Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Киреева, А. Н. Красильников, О некоторых экстремальных многообразиях ассоциативных алгебр, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 542–558

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 09:20:16

УДК 512.552

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Е. А. Киреева, А. Н. Красильников

Пусть F – поле простой характеристики p , $\mathbf{V}_p$ – многообразие ассоциативных алгебр над F , заданное тождествами $[[x, y], z] = 0$ и $x^p = 0$, если $p > 2$, и тождествами $[[x, y], z] = 0$ и $x^4 = 0$, если $p = 2$ (здесь $[x, y] = xy - yx$). Известно, что свободные алгебры счетного ранга многообразия $\mathbf{V}_p$ содержат неконечнопорожденные T -пространства. Нами доказано, что многообразия $\mathbf{V}_p$ являются минимальными относительно указанного свойства.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Пусть F – поле, A – свободная ассоциативная F -алгебра без единицы счетного ранга со свободными порождающими $x_1, x_2, \dots$. Элемент $v = v(x_1, \dots, x_n) \in A$ называется *полиномиальным тождеством* или просто *тождеством* ассоциативной F -алгебры G , если $v(g_1, \dots, g_n) = 0$ для любых $g_1, \dots, g_n \in G$. В этом случае выражение $v = 0$ также называют тождеством алгебры G . Если $\{v_t \mid t \in \Omega\}$ – произвольное, но фиксированное множество тождеств, то класс всех ассоциативных F -алгебр, удовлетворяющих одновременно всем тождествам v_t , $t \in \Omega$, называется *многообразием*. Многообразие называется *конечнобазуемым*, если оно может быть определено конечным множеством тождеств, и *неконечнобазуемым* в противном случае.

Идеал V свободной алгебры A называется *T -идеалом*, если V – вполне характеристический идеал в A , т.е. если $\alpha(V) \subseteq V$ для любого эндоморфизма α алгебры A . Хорошо известно, что между множеством всех многообразий ассоциативных F -алгебр и множеством всех T -идеалов алгебры A существует естественное взаимнооднозначное соответствие. Именно, если $\mathbf{V}$ – многообразие ассоциативных F -алгебр, то соответствующий ему T -идеал V алгебры A – это множество всех тождеств, выполненных в каждой алгебре из $\mathbf{V}$. С другой стороны, если V – T -идеал в A , то соответствующее ему многообразие $\mathbf{V}$ – это многообразие, определяемое системой тождеств $\{v \mid v \in V\}$. Многообразие $\mathbf{V}$ ассоциативных F -алгебр является конечнобазуемым тогда и только тогда, когда соответствующий ему T -идеал V конечнопорожден (как T -идеал). Основные определения, факты и библиографию, относящуюся к полиномиальным тождествам и многообразиям ассоциативных алгебр, можно найти в [1]–[4].

В течение нескольких десятилетий оставалась открытой знаменитая проблема Шпекта (первоначально поставленная в [5] в случае, когда F – поле характеристики 0): верно ли, что каждое многообразие ассоциативных F -алгебр конечнобазуемо? Или, эквивалентно: верно ли, что каждый T -идеал свободной F -алгебры A счетного ранга конечнопорожден как T -идеал? Если F – поле характеристики 0, то ответ на этот вопрос

положительный, это было доказано в середине 80-х годов Кемером в замечательных работах [6] и [7]. С другой стороны, недавно Белов [8], Гришин [9] и Шиголов [10] показали, что над полем простой характеристики p (над полем характеристики 2 в [9]) ответ на вопрос Шпехта отрицательный (см. также [11], [12]). Ими были построены примеры T -идеалов в алгебре A , не являющихся конечнопорожденными.

Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие ассоциативных F -алгебр, V – соответствующий этому многообразию T -идеал в A . Факторалгебра A/V с порождающими $x_1 + V, x_2 + V, \dots$ называется *свободной алгеброй* (счетного ранга) *многообразия $\mathbf{V}$* . Векторное подпространство U в A/V называется *T -пространством*, если U – вполне характеристическое подпространство, т.е. $\alpha(U) \subseteq U$ для любого эндоморфизма α алгебры A/V . Первым систематически изучать T -пространства, прежде всего с точки зрения их конечной порожденности, начал Гришин [13].

Между проблемой Шпехта и вопросом о существовании неконечнопорожденных T -пространств в свободных алгебрах многообразий существует тесная связь. В каждой из работ [8], [9], [10] было построено свое неконечнобазлируемое многообразие $\mathbf{U}$, отличное от построенных в двух других работах, однако в каждой из этих работ при построении такого неконечнобазлируемого многообразия $\mathbf{U}$ решающую роль играло вспомогательное многообразие $\mathbf{V}$, свободная алгебра A/V счетного ранга которого содержит неконечнопорожденные T -пространства.

Минимальные неконечнобазлируемые многообразия – это неконечнобазлируемые многообразия, все собственные подмногообразия которых конечнобазлируемы. Такие минимальные многообразия называются также *почти конечнобазлируемыми* или *предельными*. С помощью леммы Цорна легко доказать, что каждое неконечнобазлируемое многообразие универсальных алгебр содержит минимальное неконечнобазлируемое подмногообразие. Поэтому из отрицательного решения проблемы Шпехта над полем F простой характеристики вытекает, что указанные минимальные многообразия ассоциативных F -алгебр существуют. Ни одного конкретного примера такого многообразия, однако, неизвестно. Поэтому сейчас особую актуальность приобрела следующая (по-видимому, очень трудная) проблема.

ПРОБЛЕМА 1. Построить минимальное неконечнобазлируемое многообразие ассоциативных алгебр над полем F простой характеристики.

Так как отправной точкой в построении неконечнобазлируемого многообразия $\mathbf{U}$ ассоциативных алгебр над полем простой характеристики является вспомогательное многообразие $\mathbf{V}$, свободная алгебра (счетного ранга) A/V которого содержит неконечнопорожденные T -пространства, то для построения *минимального* неконечнобазлируемого многообразия $\mathbf{U}$ в качестве первого шага нужно решить следующую проблему.

ПРОБЛЕМА 2. Построить минимальное многообразие $\mathbf{V}$ ассоциативных алгебр над полем F простой характеристики, свободная алгебра счетного ранга A/V которого содержит неконечнопорожденные T -пространства.

Другими словами, требуется построить такое многообразие $\mathbf{V}$, что в свободной алгебре счетного ранга A/V этого многообразия неконечнопорожденные T -пространства есть, а в свободной алгебре счетного ранга всякого собственного подмногообразия многообразия $\mathbf{V}$ все T -пространства конечнопорождены. Решение этой второй проблемы и составляет основной результат данной работы.

Пусть F – поле простой характеристики p ; обозначим символом $\mathbf{V}_p$ многообразие ассоциативных алгебр над F , заданное тождествами

$$[[x, y], z] = 0 \quad \text{и} \quad x^p = 0,$$

если $p > 2$, и тождествами

$$[[x, y], z] = 0 \quad \text{и} \quad x^4 = 0,$$

если $p = 2$ (здесь $[x, y] = xy - yx$). Отметим, что для $p > 2$ многообразие $\mathbf{V}_p$ порождается бесконечномерной алгеброй Грассмана над полем F (Чирипов, Сидеров [14]).

Известно, что свободная алгебра счетного ранга многообразия $\mathbf{V}_p$ содержит неконечнопорожденные T -пространства (Гришин [9] для $p = 2$ и Щиголев [15] для простого $p > 2$). Нами доказана

ТЕОРЕМА 1. *Пусть F – произвольное поле простой характеристики p . Многообразие $\mathbf{V}_p$ является минимальным многообразием ассоциативных F -алгебр, свободная алгебра счетного ранга которого содержит неконечнопорожденные T -пространства.*

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathbf{W}$ – произвольное собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}_p$. Тогда в свободной алгебре многообразия $\mathbf{W}$ любое T -пространство конечнопорождено.*

В свою очередь, теорема 2 является непосредственным следствием следующих двух утверждений, представляющих независимый интерес.

