Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Ильясов, О порядке убывания равномерных модулей
гладкости на классах функций $E_{p,m}[\epsilon]$, *Матем. заметки*,
2005, том 78, выпуск 4, 519–536

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:50:31

УДК 517.51

О ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ РАВНОМЕРНЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ $E_{p,m}[\varepsilon]$

Н. А. Ильясов

В заметке приводится решение задачи о точном порядке убывания равномерных модулей гладкости на классах 2π -периодических функций многих переменных с заданной мажорантой последовательности полных наилучших в метрике L_p приближений, $1 \leq p < \infty$.

Библиография: 16 названий.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_m)$ с нормой $|x| = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m = \{x \in \mathbb{R}^m; -\pi \leq x_i \leq \pi, i = \overline{1, m}\},$$

$L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < \infty$, — пространство всех измеримых 2π -периодических по каждой переменной x_i , $i = \overline{1, m}$, функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$, для которых

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^m)} \equiv \|f\|_{p,m} = \left\{ \pi^{-m} \int_{\mathbb{T}^m} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty,$$

$L_\infty(\mathbb{T}^m) \equiv C(\mathbb{T}^m)$ — соответствующее пространство непрерывных функций,

$$\|f\|_{C(\mathbb{T}^m)} \equiv \|f\|_{\infty,m} = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{T}^m\},$$

$E_{n_1, \dots, n_m}(f)_{p,m}$ — полное наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T}^m)$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка $\leq n_i \in \mathbb{Z}_+$ соответственно по переменной x_i , $i = \overline{1, m}$; $\omega_k(f; \delta)_{p,m}$ — полный модуль гладкости k -го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\omega_k(f; \delta)_{p,m} = \sup\{\|\Delta_h^k f(\cdot)\|_{p,m} : h \in \mathbb{R}^m, |h| \leq \delta\}, \quad \delta > 0,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu h), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

$\mathcal{M}_0$ — класс всех числовых последовательностей $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что $0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$.

Обозначим (при $1 \leq p < \infty$, $\varepsilon \in \mathcal{M}_0$)

$$E_{p,m}[\varepsilon] = \{f \in L_p(\mathbb{T}^m); E_{n-1, \dots, n-1}(f)_{p,m} \leq \varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

В настоящей заметке приводится решение задачи о точном порядке убывания равномерных модулей гладкости k -го порядка функций из классов $E_{p,m}[\varepsilon]$, где $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Отметим, что в случае $m = 1$ решение этой задачи приведено автором в [1].

ТЕОРЕМА. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathcal{M}_0$, $d = \pi m^{1/2}$ и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \varepsilon_n < \infty. \quad (1)$$

Тогда

$$\sup \left\{ \omega_k \left(\psi; \frac{d}{n} \right)_{\infty, m} ; f \in E_{p, m}[\varepsilon] \right\} \\ \underset{(k, m, p)}{\asymp} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} \varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} \varepsilon_{\nu}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где ψ обозначает соответствующую функцию из $C(\mathbb{T}^m)$, эквивалентную $f \in E_{p, m}[\varepsilon]$, что обеспечивается условием (1). (Здесь $\alpha_n \underset{(k, m, p)}{\asymp} \beta_n$ обозначает существование таких постоянных $0 < C_1 \leq C_2$, зависящих лишь от указанных параметров k, m и p , что $C_1 \cdot \beta_n \leq \alpha_n \leq C_2 \cdot \beta_n$.)

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $k \in \mathbb{N}$ и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} E_{n-1, \dots, n-1}(f)_{p, m} < \infty. \quad (3)$$

Тогда f эквивалентна (в смысле m -мерной меры Лебега) некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива оценка

$$\omega_k \left(\psi; \frac{d}{n} \right)_{\infty, m} \leq C_1(k, p, m) \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p, m} \right. \\ \left. + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p, m} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 1 в случае $m = 1$ приведено в [2, с. 57] в качестве следствия неравенства (1.8) из теоремы 2 и неравенства (1.7) из следствия 1 (см. [2, с. 56]). Другое доказательство леммы 1 в случае $m = 1$ приведено также в [3, с. 378–379]. Ниже приводится доказательство леммы 1 в случае $m > 1$.

В [4, с. 141] отмечен m -мерный аналог неравенства Конюшкова–Стечкина (при $m = 1$ см. [2, неравенство (1.8), с. 56]), из доказательства (проводимого точно так же, как и в одномерном случае) которого, в частности, следует, что если для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ сходится ряд (3), то f эквивалентна некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива оценка (при $n \in \mathbb{Z}_+$)

$$E_{n, \dots, n}(\psi)_{\infty, m} \leq \|\psi(\cdot) - T_{n; p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty, m} \\ \leq C_2(p, m) \left\{ (n+1)^{m/p} E_{n, \dots, n}(f)_{p, m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} E_{\nu, \dots, \nu}(f)_{p, m} \right\}, \quad (5)$$

где $T_{n;p}^{(m)}(f; x) \equiv T_{n;\dots,n;p}(f; x)$ – тригонометрический полином полного наилучшего в $L_p(\mathbb{T}^m)$ приближения функции f порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ по переменной x_i , $i = \overline{1, m}$:

$$\|f(\cdot) - T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{p,m} = E_{n,\dots,n}(f)_{p,m}.$$

Далее, в силу известных свойств модулей гладкости (см., например, [5, с. 174–178]) при $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, m}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!$ имеем

$$\begin{aligned} \omega_k(\psi; \delta)_{\infty,m} &\leq \omega_k(\psi - T_{n;p}^{(m)}(f); \delta)_{\infty,m} + \omega_k(T_{n;p}^{(m)}(f); \delta)_{\infty,m} \\ &\leq 2^k \|\psi(\cdot) - T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty,m} + \delta^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \|D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty,m} \\ &\leq 2^k \|\psi(\cdot) - T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty,m} + m^k \delta^k \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty,m}. \end{aligned} \quad (6)$$

(Здесь $D^\alpha g(x) = \partial^{|\alpha|} g(x_1, \dots, x_m) / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}$.)

