Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Кузнецов, Производные категории трехмерных многообразий Фано V_{12} , *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 579–594

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2615>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:32:44

УДК 514.762

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО V_{12}

А. Г. Кузнецов

В настоящей работе приводится описание производной категории когерентных пучков на трехмерном многообразии Фано индекса 1 и степени 12 (многообразии V_{12}). Легко показать, что если X – многообразие V_{12} , то его производная категория содержит исключительную пару векторных расслоений $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, где $\mathcal{O}_X$ – тривиальное расслоение, а $\mathcal{U}$ – мукаевское расслоение ранга 5 (индуцирующее вложение $X \rightarrow \mathrm{Gr}(5, 10)$). Ортогональную подкатегорию $\mathcal{A}_X = {}^\perp\langle \mathcal{U}, \mathcal{O} \rangle \subset \mathcal{D}^b(X)$ можно рассматривать как нетривиальную часть производной категории многообразия X . Основным результатом настоящей работы является конструкция эквивалентности категорий $\mathcal{A}_X \cong \mathcal{D}^b(C^\vee)$, где $C^\vee$ – кривая рода 7, которая может быть канонически сопоставлена многообразию X согласно результатам Илиева и Маркушевича. Для построения эквивалентности используются геометрические результаты Илиева и Маркушевича, а также результаты Бондала и Орлова о производных категориях. В качестве приложения доказывается, что поверхность Фано многообразия X (поверхность, параметризующая коники на X) изоморфна $S^2 C^\vee$ – симметрическому квадрату соответствующей кривой рода 7.

Библиография: 10 названий.

Введение. Настоящая работа является продолжением серии работ [1], [2], посвященных описанию производных категорий когерентных пучков на трехмерных многообразиях Фано. В данном случае объектом исследования являются многообразия типа V_{12} , которые согласно результатам Мукаи [3] можно представить в виде линейных сечений коразмерности 7 компоненты связности грассманиана $\mathrm{LGr}(5, 10)$ пятимерных подпространств в $\mathbb{C}^{10}$, лагранжевых относительно фиксированной невырожденной квадратичной формы. Легко показать, что производная категория такого многообразия X содержит исключительную пару векторных расслоений $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, где $\mathcal{U}$ – ограничение тавтологического подрасслоения с $\mathrm{LGr}(5, 10)$ на X . Вопрос, таким образом, сводится к описанию ортогонала

$$\mathcal{A}_X := {}^\perp\langle \mathcal{U}, \mathcal{O}_X \rangle \subset \mathcal{D}^b(X).$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00468 и № 02-01-01041, гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых, грант № МК-3926.2004.1, Американского фонда гражданских исследований CRDF, грант № RM1-2405-MO-02, а также Фонда содействия отечественной науке.

Мы доказываем, что на самом деле этот ортогонал эквивалентен производной категории кривой $C^\vee$ рода 7, которая является ортогональным линейным сечением (корузмерности 9) второй компоненты связности грассманиана $\mathrm{LGr}(5, 10)$. Для построения эквивалентности используется результат Илиева и Маркушевича [4], утверждающий, что кривая $C^\vee$ является тонким многообразием модулей расслоений на X . Универсальное расслоение на $X \times C^\vee$ задает строго полный функтор Фурье–Мукаи $\Phi_1: \mathcal{D}^b(C^\vee) \rightarrow \mathcal{A}_X$.

Для доказательства того, что Φ_1 – эквивалентность категорий, оказывается удобно рассматривать пары, состоящие из многообразия X и его гладкого гиперплоского сечения S . Легко видеть, что S – $K3$ -поверхность. Ортогональное линейное сечение второй компоненты связности грассманиана $\mathrm{LGr}(5, 10)$ – еще одна $K3$ -поверхность $S^\vee$, содержащая кривую $C^\vee$ в качестве гиперплоского сечения. Согласно результатам Илиева и Маркушевича [4] поверхность $S^\vee$ также является тонким многообразием модулей расслоений на S . Универсальное расслоение на $S \times S^\vee$ задает строго полный функтор Фурье–Мукаи $\Phi_2: \mathcal{D}^b(S^\vee) \rightarrow \mathcal{D}^b(S)$, который оказывается эквивалентностью категорий вследствие замечания Бриджланда [5] о том, что всякий строго полный функтор между производными категориями многообразий Калаби–Яу является эквивалентностью. Изучив связь функторов Φ_1 и Φ_2 , удастся вывести то, что функтор Φ_1 – также эквивалентность.