ТЕОРЕМА 3. *Любое собственное подмногообразие $\mathbf{W}$ многообразия $\mathbf{V}_p$ удовлетворяет тождеству*

$$[x_1, x_2] \cdot [x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0 \quad (1)$$

для подходящего $n = n(\mathbf{W})$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $n, N \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathbf{V} = \mathbf{V}(n, N)$ – многообразие ассоциативных F -алгебр, определяемое тождествами (1) и $x^N = 0$. Тогда в свободных алгебрах многообразия $\mathbf{V}$ все T -пространства конечнопорождены.*

Заметим, что основные определения, связанные с многообразиями ассоциативных алгебр над полем, без изменений переносятся на алгебры над произвольным коммутативно-ассоциативным кольцом K с 1. Пусть A/V – свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$ ассоциативных K -алгебр, свободно порожденная элементами $x_i + V$, $i \in \Omega$. Назовем T -пространство в A/V *ограниченным* (относительно множества порождающих $\{x_i + V \mid i \in \Omega\}$), если оно порождается как T -пространство элементами, в которые каждый порождающий $x_i + V$ входит в степени, не превышающей некоторого числа N , не зависящего от i .

Утверждение теоремы 4 вытекает из следующего результата, доказанного первым из авторов.

ТЕОРЕМА 5. Пусть K – произвольное нётерово коммутативное и ассоциативное кольцо с 1, n – произвольное, но фиксированное натуральное число. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{V}(n)$ – многообразие ассоциативных алгебр над K , задаваемое тождеством (1). Тогда в свободных алгебрах многообразия $\mathbf{V}$ все ограниченные T -пространства конечнопорождены (как T -пространства).

2. Доказательство теоремы 3. Пусть A/V_p – свободная алгебра счетного ранга многообразия $\mathbf{V}_p$. Пусть T – произвольный нетривиальный T -идеал в A/V_p . Нам нужно доказать, что T содержит элемент

$$[x_1, x_2] \cdot [x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] + V_p \quad (2)$$

для подходящего $n = n(T)$.

Рассмотрим в A/V_p подмножество H всех элементов

$$x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] + V_p$$

таких, что $l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l+m > 0, i_1 < \cdots < i_l, j_1 < \cdots < j_{2m}, \alpha_t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, если $p > 2$, и $\alpha_t \in \{1, 2, 3\}$, если $p = 2$ ($t = 1, 2, \dots, l$). Покажем, что алгебра A/V_p является линейной оболочкой подмножества H .

Действительно, рассмотрим произвольный элемент f алгебры A/V_p . Этот элемент является линейной комбинацией одночленов вида $x_{u_1} \cdots x_{u_s} + V_p$, $s > 0$. Используя равенства

$$xy = yx + [x, y] \quad \text{и} \quad [x, y]z + V_p = z[x, y] + V_p,$$

каждый такой одночлен нетрудно записать в виде суммы элементов вида

$$x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] + V_p, \quad (3)$$

где $i_1 < \cdots < i_l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l+m > 0$. Ясно, что $1 \leq \alpha_i < 4$, если $p = 2$, и $1 \leq \alpha_i < p$, если $p > 2$, иначе произведение равно 0.

Хорошо известно (см. [16]), что в алгебре с тождеством $[[x, y], z] = 0$ имеют место тождества

$$[x, z] \cdot [y, t] = -[x, t] \cdot [y, z], \quad (4)$$

$$[x, y] \cdot [x, z] = 0. \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= [xy, z, t] = [x[y, z] + [x, z]y, t] = [x[y, z], t] + [[x, z]y, t] \\ &= x[y, z, t] + [x, t] \cdot [y, z] + [x, z] \cdot [y, t] + [x, z, t]y = [x, t] \cdot [y, z] + [x, z] \cdot [y, t]. \end{aligned}$$

Тождество (4) доказано. Положим в нем теперь $t = x$, тогда

$$[x, z] \cdot [y, x] = -[x, x] \cdot [y, z] = 0,$$

откуда получаем тождество (5).

Из тождества (5) следует, что произведения вида (3), в которых индексы $j_1, \dots, j_{2m}$ не являются попарно различными, равны 0. Если в произведении (3) индексы $j_1, \dots, j_{2m}$ попарно различны, то используя тождество (4), порождающие $x_{j_1}, \dots, x_{j_{2m}}$ в этих произведениях можно упорядочить так, что $j_1 < j_2 < \dots < j_{2m}$. Таким образом, множество H действительно порождает A/V_p как векторное пространство над полем F . Известно (хотя мы не смогли найти точной ссылки), что элементы из множества H линейно независимы над полем F . Мы, однако, не будем использовать этот факт. Наоборот, из нашего доказательства (с учетом того, что V_p не удовлетворяет никакому тождеству вида (1)) будет следовать, что любая нетривиальная линейная комбинация элементов H ненулевая, и потому элементы из множества H линейно независимы и составляют F -базис алгебры A/V_p .

Пусть $p = 2$. Тогда для любых $u, v \in A/V_2$ имеем $[u, v^2] = [[u, v], v] = 0$, т.е. v^2 лежит в центре алгебры A/V_2 . Значит, любое произведение g из множества H можно переписать в виде

$$g = g_1 g_2 g_3, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= x_{i_1} \cdots x_{i_l} + V_2, \quad i_1 < \dots < i_l, \quad g_2 = x_{j_1}^2 \cdots x_{j_m}^2 + V_2, \quad j_1 < \dots < j_m, \\ g_3 &= [x_{k_1}, x_{k_2}] \cdots [x_{k_{2r-1}}, x_{k_{2r}}] + V_2, \quad k_1 < \dots < k_{2r}, \end{aligned}$$

при этом некоторые (но не все) множители g_i могут отсутствовать. Назовем множители g_1, g_2 и g_3 соответственно *начальной*, *средней* и *конечной* частью произведения g . Число l назовем *длиной произведения* g_1 , а число m – *длиной произведения* g_2 .

Будем говорить, что порождающие $x_{i_1} + V_2, \dots, x_{i_l} + V_2$ входят в указанное выше произведение g_1 , а все остальные порождающие $x_j + V_2$ (т.е. порождающие с $j \notin \{i_1, \dots, i_l\}$) не входят в это произведение. Аналогично, будем говорить, что в g_2 входят порождающие $x_{j_1} + V_2, \dots, x_{j_m} + V_2$ и только они, а в g_3 – порождающие $x_{k_1} + V_2, \dots, x_{k_{2r}} + V_2$ и только они.

Рассмотрим эндоморфизмы $\varphi = \varphi_{i,s,t}: A/V_2 \rightarrow A/V_2$ такие, что

$$\varphi(x_i + V_2) = x_i + [x_s, x_t] + V_2, \quad \varphi(x_j + V_2) = x_j + V_2 \quad \text{для всех } j \neq i.$$

Нетрудно проверить, что если g – произведение вида (6), то

$$\varphi(g) = \begin{cases} g, & \text{если } x_i + V_2 \text{ не входит в } g_1, \\ g + \tilde{g}_1 g_2 g_3 [x_s, x_t], & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит в } g_1. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{g}_1$ – произведение, полученное из g_1 отбрасыванием множителя x_i . Получаем, что

$$g + \varphi(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i + V_2 \text{ не входит в } g_1, \\ \tilde{g}_1 g_2 g_3 [x_s, x_t], & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит в } g_1. \end{cases}$$

Рассмотрим эндоморфизмы $\psi = \psi_{i,s}: A/V_2 \rightarrow A/V_2$ такие, что

$$\psi(x_i + V_2) = x_i + x_s + V_2, \quad \psi(x_j + V_2) = x_j + V_2 \quad \text{для всех } j \neq i.$$

Пусть g – произведение вида (6), у которого отсутствует начальная часть, т.е.

$$g = g_2 g_3. \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что тогда

$$\psi(g) = \begin{cases} g, & \text{если } x_i + V_2 \text{ не входит в } g_2, g_3, \\ (x_i^2 + x_s^2 + [x_i, x_s])\tilde{g}_2 g_3, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит только в } g_2, \\ ([x_i, x_j] + [x_s, x_j])g_2 \tilde{g}_3, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит только в } g_3, \\ (x_i^2 + x_s^2)([x_i, x_j] + [x_s, x_j])\tilde{g}_2 \tilde{g}_3, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит и в } g_2, \text{ и в } g_3. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{g}_2$ – произведение, полученное из g_2 отбрасыванием множителя x_i^2 , а $\tilde{g}_3$ – произведение, полученное из g_3 отбрасыванием множителя $[x_i, x_j]$.

