B}\left(\frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}, u\right) + C_2(\varepsilon) \log^+ \frac{|z|}{\operatorname{Im} z}, \quad z \notin E_u. \end{aligned} \quad (21)$$

Из оценки (4) для исключительного множества E_u следует, что для любой точки $z \in \mathbb{H}$, $|z| > 1$, существует окружность

$$\left\{ w : \left| w - \frac{it}{2} \right| = \frac{t}{2} \right\}, \quad t \in [r, R],$$

где $r = |z|^2 / \operatorname{Im} z$, $R = r + (\log \mathcal{B}(r, u))^{-1}$, все точки которой (β, s) -нормальны относительно меры μ_u . Применяя принцип максимума для субгармонических функций и учитывая неубывание $\mathcal{B}(r, u)$, получаем неравенство

$$\log |f(z)| \leq 2\mathcal{B}(R, u) + C_2(\varepsilon) \log^+ \frac{|z|}{\operatorname{Im} z} \leq 2\mathcal{B}(r, u)^{1+\delta/2} + C_2(\varepsilon) \log^+ \frac{|z|}{\operatorname{Im} z}$$

для всех $z \in \mathbb{H}$, кроме $r = |z|^2 / \operatorname{Im} z \in S \in FM$. Снова из теоремы В выводим

$$\begin{aligned} n(r, \mu_{\log |f|}) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t} \right) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(t)}^{\pi - \kappa(t)} u(te^{i\varphi} \sin \varphi) \frac{d\varphi}{t \sin^2 \varphi} \\ &\leq C_{14} \left(2\mathcal{B}(R, u) + C_2(\varepsilon) \log^+ \frac{|z|}{\operatorname{Im} z} \right), \end{aligned}$$

а отсюда и из бесконечности нижнего порядка функции u следует

$$n(r, \mu_{\log |f|}) \leq C_{15} \mathcal{B}(r, u)^{1+\delta}, \quad r \notin S \in FM. \quad (22)$$

Сочетая (20) и (22), имеем (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Отметим, что функция $v(z) = 1/\operatorname{Im} z$ субгармоническая в $\mathbb{H}$ порядка 1 нормального типа. Обозначим через $v_R(z) = 2R + \sqrt{R} - R(R + \sqrt{R}) \operatorname{Im} z$ ее наименьшую гармоническую мажоранту [5, § 2.4] в полосе

$$\left\{ z : \frac{1}{R + \sqrt{R}} \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{R} \right\},$$

т.е. $v(z) = v_R(z)$ на граничных прямых и $v(z) < v_R(z)$ внутри полосы. Оказывается, и это является одним из ключевых моментов доказательства, что

$$\max \left\{ v_R(z) - v(z) : \frac{1}{R + \sqrt{R}} \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{R} \right\} \leq \frac{1}{4}. \quad (23)$$

Соотношение (23) легко проверить стандартными средствами анализа, а чтобы избежать рутинных выкладок, для этого можно употребить один из математических пакетов, например, Maple (см. www.maplesoft.com).

Далее, пусть $f(a) = 0$, $\operatorname{Im} a < 1$. Обозначим через Γ кривую, составленную из дуг окружностей

$$S\left(a, \left(\frac{\operatorname{Im} a}{|a|^2}\right)^{3/2}\right) := \left\{ z : |z - a| = \left(\frac{\operatorname{Im} a}{|a|^2}\right)^{3/2} \right\}$$

и из дуг окружностей

$$S\left(a_n, \left(\frac{\operatorname{Im} a_n}{|a_n|^2}\right)^{5/2}\right) := \left\{ z : |z - a| = \left(\frac{\operatorname{Im} a_n}{|a_n|^2}\right)^{5/2} \right\},$$

пересекающихся с ней, таким образом, чтобы кривая Γ была простой, замкнутой, содержащей внутри точку a и лежащей внутри $S(a, (\operatorname{Im} a / |a|^2)^{3/2})$.

Пусть h_v и $h_{\log|f|}$ – функции, гармонические внутри Γ и равные на Γ соответственно $v(z)$ и $\log|f(z)|$.

Предположим, что утверждение теоремы 3 не верно и при некотором $\sigma_1 < 1/2$ для всех $r > r_0$ выполняется неравенство

$$\max \left\{ |v(z) - \log|f(z)|| : z \in \mathcal{D}(r), |z - a_n| \geq \left(\frac{\operatorname{Im} a_n}{|a_n|^2} \right)^{5/2} \right\} \leq \sigma_1 \log r. \quad (24)$$

Тогда при достаточно малом $\operatorname{Im} a/|a|^2$ для всех точек из $\operatorname{int} \Gamma$ – внутренности Γ – имеем

$$|h_v(z) - v(z)| \leq \frac{1}{4}. \quad (25)$$

Действительно,

$$\operatorname{int} \Gamma \subset \operatorname{int} S \subset \left\{ z : \frac{1}{R + \sqrt{R}} \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{R} \right\}$$

с $R = (2 \operatorname{Im} a)^{-1}$.