В качестве применения полученного описания производной категории многообразия X мы описываем поверхность Фано, параметризующую коники на X . Оказывается, что эта поверхность изоморфна $S^2 C^\vee$ – симметрическому квадрату соответствующей кривой рода 7. Для доказательства мы раскладываем структурный пучок произвольной коники по полученному полуортогональному разложению категории и замечаем, что его компонента в $\mathcal{D}^b(C^\vee)$ является структурным пучком подсхемы длины два в $C^\vee$, что и дает искомый изоморфизм.

Приведем теперь краткое описание содержания данной работы. В п. 1 напоминаются основные результаты Мукаи и Илиева–Маркушевича о многообразиях V_{12} . В п. 2 исследуются универсальные расслоения на $X \times C^\vee$ и $S \times S^\vee$ и описывается их взаимосвязь. В п. 3 вычисляются когомологии некоторых расслоений. В п. 4 доказывается теорема о полуортогональном разложении категории $\mathcal{D}^b(X)$. В п. 5 приводится описание поверхности Фано многообразия X .

1. Предварительные сведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [6], [7]. Многообразие V_{12} – это гладкое трехмерное многообразие Фано X индекса 1 с $\mathrm{Pic} X = \mathbb{Z}$ и $(-K_X)^3 = 12$.

Зафиксируем векторное пространство $V = \mathbb{C}^{10}$ и невырожденную квадратичную форму Q на V . Обозначим через S^+V и S^-V спинорные (16-мерные) представления спинорной группы $\mathrm{Spin}(Q)$. Напомним, что пространства $S^\pm V$ совпадают с (двойственными) пространствами глобальных сечений обильных образующих групп Пикара связанных компонент $\mathrm{LGr}_\pm(V)$ лагранжева грассманиана пространства V относительно Q . В частности, имеем канонические вложения $\mathrm{LGr}_\pm(V) \rightarrow \mathbb{P}(S^\pm V)$.

Выберем пару векторных подпространств $A_8 \subset A_9 \subset S^+V$ таких, что $\dim A_i = i$, и рассмотрим пересечения

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{LGr}_+(V) \cap \mathbb{P}(A_8) \subset \mathbb{P}(S^+V), \\ X &= \mathrm{LGr}_+(V) \cap \mathbb{P}(A_9) \subset \mathbb{P}(S^+V). \end{aligned} \tag{1}$$

Легко показать, что если X гладко, то X – многообразие V_{12} , а если S гладко, то S – поляризованная $K3$ -поверхность степени 12.

ТЕОРЕМА 1.2 [3]. *Если X – многообразие V_{12} , а $S \subset X$ – гладкая $K3$ -поверхность, то существует такая пара векторных подпространств $A_8 \subset A_9 \subset S^+V$, что S и X получаются как в (1).*

Напомним, что спинорные представления S^-V и S^+V канонически двойственны друг другу; обозначим через $B_7 \subset B_8 \subset S^-V$ ортогональные подпространства;

$$B_i = A_{16-i}^\perp \subset S^+V^* \cong S^-V,$$

и рассмотрим двойственную пару

$$\begin{aligned} C^\vee &= \mathrm{LGr}_-(V) \cap \mathbb{P}(B_7) \subset \mathbb{P}(S^-V), \\ S^\vee &= \mathrm{LGr}_-(V) \cap \mathbb{P}(B_8) \subset \mathbb{P}(S^-V). \end{aligned} \quad (2)$$

Как и выше, легко показать, что если $S^\vee$ гладко, то $S^\vee$ – поляризованная $K3$ -поверхность степени 12, а если $C^\vee$ гладко, то $C^\vee$ – канонически вложенная кривая рода 7.

Обозначим через H_X , L_X и P_X классы гиперплоского сечения, прямой и точки в $H^\bullet(X, \mathbb{Z})$ соответственно. Аналогичные обозначения используются также для многообразий S , $S^\vee$ и $C^\vee$. Например, $P_{S^\vee} \in H^4(S^\vee, \mathbb{Z})$ обозначает класс точки на $S^\vee$.

Обозначим через $\mathcal{U}_+$ и $\mathcal{U}_-$ тавтологические подрасслоения на $\mathrm{LGr}_+(V) \subset \mathrm{Gr}(5, V)$ и $\mathrm{LGr}_-(V) \subset \mathrm{Gr}(5, V)$ соответственно, а через $\mathcal{U}_{+x}$ и $\mathcal{U}_{-y}$ – их слои в точках $x \in \mathrm{LGr}_+(V)$ и $y \in \mathrm{LGr}_-(V)$.

Напомним, как связана каноническая двойственность многообразий $\mathrm{LGr}_\pm(V)$ с пересечением подпространств.