Рассмотрим также эндоморфизмы $\chi = \chi_{i,s}: A/V_2 \rightarrow A/V_2$ такие, что

$$\chi(x_i + V_2) = x_s + V_2, \quad \chi(x_j + V_2) = x_j + V_2 \quad \text{для всех } j \neq i.$$

Ясно, что

$$g + \psi(g) + \chi(g) = \begin{cases} g, & \text{если } x_i + V_2 \text{ не входит в } g_2, g_3, \\ \tilde{g}_2 g_3 [x_i, x_s], & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит только в } g_2, \\ 0, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит только в } g_3, \\ (x_i^2 [x_s, x_j] + x_s^2 [x_i, x_j])\tilde{g}_2 \tilde{g}_3, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит и в } g_2, \text{ и в } g_3. \end{cases}$$

Далее, нетрудно проверить, что если g – произведение вида (7), $x_s + V_2$, $x_t + V_2$ – порождающие A/V_2 , не входящие в g ,

$$f_1 = g + \psi_{i,s}(g) + \chi_{i,s}(g), \quad f_2 = f_1 + \psi_{s,t}(f_1) + \chi_{s,t}(f_1),$$

то

$$f_2 = \begin{cases} g, & \text{если } x_i + V_2 \text{ не входит в } g_2, g_3, \\ 0, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит только в } g_2 \text{ или только в } g_3, \\ \tilde{g}_2 g_3 [x_s, x_t], & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит и в } g_2, \text{ и в } g_3. \end{cases}$$

Пусть теперь T – произвольный ненулевой T -идеал в алгебре A/V_2 . Пусть $f = \sum_t \alpha_t g^{(t)} \in T$, где для всех t $\alpha_t \in F$, $\alpha_t \neq 0$, $g^{(t)}$ – попарно различные произведения вида (6). Покажем, что без ограничения общности можно считать, что для некоторого $q \in \mathbb{N}$ в каждое из произведений $g^{(t)}$ входит каждый порождающий $x_1 + V_2, \dots, x_q + V_2$ и не входят никакие порождающие $x_j + V_2$ для $j > q$.

Действительно, пусть $g^{(1)} = g^{(1)}(x_{j_1}, \dots, x_{j_q}) + V_2$, и пусть $\tau = \tau_{j_1, \dots, j_q}$ – эндоморфизм алгебры A/V_2 такой, что

$$\tau(x_{j_t} + V_2) = x_{j_t} + V_2 \quad \text{для } t = 1, 2, \dots, q, \quad \tau(x_j + V_2) = 0 \quad \text{для } j \notin \{j_1, \dots, j_q\}.$$

Заменив, если необходимо, f на $\tau(f) \in T$, мы можем считать, что для любого i в $g^{(i)}$ не входят никакие порождающие $x_j + V_2$ для $j \notin \{j_1, \dots, j_q\}$.

Далее, пусть ξ_i – эндоморфизмы алгебры A/V_2 такие, что

$$\xi_i(x_j + V_2) = x_j + V_2 \quad \text{для } j \neq i, \quad \xi_i(x_i + V_2) = 0.$$

Легко проверить, что $f_1 = f + \xi_{j_1}(f) \in T$ – сумма тех слагаемых $\alpha_t g^{(t)}$ из f , для которых порождающий $x_{j_1} + V_2$ входит в $g^{(t)}$. Рассматривая далее $f_2 = f_1 + \xi_{j_2}(f_1) \in T$ и так далее, мы в результате получим элемент $f_q = \sum_i \alpha_i g^{(i)} \in T$, где $g^{(i)}$ – попарно различные произведения вида (6), в каждое из которых входят в точности порождающие $x_{j_1} + V_2, \dots, x_{j_q} + V_2$ и не входят никакие другие.

И наконец, мы можем без ограничения общности считать $j_1 = 1, \dots, j_q = q$, так как если $j_k \neq k$ для некоторого k , то достаточно заменить имеющийся элемент f на $\sigma(f) \in T$ для подходящего автоморфизма σ алгебры A/V_2 , действующего как подстановка на множестве $\{x_j + V_2 \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Пусть теперь $f = \sum_{t=1}^s \alpha_t g^{(t)} \in T$, где для всех $t = 1, \dots, s$ $\alpha_t \in F$, $\alpha_t \neq 0$, $g^{(t)} = g^{(t)}(x_1, \dots, x_q) + V_2$ – попарно различные произведения вида (6). Положим

$$M_0 = \{g^{(t)} \mid t = 1, \dots, s\}.$$

Для всех t обозначим символом l_t длину начальной части $g_1^{(t)}$ произведения $g^{(t)}$, символом m_t – длину средней части $g_2^{(t)}$ произведения $g^{(t)}$, символом $D^{(t)}$ – множество всех таких порождающих $x_i + V_2$ алгебры A/V_2 , которые входят одновременно в среднюю и конечную части произведения $g^{(t)}$. Пусть $r_t = |D^{(t)}|$.

Пусть $\max_{t=1, \dots, s} l_t = l_{\max}$. Положим

$$M_1 = \{g^{(t)} \in M_0 \mid l_t = l_{\max}\}.$$

Будем считать, что $g^{(t)} \in M_1$ при $t = 1, \dots, s_1$, $s_1 \leq s$.

Пусть $\max_{t=1, \dots, s_1} r_t = r_{\max}$. Положим

$$M_2 = \{g^{(t)} \in M_1 \mid r_t = r_{\max}\}.$$

Будем считать, что $g^{(t)} \in M_2$ при $t = 1, \dots, s_2$, $s_2 \leq s_1$.

И, наконец, пусть $\max_{t=1, \dots, s_2} m_t = m_{\max}$. Положим

$$M_3 = \{g^{(t)} \in M_2 \mid m_t = m_{\max}\}.$$

Зафиксируем теперь элемент $g^{(1)} \in M_3$. Пусть $g_1^{(1)} = x_{i_1} \cdots x_{i_l} + V_2$, $l = l_{\max}$. Тогда положим

$$f_0^{(1)} = f, \quad f_1^{(1)} = f_0^{(1)} + \varphi_{i_1, q+1, q+2}(f_0^{(1)}).$$

Ясно, что $f_1^{(1)} \in T$, причем $f_1^{(1)} = \sum_t \alpha_t (g^{(t)} + \varphi_{i_1, q+1, q+2}(g^{(t)}))$ и

$$g^{(t)} + \varphi_{i_1, q+1, q+2}(g^{(t)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{i_1} + V_2 \text{ не входит в } g_1^{(t)}, \\ \tilde{g}_1^{(t)} g_2^{(t)} g_3^{(t)} [x_{q+1}, x_{q+2}], & \text{если } x_{i_1} + V_2 \text{ входит в } g_1^{(t)}. \end{cases}$$

Положим далее

$$f_2^{(1)} = f_1^{(1)} + \varphi_{i_2, q+3, q+4}(f_1^{(1)}), \quad \dots, \quad f_l^{(1)} = f_{l-1}^{(1)} + \varphi_{i_l, q+2l-1, q+2l}(f_{l-1}^{(1)}).$$

Рассмотрим элемент $f_l^{(1)} \in T$. Так как для всех $t = s_1 + 1, \dots, s$ выполняется $l_t < l$, то для каждого произведения $g^{(t)} \in M_0 \setminus M_1$ найдется порождающий $x_{i_j} + V_2$, который входит в $g_1^{(1)}$, но не входит в $g_1^{(t)}$, и, таким образом, все элементы из $M_0 \setminus M_1$ перейдут в 0.