Оценим сверху $\|D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty,m}$ при $|\alpha| = k$ через $\{E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p,m}\}_{\nu=1}^n$, следуя схеме рассуждений Стечкина [6, с. 233–234] (см. также [3, с. 345–346]). Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и определим $l \in \mathbb{N}$ из условий $2^{l-1} \leq n < 2^l$. В силу очевидного представления

$$\begin{aligned} T_{n;p}^{(m)}(f; x) &= T_{0;p}^{(m)}(f; x) + \sum_{\nu=1}^{l-1} \{T_{2^\nu-1;p}^{(m)}(f; x) - T_{2^{\nu-1}-1;p}^{(m)}(f; x)\} \\ &\quad + T_{n;p}^{(m)}(f; x) - T_{2^{l-1}-1;p}^{(m)}(f; x), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; x) &= \sum_{\nu=1}^{l-1} \{D^\alpha T_{2^\nu-1;p}^{(m)}(f; x) - D^\alpha T_{2^{\nu-1}-1;p}^{(m)}(f; x)\} \\ &\quad + D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; x) - D^\alpha T_{2^{l-1}-1;p}^{(m)}(f; x), \end{aligned}$$

откуда в силу m -мерных аналогов неравенства Бернштейна–Рисса–Зигмунда об оценке L_p -норм производных тригонометрических полиномов и неравенства разных метрик Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов (см., например, [3, неравенство (30) на с. 232, неравенство (7) на с. 243, неравенство (18) на с. 246], [5, с. 150, 159]) имеем (при $2^{l-1} \leq n < 2^l$, т.е. $2^{l-1} - 1 < n \leq 2^l - 1$)

$$\begin{aligned} &\|D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty,m} \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{l-1} \|D^\alpha \{T_{2^\nu-1;p}^{(m)}(f; \cdot) - T_{2^{\nu-1}-1;p}^{(m)}(f; \cdot)\}\|_{\infty,m} \\ &\quad + \|D^\alpha \{T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot) - T_{2^{l-1}-1;p}^{(m)}(f; \cdot)\}\|_{\infty,m} \\ &\leq 2^m \sum_{\nu=1}^{l-1} (2^\nu - 1)^{|\alpha|+m/p} \|T_{2^\nu-1;p}^{(m)}(f; \cdot) - T_{2^{\nu-1}-1;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{p,m} \\ &\quad + 2^m n^{|\alpha|+m/p} \|T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot) - T_{2^{l-1}-1;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{p,m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^m \sum_{\nu=1}^{l-1} (2^\nu - 1)^{|\alpha|+m/p} \{E_{2^\nu-1, \dots, 2^\nu-1}(f)_{p,m} + E_{2^{\nu-1}-1, \dots, 2^{\nu-1}-1}(f)_{p,m}\} \\
&\quad + 2^m n^{|\alpha|+m/p} \{E_{n, \dots, n}(f)_{p,m} + E_{2^{l-1}-1, \dots, 2^{l-1}-1}(f)_{p,m}\} \\
&\leq 2^{m+1} \sum_{\nu=1}^{l-1} (2^\nu - 1)^{k+m/p} E_{2^\nu-1, \dots, 2^{\nu-1}-1}(f)_{p,m} \\
&\quad + 2^{m+1} (2^l - 1)^{k+m/p} E_{2^{l-1}-1, \dots, 2^{l-1}-1}(f)_{p,m} \\
&= 2^{m+1} \sum_{\nu=1}^l (2^\nu - 1)^{k+m/p} E_{2^\nu-1, \dots, 2^{\nu-1}-1}(f)_{p,m} \\
&= 2^{m+1} \left\{ E_{0, \dots, 0}(f)_{p,m} + \sum_{\nu=2}^l (2^\nu - 1)^{k+m/p} E_{2^\nu-1, \dots, 2^{\nu-1}-1}(f)_{p,m} \right\} \\
&\leq 2^{m+1} \left\{ E_{0, \dots, 0}(f)_{p,m} + C_3(k, p, m) \sum_{\nu=2}^l \sum_{\mu=2^{\nu-2}}^{2^{\nu-1}-1} \mu^{k+m/p-1} E_{\mu, \dots, \mu}(f)_{p,m} \right\} \\
&= 2^{m+1} \left\{ E_{0, \dots, 0}(f)_{p,m} + C_3(k, p, m) \sum_{\mu=1}^{2^{l-1}-1} \mu^{k+m/p-1} E_{\mu, \dots, \mu}(f)_{p,m} \right\} \\
&\leq C_4(k, p, m) \sum_{\mu=1}^n \mu^{k+m/p-1} E_{\mu-1, \dots, \mu-1}(f)_{p,m},
\end{aligned}$$

где $C_3(k, p, m) = (2^{k+m/p} - 1)^{-1} (k + m/p) 6^{k+m/p}$, $C_4(k, p, m) = 2^{m+1} C_3(k, p, m)$, и, следовательно,

$$\max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty, m} \leq C_4(k, p, m) \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p,m}. \quad (7)$$

Учитывая теперь оценки (5) и (7) в неравенстве (6) (положим $\delta = d/n$), получим

$$\begin{aligned}
\omega_k\left(\psi; \frac{d}{n}\right)_{\infty, m} &\leq 2^k \|\psi(\cdot) - T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty, m} + m^k d^k n^{-k} \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{\infty, m} \\
&\leq 2^k C_2(p, m) \left\{ (n+1)^{m/p} E_{n, \dots, n}(f)_{p,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} E_{\nu, \dots, \nu}(f)_{p,m} \right\} \\
&\quad + m^k d^k C_4(k, p, m) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p,m} \\
&\leq 2^k C_2(p, m) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p,m} \\
&\quad + C_5(k, p, m) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p,m},
\end{aligned}$$

где $C_5(k, p, m) = 2^{k+m/p} (k + m/p) C_2(p, m) + m^k d^k C_4(k, p, m)$.