ЛЕММА 1.3. *Пусть $x \in \mathrm{LGr}_+(V) \subset \mathbb{P}(S^-V)$, $y \in \mathrm{LGr}_-(V) \subset \mathbb{P}(S^+V)$, и обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание на $S^+V \times S^-V$, индуцирующее двойственность. Тогда*

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\neq 0 \iff \mathcal{U}_{+x} \cap \mathcal{U}_{-y} = 0, \\ \langle x, y \rangle &= 0 \iff \dim(\mathcal{U}_{+x} \cap \mathcal{U}_{-y}) \geq 2. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $(x, y) \in X \times C^\vee$ или $(x, y) \in S \times S^\vee$ имеем

$$\dim(\mathcal{U}_{+x} \cap \mathcal{U}_{-y}) \geq 2.$$

ЛЕММА 1.4 [4]. *Выполняются следующие эквивалентности:*

- (i) $C^\vee$ гладкая $\iff X$ гладкое $\iff$ для всех $x \in X$, $y \in C^\vee$ имеем $\dim(\mathcal{U}_{+x} \cap \mathcal{U}_{-y}) = 2$;
- (ii) $S^\vee$ гладкая $\iff S$ гладкая $\iff$ для всех $x \in S$, $y \in S^\vee$ имеем $\dim(\mathcal{U}_{+x} \cap \mathcal{U}_{-y}) = 2$.

Следующая теорема объясняет внутренний смысл кривой $C^\vee$ и поверхности $S^\vee$ с точки зрения X и S соответственно.

ТЕОРЕМА 1.5 [4]. i) Кривая $C^\vee$ является тонким многообразием модулей стабильных расслоений E ранга 2 на X с классами Черна $c_1(E) = H_X$, $c_2(E) = 5L_X$. Если $E_y, E_{y'}$ – расслоения на X , соответствующие точкам $y, y' \in C^\vee$, то

$$\mathrm{Ext}^p(E_y, E_{y'}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } p = 0, 1 \text{ и } y = y', \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

ii) Поверхность $S^\vee$ является тонким многообразием модулей стабильных расслоений E ранга 2 на S с классами Черна $c_1(E) = H_S$, $c_2(E) = 5P_S$. Если $E_y, E_{y'}$ – расслоения на S , соответствующие точкам $y, y' \in S^\vee$, то

$$\mathrm{Ext}^p(E_y, E_{y'}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } p = 0, 2 \text{ и } y = y', \\ \mathbb{C}^2, & \text{если } p = 1 \text{ и } y = y', \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Универсальные расслоения. Рассмотрим одно из следующих произведений:

$$W_1 = X \times C^\vee \quad \text{или} \quad W_2 = S \times S^\vee.$$

Обозначим через $\mathcal{U}_+$ и $\mathcal{U}_-$ обратные образы тавтологических подрасслоений $\mathrm{LGr}_+(V)$ и $\mathrm{LGr}_-(V)$ на $W_i \subset \mathrm{LGr}_+(V) \times \mathrm{LGr}_-(V)$ и рассмотрим следующие композиции естественных морфизмов векторных расслоений на W_i :

$$\xi_i: \mathcal{U}_- \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{W_i} \xrightarrow{Q} V^* \otimes \mathcal{O}_{W_i} \rightarrow \mathcal{U}_+^*.$$

ЛЕММА 2.1. Если X (соответственно S) гладко, то ранг ξ_1 (соответственно ξ_2) равен 3 во всякой точке W_1 (соответственно W_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро естественной сюръекции $V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{LGr}_+(V)} \rightarrow \mathcal{U}_+^*$ равно $\mathcal{U}_+$, поэтому достаточно показать, что для всех точек $(x, y) \in W_i \subset \mathrm{LGr}_+(V) \times \mathrm{LGr}_-(V)$ имеем $\dim(\mathcal{U}_{+x} \cap \mathcal{U}_{-y}) = 2$, что немедленно вытекает из леммы 1.3.

ЛЕММА 2.2. Имеем $\mathrm{Ker} \xi_i \cong (\mathrm{Coker} \xi_i)^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками на W_i :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{U}_- & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_{W_i} & \longrightarrow & \mathcal{U}_-^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \xi_i & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{U}_+^* & \longrightarrow & \mathcal{U}_+^* & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \end{array}.$$

Заметим, что средняя вертикальная стрелка сюръективна, а ее ядро равно $\mathcal{U}_+$. Следовательно, длинная последовательность ядер и коядер имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Ker} \xi_i \rightarrow \mathcal{U}_+ \rightarrow \mathcal{U}_-^* \rightarrow \mathrm{Coker} \xi_i \rightarrow 0.$$

Далее, легко видеть, что отображение $\mathcal{U}_+ \rightarrow \mathcal{U}_-^*$ в этой последовательности двойственно к отображению ξ_i^* . Отсюда немедленно вытекает, что $\mathrm{Ker} \xi_i \cong \mathrm{Ker}(\xi_i^*) \cong (\mathrm{Coker} \xi_i)^*$.