Рассмотрим теперь элементы из M_1 . Ясно, что для всякого $t = 1, \dots, s_1$ либо $g_1^{(t)} \neq g_1^{(1)}$, и тогда произведение $g_1^{(t)}$ также перейдет в 0, либо $g_1^{(t)} = g_1^{(1)}$, и тогда вместо $g^{(t)}$ появится произведение $\bar{g}^{(t)} = g_2^{(t)} \bar{g}_3^{(t)}$, где

$$\bar{g}_3^{(t)} = g_3^{(t)} [x_{q+1}, x_{q+2}] \cdots [x_{q+2l-1}, x_{q+2l}].$$

Применив, если нужно, подходящие эндоморфизмы τ и ξ к элементу $f_l^{(1)}$, отбросим все такие произведения $\bar{g}^{(t)}$, у которых набор входящих в них порождающих не совпадает с набором порождающих, входящих в $\bar{g}^{(1)}$. Применим также подходящий автоморфизм σ и перенумеруем порождающие. Тогда, перенумеровывая, если необходимо, элементы $\alpha_t g^{(t)}$ в f , получаем

$$\bar{f} = \sum_{t=1}^{s'} \alpha_t h^{(t)} \in T, \quad \text{где } h^{(t)} = \sigma(\bar{g}^{(t)}),$$

$h^{(t)} = h_2^{(t)} h_3^{(t)} = h^{(t)}(x_1, \dots, x_{q_1}) + V_2$ — элементы вида (7).

Положим

$$\begin{aligned} \overline{M}_1 &= \{h^{(t)} \mid t = 1, \dots, s'\}, \\ \overline{M}_2 &= \{h^{(t)} \in \overline{M}_1 \mid g^{(t)} \in M_2\}, \\ \overline{M}_3 &= \{h^{(t)} \in \overline{M}_2 \mid g^{(t)} \in M_3\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $\overline{M}_3 \neq \emptyset$, так как $h^{(1)} \in \overline{M}_3$.

Пусть $r = r_{\max}$, и пусть $x_{j_1} + V_2, \dots, x_{j_r} + V_2$ — элементы из $D^{(1)}$, т.е. порождающие алгебры A/V_2 , которые одновременно входят в $h_2^{(1)}$ и $h_3^{(1)}$.

Положим

$$\begin{aligned} f_0^{(2)} &= \bar{f}, \\ f_1^{(2)} &= f_0^{(2)} + \psi_{j_1, q_1+1}(f_0^{(2)}) + \chi_{j_1, q_1+1}(f_0^{(2)}) \\ &= \sum_t \alpha_t (h^{(t)} + \psi_{j_1, q_1+1}(h^{(t)}) + \chi_{j_1, q_1+1}(h^{(t)})) = \sum_t \alpha_t \bar{h}^{(t)}, \\ f_2^{(2)} &= f_1^{(2)} + \psi_{q_1+1, q_1+2}(f_1^{(2)}) + \chi_{q_1+1, q_1+2}(f_1^{(2)}) \\ &= \sum_t \alpha_t (\bar{h}^{(t)} + \psi_{q_1+1, q_1+2}(\bar{h}^{(t)}) + \chi_{q_1+1, q_1+2}(\bar{h}^{(t)})) = \sum_t \alpha_t \bar{\bar{h}}^{(t)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\bar{\bar{h}}^{(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{j_1} + V_2 \text{ входит только в } h_2^{(t)} \\ & \text{или только в } h_3^{(t)}, \\ \tilde{h}_2^{(t)} \tilde{h}_3^{(t)} [x_{q_1+1}, x_{q_1+2}], & \text{если } x_{j_1} + V_2 \text{ входит и в } h_2^{(t)}, \text{ и в } h_3^{(t)}. \end{cases}$$

Положим далее

$$\begin{aligned} f_3^{(2)} &= f_2^{(2)} + \psi_{j_2, q_1+3}(f_2^{(2)}) + \chi_{j_2, q_1+3}(f_2^{(2)}), \\ f_4^{(2)} &= f_3^{(2)} + \psi_{q_1+3, q_1+4}(f_3^{(2)}) + \chi_{q_1+3, q_1+4}(f_3^{(2)}), \\ &\dots\dots\dots \\ f_{2r-1}^{(2)} &= f_{2r-2}^{(2)} + \psi_{j_r, q_1+2r-1}(f_{2r-2}^{(2)}) + \chi_{j_r, q_1+2r-1}(f_{2r-2}^{(2)}), \\ f_{2r}^{(2)} &= f_{2r-1}^{(2)} + \psi_{q_1+2r-1, q_1+2r}(f_{2r-1}^{(2)}) + \chi_{q_1+2r-1, q_1+2r}(f_{2r-1}^{(2)}). \end{aligned}$$

Ясно, что $f_{2r}^{(2)} \in T$. Так как для всех $h^{(t)} \in \overline{M}_1 \setminus \overline{M}_2$ выполняется $r_t < r$, то найдется порождающий $x_{j_k} + V_2 \in D^{(1)}$ такой, что $x_{j_k} + V_2 \notin D^{(t)}$ (т.е. $x_{j_k} + V_2$ входит либо только в $h_2^{(t)}$, либо только в $h_3^{(t)}$), следовательно, все элементы из $\overline{M}_1 \setminus \overline{M}_2$ перейдут в 0.

Рассмотрим элементы из $\overline{M}_2$. Тогда для всякого $h^{(t)} \in \overline{M}_2$ либо $D^{(t)} \neq D^{(1)}$ и, значит, элемент $h^{(t)}$ также перейдет в 0, либо $D^{(t)} = D^{(1)}$ и тогда вместо $h^{(t)}$ появится произведение $q^{(t)} = q_2^{(t)} q_3^{(t)}$, где

$$q_3^{(t)} = h^{(t)}[x_{q_1+1}, x_{q_1+2}] \cdots [x_{q_1+2r-1}, x_{q_1+2r}],$$

а произведение $q_2^{(t)}$ получено из $h_2^{(t)}$ отбрасыванием множителя $x_{j_1}^2 \cdots x_{j_r}^2$. Тогда

$$q^{(t)} = q^{(t)}(x_1, \dots, x_{q_2}) + V_2, \quad \text{где } q_2 = q_1 + 2r.$$

Таким образом, перенумеровывая еще раз, если нужно, слагаемые $\alpha_t g^{(t)}$ в элементе f , получаем элемент $f_{2r}^{(2)} = \sum_{t=1}^{s''} \alpha_t q^{(t)}$, где для всех t $q^{(t)}$ – элементы вида (7), в которые ни один порождающий $x_i + V_2$ не входит одновременно в среднюю и конечную части, и количество порождающих, входящих в среднюю часть, уменьшилось на r .

Положим

$$\overline{\overline{M}}_2 = \{q^{(t)} \mid t = 1, \dots, s''\}, \quad \overline{\overline{M}}_3 = \{q^{(t)} \in \overline{\overline{M}}_2 \mid h^{(t)} \in \overline{M}_3\}.$$

Ясно, что $\overline{\overline{M}}_3 \neq \emptyset$, так как $q^{(1)} \in \overline{\overline{M}}_3$.