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $g \in C(\mathbb{T})$, $g_{\pm}(y) = \{g(y) \pm g(-y)\}/2$ и

$$g(y) \sim \frac{1}{2} a_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(g) \cos ny + b_n(g) \sin ny),$$

где $a_n(g) \geq 0$, $b_n(g) \geq 0$. Тогда

1) справедлива оценка

$$\omega_k\left(g; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} \geq \omega_k\left(g_+; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} \geq C_6(k) \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu}(g), \quad n \in \mathbb{N};$$

2) справедлива оценка

$$\omega_k\left(g; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} \geq \omega_k\left(g_+; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} \geq C_7(k) n^{-\varkappa} \sum_{\nu=1}^n \nu^{\varkappa} a_{\nu}(g), \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\varkappa = k + \frac{[1 - (-1)^k]}{2} = \begin{cases} k, & k \text{ четное,} \\ k + 1, & k \text{ нечетное;} \end{cases}$$

3) справедлива оценка

$$\omega_k\left(g; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} \geq \omega_k\left(g_-; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} \geq C_8(k) n^{-\varkappa} \sum_{\nu=1}^n \nu^{\varkappa} b_{\nu}(g), \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\varkappa = k + \frac{[1 + (-1)^k]}{2} = \begin{cases} k + 1, & k \text{ четное,} \\ k, & k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО неравенств 1)–3) приведено в [7, неравенства (22)–(24), с. 72]. Ранее неравенство 1) и неравенство 2) при четном k для симметрических модулей гладкости другим способом доказаны в [8, с. 84–85], [9].

ЛЕММА 3. Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \in \mathcal{M}_0$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m < p < \infty$, $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$. Тогда последовательность

$$a_n(p; m; \varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{m/p-1} \Delta\varepsilon_{\nu}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

обладает следующими свойствами:

- 1) $0 < a_n(p; m; \varepsilon) \downarrow 0$, $n \uparrow \infty$;
- 2) $a_n(p; m; \varepsilon) \leq n^{m/p-1} \varepsilon_n$;
- 3) $\Delta a_n(p; m; \varepsilon) = a_n(p; m; \varepsilon) - a_{n+1}(p; m; \varepsilon) = n^{m/p-1} \Delta\varepsilon_n$;

4) выполнены оценки

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \sum_{\nu=n}^{\infty} [(\nu+1)^{1-m/p} - \nu^{1-m/p}] a_{\nu+1}(p; m; \varepsilon) + n^{1-m/p} a_n(p; m; \varepsilon), \\ \varepsilon_n &\leq \left(1 - \frac{m}{p}\right) \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-m/p} a_{\nu}(p; m; \varepsilon) + n^{1-m/p} a_n(p; m; \varepsilon);\end{aligned}$$

5) справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p; m; \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \varepsilon_n \leq \frac{p}{m} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(p; m; \varepsilon);$$

6) справедлива оценка

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(p; m; \varepsilon) \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} \varepsilon_{\nu} \leq \frac{p}{m} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(p; m; \varepsilon);$$

7) справедлива оценка

$$\begin{aligned}n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(p; m; \varepsilon) &\leq n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} \varepsilon_{\nu} \\ &\leq \left(2 - \frac{m}{p}\right) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(p; m; \varepsilon) + \left(1 - \frac{m}{p}\right) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(p; m; \varepsilon).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы 3 в случае $m = 1$ приведено автором в [1, с. 55–56], в случае $m > 1$ доказательство проводится аналогично: 1)–3) проверяются непосредственно; равенство в 4) получается применением преобразования Абеля в представлении

$$\varepsilon_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{1-m/p} \Delta a_{\nu}(p; m; \varepsilon)$$

с учетом неравенства 2) и условия $\varepsilon_n \downarrow 0$, $n \uparrow \infty$, а неравенство в 4) следует из полученного равенства в силу оценки $(\nu+1)^{1-m/p} - \nu^{1-m/p} \leq (1-m/p)\nu^{-m/p}$, $\nu = 1, 2, \dots$; левые оценки в 5), 6) и 7) имеют место в силу неравенства 2), а правые оценки в 5), 6) и 7) получаются применением неравенства из 4) с последующим изменением порядков суммирования в образующихся двойных рядах.

ЛЕММА 4. Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \in \mathcal{M}_0$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$. Тогда последовательность

$$a_n(m; \varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{\nu+1}\right) (\nu+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_{\nu}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

обладает следующими свойствами:

- 1) $0 < a_n(m; \varepsilon) \downarrow (n \uparrow)$, при этом $a_n(1; \varepsilon) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и $a_n(m; \varepsilon) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, в случае $m > 1$ при условии сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \varepsilon_n < +\infty$;
- 2) $a_n(m; \varepsilon) \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_\nu$; в частности, $a_n(1; \varepsilon) \leq \varepsilon_n$ при $m = 1$;
- 3) $\Delta a_n(m; \varepsilon) = a_n(m; \varepsilon) - a_{n+1}(m; \varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^{m-2} \Delta \varepsilon_\nu$; в частности,

$$\Delta a_n(m; \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^{-1} \Delta \varepsilon_\nu \leq (n+1)^{-1} \varepsilon_n & \text{при } m = 1, \\ \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_\nu = \varepsilon_n & \text{при } m = 2, \\ \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^{m-2} \Delta \varepsilon_\nu \geq (n+1)^{m-2} \varepsilon_n & \text{при } m > 2; \end{cases}$$

- 4) $\Delta^2 a_n(m; \varepsilon) = \Delta a_n(m; \varepsilon) - \Delta a_{n+1}(m; \varepsilon) = (n+1)^{m-2} \Delta \varepsilon_n$;
- 5) $a_n(m; \varepsilon) + n \Delta a_n(m; \varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_\nu$; в частности,

$$\begin{aligned} a_n(1; \varepsilon) + n \Delta a_n(1; \varepsilon) &= \varepsilon_n & \text{при } m = 1, \\ a_n(m; \varepsilon) + n \Delta a_n(m; \varepsilon) &\geq (n+1)^{m-1} \varepsilon_n & \text{при } m > 1; \end{aligned}$$

- 6) выполнена оценка

$$(m2^{m-1})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m; \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \varepsilon_n \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m; \varepsilon);$$

- 7) выполнена оценка

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1} \varepsilon_\nu \leq 2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu(m; \varepsilon) + n a_{n+1}(m; \varepsilon);$$

- 8) выполнена оценка

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m-1} \varepsilon_\nu \leq (k+2) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_\nu(m; \varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы 4 в случае $m = 1$ приведено в [10] (см. там лемму 1 при $p = 1$), она сформулирована также в [1, лемма 2, с. 54]. Отметим, что последовательность $\{a_n(m; \varepsilon)\}$ в случае $m = 1$ ранее рассматривалась Гейтом [11, с. 24]; там же отмечены свойства 1)–5) этой последовательности $\{a_n(1; \varepsilon)\}$. Приведем доказательство леммы в случае $m > 1$ (случай $m = 1$ также включается в эту схему). Свойства 3)–5) проверяются непосредственно, свойство 2) сразу следует из определения $\{a_n(m; \varepsilon)\}$, а для того чтобы убедиться в справедливости 1), необходимо привлечь свойства 3) и 2) в случае $m = 1$ и свойства 3) и 6) в случае $m > 1$. Докажем теперь свойства 6), 7) и 8).