Обозначим через $\mathcal{E}_i$ коядро морфизма ξ_i на W_i . Из леммы 2.1 следует, что $\mathcal{E}_i$ является расслоением ранга 2 на W_i , и имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_i^* \rightarrow \mathcal{U}_- \xrightarrow{\xi_i} \mathcal{U}_+^* \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow 0. \quad (3)$$

Дуализируя, получаем еще одну последовательность:

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_i^* \rightarrow \mathcal{U}_+ \xrightarrow{\xi_i^*} \mathcal{U}_-^* \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow 0. \quad (4)$$

ЛЕММА 2.3. *Классы Черна расслоений $\mathcal{E}_i$ имеют вид*

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{E}_1) &= H_X + H_{C^\vee}, & c_2(\mathcal{E}_1) &= \frac{7}{12}H_X H_{C^\vee} + 5L_X + \eta, \\ c_1(\mathcal{E}_2) &= H_S + H_{S^\vee}, & c_2(\mathcal{E}_2) &= \frac{7}{12}H_S H_{S^\vee} + 5P_S + 5P_{S^\vee}, \end{aligned}$$

где

$$\eta \in (H^3(X, \mathbb{C}) \otimes H^1(C^\vee, \mathbb{C})) \cap H^4(X \times C^\vee, \mathbb{Z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) следует, что

$$\mathrm{ch}(\mathcal{U}_+^*) - \mathrm{ch}(\mathcal{U}_-) = \mathrm{ch}(\mathcal{E}_i) - \mathrm{ch}(\mathcal{E}_i^*) = 2 \mathrm{ch}_1(\mathcal{E}_i) + 2 \mathrm{ch}_3(\mathcal{E}_i).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_1(\mathcal{E}_1) &= H_X + H_{C^\vee}, & \mathrm{ch}_3(\mathcal{E}_1) &= -\frac{1}{2}P_X, \\ \mathrm{ch}_1(\mathcal{E}_2) &= H_S + H_{S^\vee}, & \mathrm{ch}_3(\mathcal{E}_2) &= -\frac{1}{2}P_S - \frac{1}{2}P_{S^\vee}. \end{aligned}$$

Ясно, что $c_1(\mathcal{E}_i) = \mathrm{ch}_1(\mathcal{E}_i)$. Кроме того, из формулы Кюннета следует, что

$$c_2(\mathcal{E}_1) = a_1 H_X H_{C^\vee} + b_1 L_X + \eta, \quad c_2(\mathcal{E}_2) = a_2 H_S H_{S^\vee} + b_2 P_S + c_2 P_{S^\vee},$$

где $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Q}$, $\eta \in (H^3(X, \mathbb{C}) \otimes H^1(C^\vee, \mathbb{C})) \cap H^4(X \times C^\vee, \mathbb{Z})$. Поскольку соответствие $S \leftrightarrow S^\vee$ симметрично, заключаем, что $c_2 = b_2$. Наконец, числа a_i и b_i можно вычислить из равенства

$$3 c_1(\mathcal{E}_i) c_2(\mathcal{E}_i) = \mathrm{ch}_1(\mathcal{E}_i)^3 - 6 \mathrm{ch}_3(\mathcal{E}_i).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Пользуясь формулой Римана–Роха на $X \times C^\vee$, можно вычислить, что $\eta^2 = 14$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Расслоение $\mathcal{E}_1$ (соответственно $\mathcal{E}_2$) является универсальным расслоением ранга 2 с $c_1 = [H_X]$, $c_2 = 5[L_X]$ на X (соответственно с $c_1 = [H_S]$, $c_2 = 5[P_S]$ на S).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой точки $y \in C^\vee$ (соответственно $y \in S^\vee$) обозначим через $\mathcal{E}_{1y}$ ограничение $\mathcal{E}_1$ на $X \times y$ и через $\mathcal{E}_{2y}$ – ограничение $\mathcal{E}_2$ на $S \times y$. В леммах 3.3 и 3.5 будет показано, что расслоения $\mathcal{E}_{1y}$ на X при всех $y \in C^\vee$, а также расслоения $\mathcal{E}_{2y}$ на S при всех $y \in S^\vee$ стабильны; следовательно, существуют морфизмы

$$f_1: C^\vee \rightarrow \mathcal{M}_X(2, [H_X], 5[L_X]), \quad f_2: S^\vee \rightarrow \mathcal{M}_S(2, [H_S], 5[P_S]),$$