Пусть

$$q_2^{(1)} = x_{k_1}^2 \cdots x_{k_m}^2 + V_2, \quad m = m_{\max} - r.$$

Положим

$$\begin{aligned} f_0^{(3)} &= f_{2r}^{(2)}, \quad f_1^{(3)} = f_0^{(3)} + \psi_{k_1, q_2+1}(f_0^{(3)}) + \chi_{k_1, q_2+1}(f_0^{(3)}) \\ &= \sum_t \alpha_t (q^{(t)} + \psi_{k_1, q_2+1}(q^{(t)}) + \chi_{k_1, q_2+1}(q^{(t)})). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &q^{(t)} + \psi_{k_1, q_2+1}(q^{(t)}) + \chi_{k_1, q_2+1}(q^{(t)}) \\ &= \begin{cases} \tilde{q}_2^{(t)} q_3^{(t)} [x_{k_1}, x_{q_2+1}], & \text{если } x_{k_1} + V_2 \text{ входит в } q_2^{(t)}, \\ 0, & \text{если } x_{k_1} + V_2 \text{ входит в } q_3^{(t)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Положим далее

$$\begin{aligned} f_2^{(3)} &= f_1^{(3)} + \psi_{k_2, q_2+2}(f_1^{(3)}) + \chi_{k_2, q_2+2}(f_1^{(3)}), \\ &\dots\dots\dots \\ f_m^{(3)} &= f_{m-1}^{(3)} + \psi_{k_m, q_2+m}(f_{m-1}^{(3)}) + \chi_{k_m, q_2+m}(f_{m-1}^{(3)}). \end{aligned}$$

Рассмотрим элемент $f_m^{(3)} \in T$. Так как для всех элементов $q^{(t)} \in \overline{M}_2 \setminus \overline{M}_3$ выполняется $m_t < m$, то найдется порождающий $x_{k_u} + V_2$, который входит в $q_2^{(1)}$ и не входит в $q_2^{(t)}$ (т.е. входит в $q_3^{(t)}$), и, следовательно, все элементы из $\overline{M}_2 \setminus \overline{M}_3$ перейдут в 0.

Рассмотрим элементы $q^{(t)} \in \overline{M}_3$. Тогда либо $q_2^{(t)} \neq q_2^{(1)}$ и элемент $q^{(t)}$ также перейдет в 0, либо $q_2^{(t)} = q_2^{(1)}$ и тогда вместо $q^{(t)}$ появится произведение

$$\bar{q}^{(t)} = \bar{q}_3^{(t)} = q_3^{(t)}[x_{k_1}, x_{q_2+1}] \cdots [x_{k_m}, x_{q_2+m}].$$

В результате описанных выше преобразований элемента $f = \sum_t \alpha_t g^{(t)}$ не перешли в 0 только произведения $g^{(t)}$ вида (6) со следующими свойствами:

- 1) в $g^{(t)}$ входят в точности те же порождающие $x_i + V_2$, что и в $g^{(1)}$;
- 2) $g_1^{(t)} = g_1^{(1)}$;
- 3) в $\bar{g}^{(t)}$ входят в точности те же порождающие $x_i + V_2$, что и в $\bar{g}^{(1)}$ или, что эквивалентно, с учетом 2), в $g_2^{(t)} g_3^{(t)}$ входят в точности те же порождающие, что и в $g_2^{(1)} g_3^{(1)}$;
- 4) $D^{(t)} = D^{(1)}$;
- 5) $q_2^{(t)} = q_2^{(1)}$, что эквивалентно, с учетом 4), равенству $g_2^{(t)} = g_2^{(1)}$.

Из свойств 3)–5) следует, что в $g_3^{(t)}$ и в $g_3^{(1)}$ входят одни и те же порождающие $x_i + V_2$. Это означает, что $g_3^{(t)} = g_3^{(1)}$, откуда получаем $g^{(t)} = g^{(1)}$. Значит, единственный не перешедший в 0 в результате описанных выше преобразований элемент $g^{(t)}$ – это элемент $g^{(1)}$.

Таким образом, получаем

$$f_m^{(3)} = \alpha_1[x_{u_1}, x_{u_2}] \cdots [x_{u_{2n-1}}, x_{u_{2n}}] + V_2 \in T$$

для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \in F$, $\alpha_1 \neq 0$ и некоторых попарно различных индексов $u_1, \dots, u_{2n}$. Откуда, применив подходящий автоморфизм алгебры A/V_2 , действующий как подстановка на множестве порождающих, получаем

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] + V_2 \in T,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $p > 2$. Рассмотрим элементы множества H , т.е. произведения

$$g = g_1 g_2, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= x_{i_1}^{\beta_1} \cdots x_{i_l}^{\beta_l} + V_p, \quad i_1 < \cdots < i_l, \quad 1 \leq \beta_t < p, \quad t = 1, \dots, l, \\ g_2 &= [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] + V_p, \quad j_1 < \cdots < j_{2m}. \end{aligned}$$

При этом одна из частей g_1 или g_2 может отсутствовать. Назовем g_1 *начальной частью* произведения g , g_2 – его *конечной частью*, а число l – *длиной* произведения g_1 .

Рассмотрим, как и в предыдущем случае, эндоморфизмы $\varphi = \varphi_{i,s,t}: A/V_p \rightarrow A/V_p$, полагая

$$\varphi_{i,s,t}(x_i + V_p) = x_i + [x_s, x_t] + V_p, \quad \varphi_{i,s,t}(x_j + V_p) = x_j + V_p \quad \text{для } j \neq i.$$

Учитывая, что $[x_s, x_r]^2 + V_p = V_p$, нетрудно проверить, что если g – произведение вида (8), то

$$\varphi(g) = \begin{cases} g, & \text{если } x_i + V_p \text{ не входит в } g_1, \\ g + \beta_i \tilde{g}_1 g_2 [x_s, x_t], & \text{если } x_i + V_p \text{ входит в } g_1. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{g}_1 = x_{i_1}^{\beta_1} \cdots x_i^{\beta_i-1} \cdots x_{i_l}^{\beta_l} + V_p$, т.е. $\tilde{g}_1$ – произведение, которое отличается от g_1 тем, что порождающий $x_i + V_p$ входит в $\tilde{g}_1$ в степени на 1 меньше. Получаем

$$\varphi(g) - g = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i + V_p \text{ не входит в } g_1, \\ \beta_i \tilde{g}_1 g_2 [x_s, x_t], & \text{если } x_i + V_p \text{ входит в } g_1. \end{cases}$$

Пусть теперь $f = \sum_{t=1}^s \alpha_t g^{(t)} \in T$, где для всех $t = 1, \dots, s$ $\alpha_t \in F$, $\alpha_t \neq 0$, $g^{(t)}$ – попарно различные произведения вида (8).

Пусть

$$M_0 = \{g^{(t)} \mid t = 1, \dots, s\}.$$

Обозначим, как и раньше, символом l_t длину начальной части $g_1^{(t)}$ произведения $g^{(t)}$. Пусть $\max_{t=1, \dots, s} l_t = l_{\max}$. Положим

$$M_1 = \{g^{(t)} \in M_0 \mid l_t = l_{\max}\}.$$

Пусть $g^{(t_0)}$ – некоторый элемент из M_1 ,

$$g_1^{(t_0)} = x_{i_1}^{\delta_1} \cdots x_{i_l}^{\delta_l} + V_p, \quad \text{где } \delta_i > 0 \text{ для } i = 1, \dots, l = l_{\max}.$$

Положим

$$M_2 = \{g^{(t)} \in M_1 \mid g_1^{(t)} = x_{i_1}^{\gamma_1} \cdots x_{i_l}^{\gamma_l} + V_p, \gamma_1, \dots, \gamma_l > 0\}.$$

Таким образом, M_2 – множество всех тех элементов $g^{(t)} \in M_1$, в начальную часть которых входят те же порождающие $x_{i_1} + V_p, \dots, x_{i_l} + V_p$, что и в начальную часть $g^{(t_0)}$. Выберем $g^{(1)} \in M_2$ такой, что $g_1^{(1)} = x_{i_1}^{\beta_1} \cdots x_{i_l}^{\beta_l} + V_p$ и для любого произведения

$$g^{(t)} \in M_2, \quad t \neq 1, \quad \text{где } g_1^{(t)} = x_{i_1}^{\gamma_1} \cdots x_{i_l}^{\gamma_l} + V_p,$$

либо $g_1^{(t)} = g_1^{(1)}$, либо найдется $r = r(t) \in \mathbb{N}$ такое, что $\beta_r > \gamma_r$, но $\beta_u = \gamma_u$ для всех $u < r$.