6) В силу неравенства в 2) при $m \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m; \varepsilon) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} 1 \\
 &\leq 2^{m-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^m \Delta \varepsilon_{\nu} \leq 2^{m-1} m \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} n^{m-1} \\
 &= 2^{m-1} m \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} = m 2^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \varepsilon_n.
 \end{aligned}$$

В силу неравенства в 5) при $m \geq 1$ получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \varepsilon_n &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{m-1} \varepsilon_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m; \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} n \Delta a_n(m; \varepsilon) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m; \varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta a_n(m; \varepsilon) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m; \varepsilon).
 \end{aligned}$$

7) В силу неравенства в 5) имеем (при $m \geq 1$)

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1} \varepsilon_{\nu} &\leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\nu+1)^{m-1} \varepsilon_{\nu} \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(m; \varepsilon) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu \Delta a_{\nu}(m; \varepsilon) \\
 &= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(m; \varepsilon) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta a_{\nu}(m; \varepsilon) \left\{ \sum_{\mu=1}^n 1 + \sum_{\mu=n+1}^{\nu} 1 \right\} \\
 &= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(m; \varepsilon) + n a_{n+1}(m; \varepsilon) + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \Delta a_{\nu}(m; \varepsilon) \\
 &= 2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(m; \varepsilon) + n a_{n+1}(m; \varepsilon).
 \end{aligned}$$

8) В силу неравенства в 5) получим (при $m \geq 1$)

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m-1} \varepsilon_{\nu} &\leq \sum_{\nu=1}^n \nu^k (\nu+1)^{m-1} \varepsilon_{\nu} \leq \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(m; \varepsilon) + \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+1} \Delta a_{\nu}(m; \varepsilon) \\
 &\leq \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(m; \varepsilon) + (k+1) \sum_{\nu=1}^n \Delta a_{\nu}(m; \varepsilon) \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu^k \\
 &= \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(m; \varepsilon) + (k+1) \sum_{\mu=1}^n \mu^k \sum_{\nu=\mu}^n \Delta a_{\nu}(m; \varepsilon) \\
 &\leq (k+2) \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(m; \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Определим теперь функции $G(x; p; m; \varepsilon) \in L_p(\mathbb{T}^m)$, используемые при доказательстве оценок снизу в (2). Положим при $p = 1$

$$G(x; 1; m; \varepsilon) = G_1(x; m; \varepsilon) + G_2(x; m; \varepsilon),$$

где

$$G_1(x; m; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n F_n(x_1) \prod_{i=2}^m F_n(x_i), \quad G_2(x; m; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \Phi_n(x_1) \prod_{i=2}^m F_n(x_i),$$

$F_n(y) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^n (1 - \nu/(n+1)) \cos \nu y$ — ядро Фейера порядка $(n+1) \in \mathbb{N}$, $\Phi_n(y)$ — полином (см. [12, с. 896])

$$\sin((l+1)y)F_l(y) = \sum_{\nu=1}^{l+1} \frac{\nu}{2(l+1)} \sin \nu y + \sum_{\nu=l+2}^{2l+1} \left(1 - \frac{\nu}{2(l+1)}\right) \sin \nu y, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in \mathbb{R},$$

в котором $l \equiv [(n+1)/2] - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $[t]$ — целая часть числа t . Отметим, что приведенные функции $G_i(x; m; \varepsilon)$, $i = 1, 2$, в случае $m = 1$ ранее применялись Гейтом в [11, с. 24–26] и были использованы автором [1, с. 57–59] для получения оценки снизу в (2) при $p = m = 1$. Полагаем при $p > 1$ (в случае $m = 1$ указанная функция рассмотрена в заметке автора [1, с. 59]; $\beta_n(y) = \cos ny + \sin ny$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} G(x; p; m; \varepsilon) &\equiv G_3(x; p; m; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{m(1/p-1)} \Delta \varepsilon_n \prod_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu}(x_i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x_1) \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{m(1/p-1)} \Delta \varepsilon_n \prod_{i=2}^m \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j(x_i), \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{T}^m. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \in \mathcal{M}_0$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда функции $G(x; p; m; \varepsilon)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $G \in L_p(\mathbb{T}^m)$ и $E_{n-1, \dots, n-1}(G)_{p, m} \leq C_9(p, m) \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$;
- 2) имеет место эквивалентность

$$G \in C(\mathbb{T}^m) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \varepsilon_n < \infty,$$

при этом

$$C_{10}(p, m) \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \varepsilon_n \leq \|G(\cdot; p; m; \varepsilon)\|_{\infty, m} \leq C_{11}(p, m) \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \varepsilon_n;$$

- 3) если ряд в правой части 2) сходится, то

$$\Omega(p, m, k; \varepsilon) \equiv \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} \varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} \varepsilon_{\nu} \leq C_{12}(k, p, m) \omega_k\left(G; \frac{d}{n}\right)_{\infty, m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = 1$. В силу известного равенства (см., например, [12, с. 138]) $\|F_n(\cdot)\|_{1,1} = 1$ имеем оценку $\|\Phi_n(\cdot)\|_{1,1} \leq 1$. Отсюда, учитывая, что $F_n(y)$ – полином степени $n \in \mathbb{N}$, а $\Phi_n(y)$ – полином степени $2l + 1 \equiv 2[(n + 1)/2] - 1 \leq n \in \mathbb{N}$, получим

$$\begin{aligned} \|G(\cdot; 1; m; \varepsilon)\|_{1,m} &\leq \|G_1(\cdot; m; \varepsilon)\|_{1,m} + \|G_2(\cdot; m; \varepsilon)\|_{1,m} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \{ \|F_n(x_1)\|_{1,1} + \|\Phi_n(x_1)\|_{1,1} \} \left\| \prod_{i=2}^m F_n(x_i) \right\|_{1,m-1} \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n = 2\varepsilon_1, \\ E_{n-1, \dots, n-1}(G)_{1,m} &\leq \left\| \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} \{ F_{\nu}(x_1) + \Phi_{\nu}(x_1) \} \prod_{i=2}^m F_{\nu}(x_i) \right\|_{1,m} \\ &\leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} \{ \|F_{\nu}(x_1)\|_{1,1} + \|\Phi_{\nu}(x_1)\|_{1,1} \} \left\| \prod_{i=2}^m F_{\nu}(x_i) \right\|_{1,m-1} \\ &\leq 2 \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} = 2\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Следовательно, $G(x; 1; m; \varepsilon) \in L_1(\mathbb{T}^m)$ и $E_{n-1, \dots, n-1}(G)_{1,m} \leq 2\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. имеет место 1).

