Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Каюмов, О гипотезе Бреннана для специального класса функций, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 537–541

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:22:39

УДК 517.54

О ГИПОТЕЗЕ БРЕННАНА ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

И. Р. Каюмов

В работе доказывается гипотеза Бреннана для конформных отображений f круга $\{z : |z| < 1\}$ в предположении, что у функции $\log(zf'(z)/f(z))$ коэффициенты Тейлора в нуле неотрицательны. Кроме того, получены неравенства для интегральных средних по окружности $|z| = r$ квадрата модуля функции $zf'(z)/f(z)$.

Библиография: 8 названий.

Пусть Ω – односвязная область на плоскости, граница которой состоит из более, чем одной точки, и φ – конформное отображение области Ω на круг $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Бреннаном [1] была высказана гипотеза о том, что $\varphi' \in L_p(\Omega)$ при $4/3 < p < 4$, т.е.

$$\int_{\Omega} |\varphi'|^p dx dy < \infty, \quad \frac{4}{3} < p < 4.$$

Если Ω – плоскость с разрезом по некоторому лучу, то при $p \notin (4/3, 4)$

$$\int_{\Omega} |\varphi'|^p dx dy = \infty.$$

Пусть $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ – конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на Ω . Из результатов, полученных в работе [2], следует, что гипотеза Бреннана эквивалентна соотношению $\beta_f(-2) \leq 1$, где

$$\beta_f(t) = \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^t d\theta}{|\log(1-r)|}$$

– спектр интегральных средних.

Для достаточно больших отрицательных t , как это установлено Карлесоном и Макаровым [3], $\beta_f(t) \leq |t| - 1$. Равенство достигается для функции Кёбе $f(z) = z/(1-z)^2$. Там же показано, что для интервала $(-2, 1/3]$ спектр интегральных средних максимизируется функцией, отображающей круг $\mathbb{D}$ на область с фрактальной границей. Гипотеза Бреннана эквивалентна тому, что точка $t = -2$ является точкой фазового перехода для функции $\sup_f \beta_f(t)$: при $t \leq -2$ эта функция должна быть линейна (если справедлива эта гипотеза), а при $-2 < t \leq 1/3$ строго выпукла. Здесь супремум берется по всем однолиственным аналитическим в круге $\mathbb{D}$ функциям. Отсюда видно, что сложность этой

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05-01-00523 и № 03-01-00015, и фонда НИОКР АН РТ.

проблемы связана с граничным поведением конформных отображений круга на области с фрактальными границами. Поскольку гипотезу Бреннана не удалось доказать прямыми методами геометрической теории функций, то эту гипотезу стали доказывать для различных частных случаев. Бертильсон в своей диссертации [4] исследовал локальную версию гипотезы Бреннана для функций, близких к функции Кёбе. Барањски, Вольберг и Здуник [5] доказали гипотезу Бреннана для всех односвязных областей притяжения бесконечности квадратичных полиномов. Другой важный класс фракталов состоит из конформных отображений f , для которых $\log f'$ представим в виде лакунарного ряда Адамара, т.е.

$$\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1.$$

В нашей работе [6] доказано, что гипотеза Бреннана для таких функций верна, если $q \geq 15$.

В этой статье мы докажем гипотезу Бреннана в предположении, что тейлоровские коэффициенты функции $\log(zf'/f)$ неотрицательны. А именно, мы показываем, что справедлива

ТЕОРЕМА. *Предположим, что аналитическая функция f однолистка в круге $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$. Если тейлоровские коэффициенты функции $\log(zf'/f)$ неотрицательны, то $\beta_f(-2) \leq 1$, что эквивалентно достоверности гипотезы Бреннана в рассматриваемом случае. Равенство $\beta_f(-2) = 1$ достигается, например, для функции Кёбе $f = z/(1-z)^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $f'(0) = 1$. В силу условия теоремы справедливо следующее равенство:

$$\log \frac{zf'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z,$$

где $a_k \geq 0$ при $k \geq 1$.

Пусть b_k – тейлоровские коэффициенты функции $f/(zf')$, c_k – тейлоровские коэффициенты функции zf'/f . В силу положительности a_k и равенства

$$\frac{f(z)}{zf'(z)} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} a_k z\right),$$

ясно, что $|b_k| \leq c_k$.

Отсюда при помощи равенства Парсеваля получаем неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(re^{i\theta})}{rf'(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta. \quad (1)$$

Далее, силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 r^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\gamma_k|^2 r^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k r^k k |\gamma_k|^2 r^k,$$

где γ_k – тейлоровские коэффициенты функции $\log(f(z)/z)$.

Милюным [7, с. 87] показано, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^{2k} \leq 2 \log M\left(r, \frac{f}{r}\right), \quad (2)$$

где

$$M\left(r, \frac{f}{r}\right) = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r}.$$

По известной теореме искажения $M(r, f/r) \leq 1/(1-r)^2$. Неравенство (2) переписывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^{2k} \leq 4 |\log(1-r)|. \quad (3)$$

С другой стороны, ясно, что $c_k = k\gamma_k$ при $k \geq 1$, $c_0 = 1$.