Пусть q_1 – максимальный индекс такой, что $x_{q_1} + V_p$ входит в f . Положим

$$f_0^{(1)} = f, \quad f_1^{(1)} = \varphi_{i_1, q_1+1, q_1+2}(f_0^{(1)}) - f_0^{(1)}.$$

Тогда $f_1^{(1)} \in T$, причем $f_1^{(1)} = \sum_t \alpha_t (\varphi_{i_1, q_1+1, q_1+2}(g^{(t)}) - g^{(t)})$ и

$$\varphi_{i_1, q_1+1, q_1+2}(g^{(t)}) - g^{(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{i_1} + V_p \text{ не входит в } g_1^{(t)}, \\ \beta_{t1} \tilde{g}_1^{(t)} g_2^{(t)} [x_{q_1+1}, x_{q_1+2}], & \text{если } x_{i_1} + V_p \text{ входит в } g_1^{(t)}. \end{cases}$$

(Здесь β_{t1} — степень, в которой x_{i_1} входит в $g_1^{(t)}$.)

Положим далее

$$\begin{aligned} f_2^{(1)} &= \varphi_{i_1, q_1+3, q_1+4}(f_1^{(1)}) - f_1^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ f_{\beta_1}^{(1)} &= \varphi_{i_1, q_1+2\beta_1-1, q_1+2\beta_1}(f_{\beta_1-1}^{(1)}) - f_{\beta_1-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Посмотрим, что произойдет с каждым из произведений $g^{(t)} \in M_0$ в результате такого процесса преобразования элемента $f = f_0^{(1)} = \sum_{t=1}^s \alpha_t g^{(t)}$ в $f_{\beta_1}^{(1)}$.

Пусть $g^{(t)} \in M_0$. Возможны следующие варианты. Если в произведение $g_1^{(t)}$ порождающий $x_{i_1} + V_p$ не входит, то после первого шага $g^{(t)}$ перейдет в 0. Если в произведение $g_1^{(t)}$ порождающий $x_{i_1} + V_p$ входит в степени $\gamma_1 < \beta_1$, то на каждом шаге эта степень будет убывать на 1, и на каком-то из шагов произведение $g^{(t)}$ также перейдет в 0. Если же в произведение $g_1^{(t)}$ порождающий $x_{i_1} + V_p$ входит в степени β_1 , то элемент $g^{(t)}$ перейдет в элемент $\bar{g}^{(t)}$, где $\bar{g}_1^{(t)}$ получается из $g_1^{(t)}$ исключением множителя $x_{i_1}^{\beta_1}$ (т.е. длина его начальной части уменьшилась на 1) и

$$\bar{g}_2^{(t)} = g_2^{(t)} [x_{q_1+1}, x_{q_1+2}] \cdots [x_{q_1+2\beta_1-1}, x_{q_1+2\beta_1}].$$

В частности, $\bar{g}_1^{(1)} = x_{i_2}^{\beta_2} \cdots x_{i_l}^{\beta_l} + V_p$. Положим $q_2 = q_1 + 2\beta_1$.

Рассмотрим теперь элемент $f_0^{(2)} = f_{\beta_1}^{(1)}$. Ясно, что $f_0^{(2)} \in T$. Ясно также, что можно считать (перенумеровывая, если нужно, слагаемые $\alpha_t g^{(t)}$ в элементе f), что $f_0^{(2)} = \sum_{t=1}^{s'} \alpha'_t \bar{g}^{(t)}$, где произведение $\bar{g}^{(t)}$ получено из $g^{(t)}$ описанными выше преобразованиями, а $\alpha'_t = \alpha_t \beta_1 \neq 0$ для всех t .

Положим

$$\begin{aligned} f_1^{(2)} &= \varphi_{i_2, q_2+1, q_2+2}(f_0^{(2)}) - f_0^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ f_{\beta_2}^{(2)} &= \varphi_{i_2, q_2+2\beta_2-1, q_2+2\beta_2}(f_{\beta_2-1}^{(2)}) - f_{\beta_2-1}^{(2)}, \\ f_0^{(3)} &= f_{\beta_2}^{(2)}, \\ f_1^{(3)} &= \varphi_{i_3, q_3+1, q_3+2}(f_0^{(3)}) - f_0^{(3)}, \\ &\dots\dots\dots \\ f_{\beta_l}^{(l)} &= \varphi_{i_l, q_l+2\beta_l-1, q_l+2\beta_l}(f_{\beta_l-1}^{(l)}) - f_{\beta_l-1}^{(l)}, \end{aligned}$$

где $q_u = q_{u-1} + 2\beta_{u-1}$ для $u = 2, \dots, l$. Посмотрим, что произойдет с каждым произведением $g^{(t)} \in M_0$ в результате такого процесса преобразования элемента $f = f_0^{(1)}$ в $f_{\beta_l}^{(l)}$.

Если элемент $g^{(t)} \in M_0 \setminus M_1$, то $l_t < l$. Следовательно, найдется порождающий $x_{i_j} + V_p$, который входит в $g_1^{(1)}$, но не входит в $g_1^{(t)}$, и, значит, элемент $g^{(t)}$ перейдет в 0.

Если элемент $g^{(t)}$ лежит в $M_1 \setminus M_2$, то так как набор порождающих, входящих в $g_1^{(t)}$, не совпадает с набором порождающих, входящих в $g_1^{(1)}$, такое произведение $g^{(t)}$ также перейдет в 0.

Если $g^{(t)} \in M_2$, то либо для некоторого порождающего $x_{i_j} + V_p$ $\gamma_j < \beta_j$ и $\gamma_u = \beta_u$ для $u < j$ (γ_u – степени, в которых $x_{i_j} + V_p$ входят в $g_1^{(t)}$), и тогда произведение $g^{(t)}$ перейдет в 0 уже в элементе $f_{\beta_j}^{(j)}$, либо $g_1^{(t)} = g_1^{(1)}$, тогда $g^{(t)}$ перейдет в итоге в элемент

$$\bar{g}^{(t)} = \bar{g}_2^{(t)} = g_2^{(t)} [x_{q_1+1}, x_{q_1+2}] \cdots [x_{q_l+2\beta_l-1}, x_{q_l+2\beta_l}],$$

т.е. в элемент вида (8), у которого отсутствует начальная часть.

Таким образом, перенумеровывая еще раз, если необходимо, слагаемые $\alpha_t g^{(t)}$ в элементе f , получаем, что $f_{\beta_l}^{(l)} = \sum_{t=1}^{s''} \alpha_t'' \bar{g}^{(t)}$, где для всех t имеем $\alpha_t'' \in F$, $\alpha_t'' \neq 0$, $\bar{g}^{(t)} = g_2^{(t)} c$, а

$$c = [x_{q_1+1}, x_{q_1+2}] \cdots [x_{q_l+2\beta_l-1}, x_{q_l+2\beta_l}].$$

Как было показано выше, для всех $t = 1, \dots, s''$ выполнено $g_1^{(t)} = g_1^{(1)}$. Поскольку все произведения $g^{(t)} = g_1^{(t)} g_2^{(t)}$ попарно различны, а начальные части у них совпадают (и равны $g_1^{(1)}$), получаем, что конечные части $g_2^{(t)}$ этих произведений попарно различны. С учетом определения конечной части и тождества (4) это означает, что множества порождающих, входящих в $g_2^{(t)}$, попарно различаются.

Пусть теперь $\bar{g}^{(t_0)}$ – произведение, в которое входит минимальное количество порождающих среди произведений, входящих в $f_{\beta_l}^{(l)}$, и пусть $x_{k_1} + V_p, \dots, x_{k_{2n}} + V_p$ – эти порождающие. Рассмотрим эндоморфизм $\tau = \tau_{k_1, \dots, k_{2n}}: A/V_p \rightarrow A/V_p$, где

$$\tau(x_{k_t} + V_p) = x_{k_t} + V_p \quad \text{для } t = 1, \dots, 2n, \quad \tau(x_j + V_p) = 0 \quad \text{для } j \neq k_1, \dots, k_{2n}.$$

Тогда $\tau(\bar{g}^{(t_0)}) = \bar{g}^{(t_0)}$ и $\tau(\bar{g}^{(t)}) = 0$ для всех $t \neq 0$, поэтому

$$\tau(f_{\beta_l}^{(l)}) = \beta [x_{k_1}, x_{k_2}] \cdots [x_{k_{2n-1}}, x_{k_{2n}}] + V_p \in T,$$

где $\beta \in F$, $\beta \neq 0$.