Далее, если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \varepsilon_n < \infty$, то из оценки ($0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \left\| \{ F_n(x_1) + \Phi_n(x_1) \} \prod_{i=2}^m F_n(x_i) \right\|_{\infty, m} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \left\{ \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{n+1}{2} \right] \right\} \left(\frac{n+1}{2} \right)^{m-1} \leq \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2} \right)^m \Delta \varepsilon_n \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^m \Delta \varepsilon_n \leq \frac{3m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \sum_{\nu=1}^n \nu^{m-1} \\ &= \frac{3m}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m-1} \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta \varepsilon_n = \frac{3m}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m-1} \varepsilon_{\nu} \end{aligned}$$

в силу известного признака равномерной сходимости Вейерштрасса следует, что функция $G(x; 1; m; \varepsilon) \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива правая оценка в 2) с постоянной $C_{11}(1, m) = 3m/2$. С другой стороны, если $G(x; 1; m; \varepsilon) \in C(\mathbb{T}^m)$, то

$$\begin{aligned} \|G(\cdot; 1; m; \varepsilon)\|_{\infty, m} &\geq |G((0, \dots, 0); 1; m; \varepsilon)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \{ F_n(0) + \Phi_n(0) \} \prod_{i=2}^m F_n(0) \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \left(\frac{n+1}{2} \right)^m \geq 2^{-m} \sum_{n=1}^{\infty} n^m \Delta \varepsilon_n \geq 2^{-m} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \sum_{\nu=1}^n \nu^{m-1} \\ &= 2^{-m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m-1} \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta \varepsilon_n = 2^{-m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m-1} \varepsilon_{\nu}, \end{aligned}$$

откуда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \varepsilon_n < \infty$ и справедливость левой оценки в 2) с постоянной $C_{10}(1, m) = 2^{-m}$.

Перейдем к доказательству 3). Если ряд в правой части 2) сходится, то $G(x; 1; m; \varepsilon) \in C(\mathbb{T}^m)$. Обозначим

$$\begin{aligned} g(y; 1; m; \varepsilon) &\equiv G((y, 0, \dots, 0); 1; m; \varepsilon) = G_1((y, 0, \dots, 0); m; \varepsilon) + G_2((y, 0, \dots, 0); m; \varepsilon) \\ &\equiv g_1(y; m; \varepsilon) + g_2(y; m; \varepsilon), \quad y \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

очевидно, что

$$\begin{aligned} g_1(y; m; \varepsilon) &= \frac{1}{2} \{g(y; 1; m; \varepsilon) + g(-y; 1; m; \varepsilon)\}, \\ g_2(y; m; \varepsilon) &= \frac{1}{2} \{g(y; 1; m; \varepsilon) - g(-y; 1; m; \varepsilon)\}, \end{aligned}$$

откуда $g_i(y; m; \varepsilon) \in C(\mathbb{T})$ и $\omega_k(g_i; \delta)_{\infty, 1} \leq \omega_k(g; \delta)_{\infty, 1}$, $i = 1, 2$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} g_1(y; m; \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n F_n(y) \left(\frac{n+1}{2} \right)^{m-1} \\ &= 2^{-m+1} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_n \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n+1} \right) \cos \nu y \right\} \\ &= 2^{-m} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_n \\ &\quad + 2^{-(m-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_{\nu} \left(1 - \frac{n}{\nu+1} \right) \right\} \cos ny \\ &\equiv \frac{1}{2} a_0(g_1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g_1) \cos ny, \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $a_n(g_1) = 2^{-(m-1)} a_n(m; \varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, а последовательность $\{a_n(m; \varepsilon)\}$ определена в лемме 4. Так как по условию $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \varepsilon_n < \infty$, то в силу 6) леммы 4 выполнена оценка $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(m; \varepsilon) < \infty$; отсюда в силу неравенств 7) и 8) леммы 4 и неравенств 1) при $k \in \mathbb{N}$ и 2) при k четном леммы 2 получим $(a_n(m; \varepsilon) \downarrow$ при $n \uparrow$)

$$\begin{aligned} \Omega(1, m, k; \varepsilon) &\leq 2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(m; \varepsilon) + n a_{n+1}(m; \varepsilon) + (k+2) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(m; \varepsilon) \\ &\leq 2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(m; \varepsilon) + (2k+3) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(m; \varepsilon) \\ &\leq 2C_6^{-1}(k) \omega_k \left(g_1; \frac{\pi}{n} \right)_{\infty, 1} + (2k+3) C_7^{-1}(k) \omega_k \left(g_1; \frac{\pi}{n} \right)_{\infty, 1} \\ &\leq \{2C_6^{-1}(k) + (2k+3) C_7^{-1}(k)\} \omega_k \left(g; \frac{\pi}{n} \right)_{\infty, 1}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается оценить второе слагаемое в 3) при нечетном k , для чего согласно 3) леммы 2 воспользуемся функцией g_2 . Имеем

$$\begin{aligned} g_2(y; m; \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \Phi_n(y) \left(\frac{n+1}{2} \right)^{m-1} \\ &= 2^{-m+1} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_n \left\{ \sum_{\nu=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\nu}{2[(n+1)/2]} \sin \nu y \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=[(n+1)/2]+1}^{2[(n+1)/2]-1} \left(1 - \frac{\nu}{2[(n+1)/2]} \right) \sin \nu y \right\} \\ &= 2^{-m+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu}(m; \varepsilon) \sin \nu y, \end{aligned}$$