Из принципа максимума для гармонических функций следует неравенство (при $\sigma_1 < \sigma_2 < 1/2$)

$$|h_{\log|f|} - h_v(z)| \leq \sigma_2 \log \frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}, \quad z \in \operatorname{int} \Gamma. \quad (26)$$

В самом деле, на Γ оно выполняется по определению функций $h_{\log|f|}$, h_v и (24). Теперь

$$\begin{aligned} |h_{\log|f|}(z) - h_v(z)| &\leq \max \{ |h_{\log|f|}(z) - h_v(z)| : z \in \Gamma \} \\ &= |h_{\log|f|}(z_0) - h_v(z_0)| \leq \sigma_2 \log \frac{|z_0|^2}{\operatorname{Im} z_0}, \quad z_0 \in \Gamma. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства $|z_0|^2 / \operatorname{Im} z_0 \leq 2|z|^2 / \operatorname{Im} z$ получаем (26). Сочетая (24)–(26), получаем оценку

$$\begin{aligned} |h_{\log|f|}(z) - \log|f(z)|| &\leq |h_{\log|f|}(z) - h_v(z)| + |h_v(z) - v(z)| + |v(z) - \log|f(z)|| \\ &\leq \sigma_3 \log \frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}, \quad z \in \operatorname{int} \Gamma, \end{aligned} \quad (27)$$

с $\sigma_1 + \sigma_2 < \sigma_3 < 1$. Согласно формуле Пуассона–Иенсена [5, § 3.7], примененной к $\log|f(z)|$,

$$\log|f(z)| = h_{\log|f|}(z) - \sum_{a_n \in \operatorname{int} \Gamma} g(z, a_n, \operatorname{int} \Gamma),$$

где $g(z, a_n, \operatorname{int} \Gamma)$ – функция Грина области $\operatorname{int} \Gamma$ с полюсом в a_n [5, § 1.5], имеем

$$|h_{\log|f|}(z) - \log|f(z)|| = \left| \sum_{a_n \in \operatorname{int} \Gamma} g(z, a_n, \operatorname{int} \Gamma) \right|. \quad (28)$$

Используя известные свойства функции Грина односвязной области [8, с. 11] и вариационные свойства конформных отображений [9, с. 359], приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |h_{\log |f|}(z) - \log |f(z)|| &\geq g(z, a, \text{int } \Gamma) \\ &\geq g\left(z, a, D\left(a, \left(\frac{\text{Im } a}{|a|^2}\right)^{3/2}\right)\right) = \log \frac{(\text{Im } a/|a|^2)^{3/2}}{|z - a|}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выберем точку z так, что

$$\text{Im } z = \text{Im } a, \quad |z - a| = \left(\frac{\text{Im } a}{|a|^2}\right)^{5/2}, \quad |z| < |a|.$$

Подставив эту точку в (29), мы получим

$$|h_{\log |f|}(z) - \log |f(z)|| \geq \log \frac{|a|^2}{\text{Im } a} > \log \frac{|z|^2}{\text{Im } z},$$

а это противоречит (27).

Обоснуем теперь существование корней a аналитической функции f с каким угодно большим значением $|a|^2 / \text{Im } a$; это утверждение использовалось выше. Считаящая функция $n(r, v)$ субгармонической в $\mathbb{H}$ функции $v(z) = 1 / \text{Im } z$ имеет следующую асимптотику:

$$n(r, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{D}(r)} \Delta v \, dx \, dy \sim \frac{2r^2}{3\pi} + \frac{-6 + 6 \log 2 + 6 \log r}{6\pi} - \frac{5}{96\pi r^4} + O(r^{-6}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Указанная асимптотика найдена с помощью пакета Maple.

Пусть $n(r, \log |f|) = O(1)$, $r \rightarrow \infty$. Запишем формулу Левина

$$\begin{aligned} &\int_1^r \frac{n(t, \log |f|) - n(t, v)}{t^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \frac{\log |f(re^{i\varphi})| - v(re^{i\varphi} \sin \varphi)}{r \sin^2 \varphi} \, d\varphi + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда левая сторона (30) есть $\asymp r$, $r \rightarrow \infty$, а правая согласно (24) равна $O(\log r)$, $r \rightarrow \infty$; получили противоречие.

Выражаю признательность члену-корреспонденту НАН Украины профессору И.В. Островскому за внимание к работе, профессору В.Я. Эйдерману за полезный совет и участникам львовского семинара по комплексному анализу за обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Азарин В. С. О лучах вполне регулярного роста целой функции // Матем. сб. 1969. Т. 79 (121). № 4 (8). С. 463–476.
- [2] Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. V. 11. № 3. P. 257–282.
- [3] Drasin D. Approximation of subharmonic functions with applications // Approximation, Complex Analysis, and Potential Theory. Proc. of the NATO ASI (Montreal, Canada, 3–14 July 2000). Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 163–189.
- [4] Chyzhykov I. Approximation of subharmonic functions of slow growth // Матем. физ., анализ, геом. 2002. Т. 9. № 3. С. 509–520.
- [5] Hayman W. K., Kennedy P. B. Subharmonic Functions. V. 1. London–New York–San Francisco: Academic Press, 1976.
- [6] Гирнык М. А. О приближении субгармонической функции бесконечного порядка логарифмом модуля целой функции // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 4. С. 57–60.
- [7] Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
- [8] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
- [9] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Львовская коммерческая академия, Украина
E-mail: hirnyk@iac.lviv.ua

Поступило
16.01.2004