Ясно, что $\tau(f_{\beta_l}^{(l)}) \in T$. Применим далее автоморфизм алгебры A/V_p , действующий как подстановка на множестве порождающих, и получим

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] + V_p \in T,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3 доказана.

3. Доказательство теоремы 5. Пусть K – нётерово коммутативно-ассоциативное кольцо с 1, A – свободная ассоциативная K -алгебра со свободными порождающими x_i , $i \in \Omega$. Нетрудно проверить, что достаточно доказать теорему в случае, когда A – свободная алгебра без единицы счетного ранга, т.е. когда $\Omega = \mathbb{N}$.

Пусть n и N – произвольные натуральные числа, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(n)$ – многообразие ассоциативных алгебр над K , задаваемое тождеством (1). Пусть V – T -идеал в A , соответствующий многообразию $\mathbf{V}$, так что A/V – свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$ со свободными порождающими $x_i + V$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть S – множество всех элементов алгебры A , в которые каждый свободный порождающий x_i , $i \in \mathbb{N}$, входит в степени не выше N . Ясно, что S – K -подмодуль алгебры A . Для доказательства теоремы 5 нужно показать, что в A/V конечно порождены все T -пространства, порожденные элементами из образа $\overline{S} = (S + V)/V$ множества S .

Обозначим символом Φ множество всех сохраняющих порядок отображений φ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в себя (т.е. таких φ , что если $k, l \in \mathbb{N}$ и $k < l$, то $\varphi(k) < \varphi(l)$). Тем же символом Φ мы будем обозначать множество всех таких эндоморфизмов $\varphi: A \rightarrow A$, что $\varphi(x_i) = x_{\varphi(i)}$, $i \in \mathbb{N}$. Обозначим символом Θ множество всех таких эндоморфизмов $\theta_{kl}: A \rightarrow A$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, что

$$\theta_{kl}(x_i) = \begin{cases} x_k x_l, & \text{если } i = l, \\ x_i, & \text{если } i \neq l. \end{cases}$$

И, наконец, символом Λ мы будем обозначать множество эндоморфизмов $\lambda: A \rightarrow A$ таких, что

$$\lambda = \theta_{k_1 l_1} \theta_{k_2 l_2} \cdots \theta_{k_q l_q} \cdot \varphi, \quad (9)$$

где $q \geq 0$, $\theta_{k_1 l_1}, \theta_{k_2 l_2}, \dots, \theta_{k_q l_q} \in \Theta$, $\varphi \in \Phi$, $k_i \notin \varphi(\mathbb{N})$ при $i = 1, 2, \dots, q$, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Назовем (Λ, K) -подмодулем в A K -подмодуль, замкнутый относительно всех эндоморфизмов семейства Λ . Нетрудно проверить, что S является (Λ, K) -подмодулем.

Пусть I – идеал алгебры A , порожденный всеми коммутаторами $[f, g]$, $f, g \in A$. Нетрудно проверить, что $I^n = V$, так что $A/V = A/I^n$. Так как I является (Λ, K) -подмодулем и это же верно для I^k при любом k , то понятие (Λ, K) -подмодуля естественным образом определено для факторалгебры A/I^k . Ясно, что $\overline{S}$ – (Λ, K) -подмодуль в A/V .

Мы получим утверждение теоремы как следствие следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Всякий (Λ, K) -подмодуль в $\overline{S} = (S + I^n)/I^n$ конечно порожден (как (Λ, K) -подмодуль).*

Доказательство леммы 1 будем проводить индукцией по n . При $n = 0$ доказываемое утверждение верно, поскольку в этом случае $I^n = A$ и $A/I^n = \{0\}$.

Пусть теперь $n > 0$, и пусть уже доказано, что в $(S + I^{n-1})/I^{n-1}$ все (Λ, K) -подмодули конечно порождены. Пусть U – произвольный (Λ, K) -подмодуль в S . Пусть

$$\overline{U} = (U + I^n)/I^n, \quad J = I^{n-1}/I^n.$$

Чтобы доказать лемму 1, нужно показать, что $\overline{U}$ – конечно порожденный (Λ, K) -подмодуль в $\overline{S}$. Ясно, что $(U + I^{n-1})/I^{n-1}$ и $\overline{U} \cap J$ – (Λ, K) -подмодули в $(S + I^{n-1})/I^{n-1}$ и $\overline{S} \cap J$ соответственно. Если эти (Λ, K) -подмодули конечно порождены, то $\overline{U}$ – также

конечно порожденный (Λ, K) -подмодуль, поскольку он является расширением $\overline{U} \cap J$ с помощью $(U + I^{n-1})/I^{n-1} \simeq (\overline{U} + J)/J$. Заметим, что $(U + I^{n-1})/I^{n-1}$ – конечно порожденный (Λ, K) -подмодуль по предположению индукции. Значит, лемма 1 будет доказана, если показать, что $\overline{U} \cap J$ – конечно порожденный (Λ, K) -подмодуль. Конечная порожденность последнего (Λ, K) -подмодуля вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Всякий (Λ, K) -подмодуль в $\overline{S} \cap J$ конечно порожден.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что в $\overline{S} \cap J$ стабилизируются любые возрастающие цепочки (Λ, K) -подмодулей.

Любой элемент из $J = I^{n-1}/V$ можно представить как линейную комбинацию элементов вида

$$g_1[x_{m_1}, x_{m_2}]g_2[x_{m_3}, x_{m_4}]g_3 \cdots [x_{m_{2n-3}}, x_{m_{2n-2}}]g_n + V, \quad (10)$$

где для любого i выполнено или $g_i = 1$, или g_i – (некоммутативный) одночлен от порождающих x_k , $k \in \mathbb{N}$, алгебры A . Заметим, что если $g_i \equiv g'_i \pmod{I}$, то

$$\begin{aligned} & g_1[x_{m_1}, x_{m_2}]g_2[x_{m_3}, x_{m_4}]g_3 \cdots [x_{m_{2n-3}}, x_{m_{2n-2}}]g_n + V \\ &= g'_1[x_{m_1}, x_{m_2}]g'_2[x_{m_3}, x_{m_4}]g'_3 \cdots [x_{m_{2n-3}}, x_{m_{2n-2}}]g'_n + V, \end{aligned}$$

т.е. элементы g_i в выражении (10) можно считать коммутативными одночленами от переменных x_k .

Пусть M – множество всех (формальных) произведений вида (10) таких, что $m_1, m_2, \dots, m_{2n-2} \in \mathbb{N}$ и для любого i множитель g_i равен 1 или $g_i = x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \cdots x_{s_i}^{\alpha_{is_i}}$, $\alpha_{it} \geq 0$, $\alpha_{is_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$,

$$\alpha_{1t} + \alpha_{2t} + \cdots + \alpha_{nt} + \tilde{d}_t \leq N$$

для любого $t \in \mathbb{N}$, где $\tilde{d}_t$ – количество раз, которое число t входит в последовательность $(m_1, m_2, \dots, m_{2n-2})$. При $n = 1$ определим M как множество одночленов $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_s^{\alpha_s} + I$ таких, что $\alpha_s > 0$, $0 \leq \alpha_t \leq N$ для всех t . Нетрудно проверить, что любой элемент из $\overline{S} \cap J = ((S \cap I^{n-1}) + V)/V$ можно представить как линейную комбинацию элементов из M .