где

$$b_{\nu}(m; \varepsilon) \equiv \sum_{n=\nu}^{2(\nu-1)} (n+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_n \left(1 - \frac{\nu}{2[(n+1)/2]} \right) + \nu \sum_{n=2\nu-1}^{\infty} \frac{(n+1)^{m-1} \Delta \varepsilon_n}{2[(n+1)/2]}.$$

Отсюда в силу неравенства 3) леммы 2 получим

$$\begin{aligned} C_8^{-1}(k) n^k \omega_k \left(g_2; \frac{\pi}{n} \right)_{\infty, 1} &\geq 2^{-(m-1)} \sum_{\nu=1}^n \nu^k b_{\nu}(m; \varepsilon) \\ &\geq \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+1} \sum_{j=2\nu-1}^n \left(\frac{j+1}{2} \right)^{m-1} \Delta \varepsilon_j \left(2 \left[\frac{j+1}{2} \right] \right)^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j+1}{2} \right)^{m-1} \Delta \varepsilon_j \left(2 \left[\frac{j+1}{2} \right] \right)^{-1} \sum_{\nu=1}^{[(j+1)/2]} \nu^{k+1} \\ &\geq \frac{1}{k+2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j+1}{2} \right)^{m-1} \Delta \varepsilon_j \left(2 \left[\frac{j+1}{2} \right] \right)^{-1} \left(\left[\frac{j+1}{2} \right] \right)^{k+2} \\ &\geq \frac{1}{2(k+2)} \sum_{j=1}^n \Delta \varepsilon_j \left(\left[\frac{j+1}{2} \right] \right)^{m+k} \geq \frac{2^{-(m+k)}}{2(k+2)} \sum_{j=1}^n j^{m+k} \Delta \varepsilon_j \\ &\geq \frac{2^{-(m+k)}}{2(k+2)} \sum_{j=1}^n \Delta \varepsilon_j \sum_{\nu=1}^j \nu^{m+k-1} = \frac{2^{-(m+k)}}{2(k+2)} \sum_{\nu=1}^n \nu^{m+k-1} \sum_{j=\nu}^n \Delta \varepsilon_j \\ &= \frac{2^{-(m+k)}}{2(k+2)} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu^{m+k-1} \varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{n+1} \sum_{\nu=1}^n \nu^{m+k-1} \right\}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{m+k-1} \varepsilon_{\nu} &\leq (k+2) 2^{m+k+1} C_8^{-1}(k) \omega_k \left(g_2; \frac{\pi}{n} \right)_{\infty, 1} + \varepsilon_{n+1} n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{m+k-1} \\ &\leq (k+2) 2^{m+k+1} C_8^{-1}(k) \omega_k \left(g_2; \frac{\pi}{n} \right)_{\infty, 1} + n^m \varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Далее, в силу 2) леммы 2 (при k нечетном) и 8) леммы 4

$$\begin{aligned} C_7^{-1}(k)n^{k+1}\omega_k\left(g_1; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} &\geq \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+1}a_\nu(m; \varepsilon) \geq (k+3)^{-1} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m}\varepsilon_\nu \\ &\geq (k+3)^{-1}(k+m+1)^{-1}n^{k+m+1}\varepsilon_n, \end{aligned}$$

откуда $n^m\varepsilon_{n+1} \leq n^m\varepsilon_n \leq (k+3)(k+m+1)C_7^{-1}(k) \cdot \omega_k(g_1; \pi/n)_{\infty,1}$. Объединяя полученные оценки, имеем (k нечетное)

$$\begin{aligned} n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu &\leq (k+2)2^{m+k+1}C_8^{-1}(k)\omega_k\left(g_2; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} \\ &\quad + (k+3)(k+m+1)C_7^{-1}(k)\omega_k\left(g_1; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1} \\ &\leq C_{13}(k, m)\omega_k\left(g; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty,1}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $p > 1$. В силу известной одномерной оценки (см., например, [13, с. 209], [1, с. 56])

$$\left\| \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu(\cdot) \right\|_{p,1} \leq C_{14}(p)n^{1-1/p}$$

имеем ($0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$)

$$\begin{aligned} \|G_3\|_{p,m} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{m(1/p-1)}\Delta\varepsilon_n \left\| \prod_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu(x_i) \right\|_{p,m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{m(1/p-1)}\Delta\varepsilon_n \prod_{i=1}^m \left\| \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu(x_i) \right\|_{p,1} \\ &\leq C_{14}^m(p) \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\varepsilon_n = C_{14}^m(p)\varepsilon_1; \\ E_{n-1,\dots,n-1}(G_3)_{p,m} &\leq \left\| \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{m(1/p-1)}\Delta\varepsilon_\nu \prod_{i=1}^m \sum_{\mu=1}^{\nu} \beta_\mu(x_i) \right\|_{p,m} \\ &\leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{m(1/p-1)}\Delta\varepsilon_\nu \left\| \prod_{i=1}^m \sum_{\mu=1}^{\nu} \beta_\mu(x_i) \right\|_{p,m} \\ &\leq C_{14}^m(p) \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\varepsilon_\nu = C_{14}^m(p)\varepsilon_n, \end{aligned}$$

откуда $G_3(x; p; m; \varepsilon) \in L_p(\mathbb{T}^m)$ и $E_{n-1,\dots,n-1}(G_3)_{p,m} \leq C_9(p, m)\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. имеет место 1).