Хорошо известно, что $kr^k \leq e^{-1}/(1-r)$. Поэтому,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta \leq 1 + \frac{e^{-1}}{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^k.$$

Таким образом, из неравенств (1) и (3) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(re^{i\theta})}{rf'(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta \leq 1 + \frac{4}{e} \frac{|\log(1-\sqrt{r})|}{1-r}.$$

Комбинируя это неравенство с теоремой Кёбе об $1/4$, согласно которой $|f(re^{i\theta})| \geq r/4$, окончательно получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} d\theta \leq \frac{16}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(re^{i\theta})}{rf'(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta \leq 16 + \frac{64}{e} \frac{|\log(1-\sqrt{r})|}{1-r},$$

откуда заключаем, что $\beta_f(-2) \leq 1$. Теорема доказана.

В качестве замечания отметим, что, несколько изменяя доказательство, нетрудно показать справедливость гипотезы Бреннана для функций, имеющих следующее представление:

$$\log \frac{zf'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z + g(z),$$

где $a_k \geq 0$ при $k \geq 1$, а функция $g(z)$ удовлетворяет в круге $\mathbb{D}$ условию

$$\operatorname{Re} g(z) = o(\log(1-|z|)) \quad \text{при } |z| \rightarrow 0.$$

При доказательстве теоремы был установлен следующий факт: для произвольной аналитической и однолистной в круге $\mathbb{D}$ функции f ($f(0) = 0$) справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta \leq 1 + \frac{4}{e} \frac{|\log(1-\sqrt{r})|}{1-r}.$$

Возникает естественный вопрос: нельзя ли заменить “логарифмический” множитель в этом неравенстве некоторой абсолютной постоянной? Автору неизвестен ответ на этот вопрос в общем случае. Для некоторых случаев можно дать положительный ответ на этот вопрос. Например, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Предположим, что аналитическая функция f однолистка в круге D , $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Если*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \overline{M}(r, f)(1-r)^2 = \alpha > 0,$$

то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{r f'(r e^{i\theta})}{f(r e^{i\theta})} \right|^2 d\theta \leq \frac{2e^{-1} \log(\alpha^{-1})}{1-r} + \frac{4r \sqrt{2 \log(\alpha^{-1})}}{1-r^2} + \frac{1+3r^2}{1-r^2},$$

где

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

При $\alpha = 1$ равенство достигается для функции Кёбе $f(z) = z/(1-z)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Базилевичем (см. [8], [7, с. 82]) доказано неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right|^2 \leq 2 \log \frac{1}{\alpha}, \quad (4)$$

где t_0 – некоторое число на окружности $|z| = 1$, γ_k – тейлоровские коэффициенты функции $\log(f(z)/z)$. Через c_k обозначим тейлоровские коэффициенты функции $z f'/f$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{r f'(r e^{i\theta})}{f(r e^{i\theta})} \right|^2 d\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\gamma_k|^2 r^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k + \frac{2}{k} t_0^k \right|^2 r^{2k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right|^2 r^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \frac{2}{k} t_0^k \right|^2 r^{2k} \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \frac{2}{k} t_0^k \right| \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right| r^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right|^2 r^{2k} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right| r^{2k} + \frac{4r^2}{1-r^2}. \end{aligned}$$

Оценим суммы рядов в последнем выражении. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right|^2 r^{2k} \leq \frac{e^{-1}}{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right|^2 r^k.$$

Здесь мы использовали, как и при доказательстве теоремы, тот факт, что

$$k r^k < \frac{e^{-1}}{1-r}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, оценим другой ряд:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right| r^{2k} &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right| r^{2k}} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k r^{2k}} \\ &= \frac{r}{1-r^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \gamma_k - \frac{2}{k} t_0^k \right| r^{2k}}. \end{aligned}$$

Теперь, используя неравенство (4), заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{r f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta \leq 1 + \frac{2e^{-1} \log(\alpha^{-1})}{1-r} + \frac{4r \sqrt{2 \log(\alpha^{-1})}}{1-r^2} + \frac{4r^2}{1-r^2}.$$

Утверждение доказано.

Автор благодарен Ф. Г. Авхадиеву за полезное обсуждение результатов статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brennan J. E. On the integrability of the derivative in conformal mapping // J. London Math. Soc. (2). 1978. V. 18. P. 261–272.
- [2] Pommerenke Ch. On the integral means of the derivative of a univalent function // J. London Math. Soc. (2). 1985. V. 32. P. 254–258.
- [3] Carleson L., Makarov N. G. Some results connected with Brennan's conjecture // Ark. Mat. 1994. V. 32. P. 33–62.
- [4] Bertilsson D. On Brennan's conjecture in conformal mapping. Doctoral Thesis. Stockholm: Royal Inst. of Tech., 1999.
- [5] Barański K., Volberg A., Zdunik A. Brennan's conjecture and the Mandelbrot set // Intern. Math. Res. Notices. 1998. V. 12. P. 589–600.
- [6] Kayumov I. R. Integral means and the law of the iterated logarithm // Preprint № 8. Sweden: Institut Mittag-Leffler, 2002.
- [7] Милин И. М. Однолистные функции и ортонормированные системы. М.: Наука, 1971.
- [8] Базилевич И. Е. Об одном критерии однолистности регулярных функций и дисперсии их коэффициентов // Матем. сб. 1967. Т. 74. № 1. С. 133–146.

Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета
E-mail: ikayumov@mail.ru

Поступило
17.12.2004
Исправленный вариант
11.04.2005