Подчеркнем, что мы рассматриваем элементы множества M как формальные выражения: два различных выражения вида (10) считаются разными элементами множества M , даже если они представляют один и тот же элемент алгебры A/V (например, если они оба равны 0). Введем на M линейный порядок $\leq$. Пусть $a, a' \in M$,

$$\begin{aligned} a &= x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \cdots [x_{m_1}, x_{m_2}] x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} \cdots [x_{m_{2n-3}}, x_{m_{2n-2}}] x_1^{\alpha_{n1}} x_2^{\alpha_{n2}} \cdots, \\ a' &= x_1^{\alpha'_{11}} x_2^{\alpha'_{12}} \cdots [x_{m'_1}, x_{m'_2}] x_1^{\alpha'_{21}} x_2^{\alpha'_{22}} \cdots [x_{m'_{2n-3}}, x_{m'_{2n-2}}] x_1^{\alpha'_{n1}} x_2^{\alpha'_{n2}} \cdots. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим символом $\leq$ лексикографический порядок на множестве $\mathbb{N}^{2n-2}$, и тем же символом – лексикографический “справа налево” порядок на множестве $\{0, 1, \dots, N\}^n$. Положим $a < a'$, если

$$(m_1, m_2, \dots, m_{2n-2}) < (m'_1, m'_2, \dots, m'_{2n-2})$$

или $m_i = m'_i$ для всех i и существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что

$$(\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \dots, \alpha_{ns}) < (\alpha'_{1s}, \alpha'_{2s}, \dots, \alpha'_{ns}),$$

но $\alpha_{jt} = \alpha'_{jt}$ для всех $t > s$ и всех j . Ясно, что $\leq$ – полный линейный порядок на M .

Пусть $a, b \in M, a > b$. Пусть a имеет вид (11), и пусть

$$\lambda = \theta_{k_1 l_1} \cdots \theta_{k_q l_q} \cdot \varphi \in \Lambda, \quad \text{где } \{l_1, \dots, l_q\} \cap \{\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_{2n-2})\} = \emptyset.$$

Тогда можно проверить, что

$$\lambda(a) \in M, \quad \lambda(b) = \sum_{i=1}^v b_i, \quad \text{где } b_i \in M, \quad \lambda(a) > b_i \quad \text{для всех } i = 1, \dots, v.$$

Пусть $W = \{0, 1, 2, \dots, N\}^n \times \{0, 1\}^{2n-2}$. Обозначим символом $V(W, 0)$ множество всех бесконечных последовательностей $\{w_i\}$ элементов из W , в которых почти все элементы w_i равны $0 = (0, \dots, 0)$. Определим отображение $\xi: M \rightarrow V(W, 0)$, полагая

$$\begin{aligned} \xi(x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \cdots [x_{m_1}, x_{m_2}] x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} \cdots [x_{m_{2n-3}}, x_{m_{2n-2}}] x_1^{\alpha_{n1}} x_2^{\alpha_{n2}} \cdots) \\ = \{(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}, \gamma_{1i}, \dots, \gamma_{(2n-2)i})\}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{ti} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = m_t, \\ 0, & \text{если } i \neq m_t. \end{cases}$$

Ясно, что ξ – инъективное отображение.

Определим на множестве $V(W, 0)$ преобразования $\varphi \in \Phi$ и $\theta_{kl} \in \Theta, k, l \in \mathbb{N}, k < l$, полагая $\varphi(\{a_i\}) = \{b_i\}$ и $\theta_{kl}(\{a_i\}) = \{c_i\}$, где

$$b_i = \begin{cases} a_j, & \text{если } i = \varphi(j), \\ 0, & \text{если } i \notin \varphi(\mathbb{N}); \end{cases} \quad c_i = \begin{cases} a_l, & \text{если } i = k, \\ a_i, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Наконец, определим на $V(W, 0)$ отображения $\lambda \in \Lambda$ так же, как в (9), с теми же ограничениями на индексы k_i .

Рассмотрим на $V(W, 0)$ бинарное отношение $\leq_\Lambda$, полагая $\{a_i\} \leq_\Lambda \{b_i\}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda(\{a_i\}) = \{b_i\}$. Из [17, лемма 3.3] следует, что $\leq_\Lambda$ – полный частичный порядок на $V(W, 0)$, т.е. что любая бесконечная последовательность $v_1, v_2, \dots$ элементов из $V(W, 0)$ содержит бесконечную неубывающую подпоследовательность $v_{i_1} \leq_\Lambda v_{i_2} \leq_\Lambda \dots, i_1 < i_2 < \dots$.

Можно проверить, что если $a, a' \in M, \xi(a) \leq_\Lambda \xi(a')$, то существует такой эндоморфизм $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda(a) = a'$, причем если a имеет вид (11) и $\lambda = \theta_{k_1 l_1} \cdots \theta_{k_q l_q} \cdot \varphi$, то

$$\{l_1, \dots, l_q\} \cap \{\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_{2n-2})\} = \emptyset.$$

Отсюда, используя стандартные рассуждения от противного (смотри, например [18, теорема 5.2.7]), мы получаем, что в $\overline{S} \cap J$ стабилизируются возрастающие цепочки (Λ, K) -подмодулей или, другими словами, что в $\overline{S} \cap J$ все (Λ, K) -подмодули конечно порождены. Лемма 2, а с ней и лемма 1, доказаны.

Теперь все готово для завершения доказательства теоремы 5. Пусть U – произвольное T -пространство алгебры A , порожденное (как T -пространство) некоторыми элементами из S . Пусть $\overline{U} = (U + V)/V$. Ясно, что тогда $\overline{U}$ порождается множеством $\overline{U} \cap \overline{S}$, а $\overline{U} \cap \overline{S}$ является (Λ, K) -подмодулем в $\overline{S}$. По лемме 1 $\overline{U} \cap \overline{S}$ – конечно порожденный (Λ, K) -подмодуль. Пусть $f_1 + V, \dots, f_k + V$ – порождающие этого (Λ, K) -подмодуля, тогда они же порождают $\overline{U}$ как T -пространство. Таким образом, T -пространство $\overline{U}$ конечно порождено, что и требовалось доказать.

Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тожества // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1988. С. 117–240.
- [2] Бокуть Л. А., Львов И. В., Харченко В. К. Некоммутативные кольца // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–116.
- [3] Drensky V. S. Free Algebras and PI-Algebras. Graduate Course in Algebra. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.
- [4] Rowen L. H. Ring Theory. Boston: Academic Press, 1991.
- [5] Specht W. Gesetze in Ringen // Math. Z. 1950. V. 52. P. 557–589.
- [6] Кемер А. Р. Многообразия $\mathbb{Z}_2$ -градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 5. С. 1042–1059.
- [7] Кемер А. Р. Конечная базисуемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. С. 597–641.
- [8] Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 47–66.
- [9] Гришин А. В. Примеры не конечной базисуемости T -пространств и T -идеалов в характеристике 2 // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 101–118.
- [10] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базисуемых T -идеалов // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 307–312.
- [11] Белов А. Я. Контрпримеры к проблеме Шпехта // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 13–24.
- [12] Grishin A. V. On non-Spechtianness of the variety of associative rings that satisfy the identity $x^{32} = 0$ // Electronic Research Announcements of the Amer. Math. Soc. 2000. № 6. P. 50–51.
- [13] Гришин А. В. О конечной базисуемости систем обобщенных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 899–927.
- [14] Чирипов П. Ж., Сидеров П. Н. О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Плиска. 1981. Т. 2. С. 103–115.
- [15] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базисуемых T -пространств // Матем. сб. 2000. Т. 191. С. 143–160.
- [16] Латышев В. Н. О выборе базы в одном T -идеале // Сиб. матем. ж. 1963. Т. 4. № 5. С. 1122–1126.
- [17] Красильников А. Н. О тождествах триангулируемых матричных представлений групп // Тр. ММО. 1989. Т. 52. С. 229–245.
- [18] Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

(Е. А. Киреева) Московский педагогический государственный университет
 (А. Н. Красильников) Университет г. Бразилиа, Бразилия
E-mail: eakir@rol.ru, alexei@mat.unb.br

Поступило
 15.10.2004