Далее, если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}\varepsilon_n < \infty$, то из оценки ($0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m(1/p-1)}\Delta\varepsilon_n \left\| \prod_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu(x_i) \right\|_{\infty,m}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{m(1/p-1)} \Delta \varepsilon_n \prod_{i=1}^m \left\| \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu}(x_i) \right\|_{\infty, 1} \leq (\sqrt{2})^m \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p} \Delta \varepsilon_n \\
&\leq 2^{m/2} C_{15} \left(\frac{m}{p} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \sum_{\nu=1}^n \nu^{m/p-1} = 2^{m/2} C_{15} \left(\frac{m}{p} \right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m/p-1} \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta \varepsilon_n \\
&= 2^{m/2} C_{15} \left(\frac{m}{p} \right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m/p-1} \varepsilon_{\nu},
\end{aligned}$$

где $C_{15}(m/p) = \max\{m/p, 1\}$, следует в силу признака равномерной сходимости Вейерштрасса, что функция $G_3(x; p; m; \varepsilon) \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива правая оценка в 2) с постоянной $C_{11}(p, m) = 2^{m/2} C_{15}(m/p)$. С другой стороны, если $G_3 \in C(\mathbb{T}^m)$, то $(0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \varepsilon_n &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} n^{m/p-1} \\
&\leq C_{16} \left(\frac{m}{p} \right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m/p} \Delta \varepsilon_{\nu} = C_{16} \left(\frac{m}{p} \right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m(1/p-1)} \Delta \varepsilon_{\nu} \nu^m \\
&= C_{16} \left(\frac{m}{p} \right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{m(1/p-1)} \Delta \varepsilon_{\nu} \prod_{i=1}^m \sum_{\mu=1}^{\nu} \beta_{\mu}(0) \\
&= C_{16} \left(\frac{m}{p} \right) G_3((0, \dots, 0); p; m; \varepsilon) \\
&\leq C_{16} \left(\frac{m}{p} \right) \|G_3(\cdot; p; m; \varepsilon)\|_{\infty, m} < \infty,
\end{aligned}$$

где

$$C_{16} \left(\frac{m}{p} \right) = \begin{cases} \frac{p}{m} & \text{при } \frac{m}{p} \leq 1, \\ 1 & \text{при } \frac{m}{p} \geq 1. \end{cases}$$

Докажем 3). Если ряд в правой части 2) сходится, то $G_3(x; p; m; \varepsilon) \in C(\mathbb{T}^m)$. Обозначим

$$\begin{aligned}
g_3(y; p; m; \varepsilon) &\equiv G_3((y, 0, \dots, 0); p; m; \varepsilon) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \Delta \varepsilon_n \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(p; m; \varepsilon) \beta_n(y), \quad y \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

где

$$a_n(p; m; \varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{m/p-1} \Delta \varepsilon_{\nu}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p; m; \varepsilon) < \infty$ (см. доказательство 2); в случае $m/p < 1$ сходимость указанного ряда имеет место в силу левого неравенства в 5) леммы 3). В

случае $m/p < 1$ в силу правых неравенств в 6) и 7) леммы 3 и неравенств 1), 2) при четном k , либо неравенства 3) при нечетном k из леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}\Omega(p, m, k; \varepsilon) &\leq \left(1 - \frac{m}{p} + \frac{p}{m}\right) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(p; m; \varepsilon) + \left(2 - \frac{m}{p}\right) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(p; m; \varepsilon) \\ &\leq \left(1 - \frac{m}{p} + \frac{p}{m}\right) C_6^{-1}(k) \omega_k\left((g_3)_+; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty, 1} + \left(2 - \frac{m}{p}\right) C_{17}(k) \omega_k\left(\varphi; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty, 1} \\ &\leq C_{18}(k, p, m) \omega_k\left(g_3; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty, 1},\end{aligned}$$

где $\varphi \equiv (g_3)_+$ и $C_{17}(k) = C_7^{-1}(k)$ при четном k , $\varphi \equiv (g_3)_-$ и $C_{17}(k) = C_8^{-1}(k)$ при нечетном k , $(g_3)_{\pm}(y) = (1/2)\{g_3(y) \pm g_3(-y)\}$. В случае $m/p \geq 1$ в силу очевидной оценки $a_n(p; m; \varepsilon) \geq n^{m/p-1} \varepsilon_n$ аналогично получим

$$\begin{aligned}\Omega(p, m, k; \varepsilon) &\leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}(p; m; \varepsilon) + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}(p; m; \varepsilon) \\ &\leq C_6^{-1}(k) \omega_k\left((g_3)_+; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty, 1} + C_{17}(k) \omega_k\left(\varphi; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty, 1} \leq C_{19}(k) \omega_k\left(g_3; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty, 1}.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства 3) (как при $p = 1$, так и при $p > 1$) нужно воспользоваться оценкой $\omega_k(g; \pi/n)_{\infty, 1} \leq \omega_k(G; d/n)_{\infty, m}$, которая следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}|\Delta_{\eta}^k g(y; p; m; \varepsilon)| &= |\Delta_{1, \eta}^k G((y, 0, \dots, 0); p; m; \varepsilon)| \leq \|\Delta_{1, \eta}^k G(\cdot; p; m; \varepsilon)\|_{\infty, m} \\ &\leq \omega_k^{(1)}\left(G; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty, m} \leq \omega_k\left(G; \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{\pi}{n}\right)_{\infty, m} \leq \omega_k\left(G; \frac{d}{n}\right)_{\infty, m} \\ &\quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}, \quad |\eta| \leq \frac{\pi}{n},\end{aligned}$$

где $\omega_k^{(1)}(G; \pi/n)_{\infty, m}$ и $\omega_k(G; \pi/n, \dots, \pi/n)_{\infty, m}$ — соответственно частный модуль гладкости по первой переменной и полный кубический модуль гладкости k -го порядка функции $G \in C(\mathbb{T}^m)$ (см., например, [3, с. 123–127]).

Лемма 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе доказательства леммы 5 для функций $G(x; p; m; \varepsilon) \in L_p(\mathbb{T}^m)$ в точке $x = 0$ были получены оценки: при $p = 1$

$$G((0, \dots, 0); 1; m; \varepsilon) = g_1(0; 1; m; \varepsilon) \geq 2^{-m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \varepsilon_n, \quad (8)$$

при $p > 1$

$$G((0, \dots, 0); p; m; \varepsilon) = g_3(0; p; m; \varepsilon) \geq C_{16}^{-1}\left(\frac{m}{p}\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \varepsilon_n, \quad (9)$$

из которых, в частности, следует, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \varepsilon_n = \infty, \quad p \geq 1,$$

то $G(x; p; m; \varepsilon)$ является существенно неограниченной на $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$ (точнее, в любой окрестности начала координат). Для доказательства последнего утверждения предположим противное (здесь мы следуем схеме рассуждений, приведенной в [13, с. 210–211] в случае $m = 1$ и распространенной на случай $m > 1$ в [4, с. 145–146], [14, с. 109–110]). То есть, мы предполагаем, что имеет место эквивалентность $G(x; p; m; \varepsilon)$ некоторой функции, ограниченной на $\mathbb{T}^m$, и, следовательно, в этом случае

$$\operatorname{ess\,sup}\{|G(x; p; m; \varepsilon)|; x \in \mathbb{T}^m\} \leq B < \infty.$$

Но тогда (см., например, [12, с. 141], [14, с. 109])

$$\operatorname{ess\,sup}\{|\sigma_n^{(m)}(G; x)|; x \in \mathbb{T}^m\} \leq B, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\sigma_n^{(m)}(G; x) \equiv \sigma_{n, \dots, n}(G; x_1, \dots, x_m)$ – средние Фейера порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ по переменной x_i , $i = \overline{1, m}$ (или средние арифметические частных сумм), ряда Фурье функции $G \in L_p(\mathbb{T}^m)$. Последнее неравенство противоречит оценкам (8) и (9), ибо метод средних арифметических является вполне регулярным методом суммирования (см. [12, с. 27, замечание 1]). Действительно, при $p = 1$

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n^{(m)}(G; 0) &= S_n^{(1)}(g_1; 0) = \frac{1}{2} a_0(g_1) + \sum_{\nu=1}^n a_\nu(g_1) \\ &\geq 2^{-(m-1)} \sum_{\nu=1}^n a_\nu(m; \varepsilon) \geq 2^{-m} \sum_{\nu=1}^n \nu^{m-1} \varepsilon_\nu \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(здесь $S_n^{(m)}(G; x) \equiv S_{n, \dots, n}(G; x_1, \dots, x_m)$ – частная сумма порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ по переменной x_i , $i = \overline{1, m}$, ряда Фурье функции G), а при $p > 1$

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n^{(m)}(G; 0) &= S_n^{(1)}(g_3; 0) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(p; m; \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^n \nu^{m/p} \Delta \varepsilon_\nu \\ &\geq C_{16}^{-1} \left(\frac{m}{p}\right) \sum_{\nu=1}^n \nu^{m/p-1} \varepsilon_\nu \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(m)}(G; 0) = \infty,$$

что противоречит $\sup\{|\sigma_n^{(m)}(G; 0)|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Условие сходимости ряда в (1) необходимо и достаточно для того, чтобы любая функция $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, для которой имеет место

$$E_{n-1, \dots, n-1}(f)_{p,m} = O(\varepsilon_n), \quad n \uparrow \infty$$

(в частности, каждая функция $f \in E_{p,m}[\varepsilon]$), была эквивалентна некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$. Достаточность известна (см. первую часть утверждения леммы 1) и следует из соответствующих результатов [2, с. 56], [3, с. 378] в случае $m = 1$ и [4, с. 141], [15, с. 88–89] в случае $m > 1$. Необходимость также известна: если ряд в (1) расходится, то существует функция $G(x; p; m; \varepsilon) \in L_p(\mathbb{T}^m)$ с $E_{n-1, \dots, n-1}(G)_{p,m} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, которая является существенно неограниченной в окрестности начала координат, и, следовательно, на $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$ (ясно, что такая функция не может быть эквивалентной никакой функции $\Psi \in C(\mathbb{T}^m)$). Последнее утверждение при $m = 1$ доказано в [16, с. 214–215] (см. также [13, с. 210–211], [1, с. 57–59] и замечание после леммы 5 настоящей заметки); при $m > 1$ оно отмечено в [15, с. 89], а доказательство фактически приведено в [4, с. 144–146], [14, с. 108–111].

Оценка сверху в (2) следует из неравенства (4) леммы 1: если произвольная функция f принадлежит классу $E_{p,m}[\varepsilon]$ и сходится ряд в (1), то в силу леммы 1 f эквивалентна некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \omega_k\left(\psi; \frac{d}{n}\right)_{\infty, m} &\leq C_1(k, p, m) \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p,m} \right. \\ &\quad \left. + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} E_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f)_{p,m} \right\} \\ &\leq C_1(k, p, m) \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} \varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} \varepsilon_{\nu} \right\}. \end{aligned}$$

Оценка снизу в (2) реализуется с помощью функции $C_9^{-1}(p, m)G(x; p; m; \varepsilon) \in E_{p,m}[\varepsilon]$, где $C_9(p, m)$ – постоянная из 1) леммы 5. А именно, в силу 3) леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} \varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+m/p-1} \varepsilon_{\nu} &\leq C_{12}(k, p, m) \omega_k\left(G; \frac{d}{n}\right)_{\infty, m} \\ &\leq C_{12}(k, p, m) C_9(p, m) \sup \left\{ \omega_k\left(\psi; \frac{d}{n}\right)_{\infty, m} ; f \in E_{p,m}[\varepsilon] \right\}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ильясов Н. А. К обратной теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 53–61.
- [2] Конюшков А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. Т. 44. № 1. С. 53–84.
- [3] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [4] Темиргалиев Н. Т. О связи теорем вложения с равномерной сходимостью кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 2. С. 139–148.

- [5] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [6] Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 3. С. 219–242.
- [7] Гейт В. Э. Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций // Изв. вузов. Матем. 1972. № 4. С. 67–77.
- [8] Жук В. В. Об одном методе суммирования рядов Фурье. Ряды Фурье с положительными коэффициентами // Сб. научных трудов Ленингр. мех. ин-та. 1965. № 50. С. 73–92.
- [9] Boas R. P. Fourier series with positive coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 17. № 3. P. 463–483.
- [10] Ильясов Н. А. О приближении периодических функций средними Фейера–Зигмунда в разных метриках // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 48–57.
- [11] Гейт В. Э. О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Матем. 1972. № 7. С. 19–30.
- [12] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [13] Ульянов П. Л. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сб. 1967. Т. 72. № 2. С. 193–225.
- [14] Темиргалиев Н. Т. Об одной теореме вложения // Изв. вузов. Матем. 1973. № 7. С. 103–111.
- [15] Темиргалиев Н. Т. О вложении некоторых классов функций в $C([0, 2\pi]^m)$ // Изв. вузов. Матем. 1978. № 8. С. 88–91.
- [16] Коляда В. И. Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений // Матем. сб. 1977. Т. 102. № 2. С. 195–215.

Бакинский государственный университет, Азербайджан
E-mail: nilyasov@yahoo.com

Поступило
24.11.2000
Исправленный вариант
08.04.2002