в многообразия модулей расслоений ранга 2 на X и S соответственно с указанными классами Черна такие, что

$$\mathcal{E}_1 = (\mathrm{id}_X \times f_1)^* \mathcal{E}'_1 \otimes q_1^* \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{E}_2 = (\mathrm{id}_S \times f_2)^* \mathcal{E}'_2 \otimes q_2^* \mathcal{L}_2, \quad (5)$$

где $\mathcal{E}'_1$ и $\mathcal{E}'_2$ – универсальные расслоения на $X \times \mathcal{M}_X(2, [H_X], 5[L_X])$ и $S \times \mathcal{M}_S(2, [H_S], 5[P_S])$ соответственно, $q_1: X \times C^\vee \rightarrow C^\vee$ и $q_2: S \times S^\vee \rightarrow S^\vee$ – проекции, а $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – линейные расслоения на $C^\vee$ и $S^\vee$.

Легко видеть, что морфизмы f_1 и f_2 совпадают с отображениями ρ , построенными в [4, раздел 4]. Следовательно, они являются изоморфизмами, а расслоения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ являются универсальными расслоениями.

Обозначим через

$$\alpha: S \rightarrow X \quad \text{и} \quad \beta: C^\vee \rightarrow S^\vee$$

вложения, и пусть

$$\lambda_1 = \alpha \times \text{id}_{C^\vee}, \quad \lambda_2 = \text{id}_S \times \beta, \quad \mu_1 = \text{id}_X \times \beta, \quad \mu_2 = \alpha \times \text{id}_{S^\vee}, \quad \nu = \alpha \times \beta.$$

Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & S \times C^\vee & \\ \lambda_1 \swarrow & \downarrow \nu & \searrow \lambda_2 \\ X \times C^\vee & & S \times S^\vee \\ \mu_1 \searrow & \downarrow & \swarrow \mu_2 \\ & X \times S^\vee & \end{array}.$$

ЛЕММА 2.6. *Имеем канонические изоморфизмы $\lambda_1^* \mathcal{E}_1 = \lambda_2^* \mathcal{E}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно, поскольку $\lambda_i^* \mathcal{E}_i$ является коядром морфизма $\lambda_i^* \xi_i$, а $\lambda_1^* \xi_1 = \lambda_2^* \xi_2$ по определению морфизмов ξ_i .

Обозначим расслоение $\lambda_1^* \mathcal{E}_1 = \lambda_2^* \mathcal{E}_2$ на $S \times C^\vee$ через $\mathcal{E}$.

Рассмотрим произведение $\widetilde{W} = X \times S^\vee$ и композицию гомоморфизмов

$$\tilde{\xi}: \mathcal{U}_i \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{W}} \xrightarrow{Q} V^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{W}} \rightarrow \mathcal{U}_+^*.$$

Ясно, что

$$\mu_i^* \tilde{\xi} = \xi_i. \quad (6)$$

ЛЕММА 2.7. *Ранг морфизма $\tilde{\xi}$ на $X \times S^\vee \setminus (\mu_1(X \times C^\vee) \cup \mu_2(S \times S^\vee))$ равен 5.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 1.3.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{E}}$ коядро морфизма $\tilde{\xi}$.

ЛЕММА 2.8. *Имеем точные последовательности на $X \times S^\vee$*

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_- \xrightarrow{\tilde{\xi}} \mathcal{U}_+^* \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mu_{1*} \mathcal{E}_1 \oplus \mu_{2*} \mathcal{E}_2 \rightarrow \nu_* \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая последовательность точна по лемме 2.7 и определению $\tilde{\mathcal{E}}$. Чтобы проверить точность второй последовательности, заметим, что $\mu_i^* \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_i$ по (6) и (3) и что канонические сюръекции $\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mu_{i*} \mu_i^* \tilde{\mathcal{E}} = \mu_{i*} \mathcal{E}_i$ склеиваются в сюръекцию

$$\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \text{Ker}(\mu_{1*} \mathcal{E}_1 \oplus \mu_{2*} \mathcal{E}_2 \rightarrow \nu_* \mathcal{E}).$$

С другой стороны, легко проверить, что характеры Черна пучков $\tilde{\mathcal{E}}$ и $\text{Ker}(\mu_{1*} \mathcal{E}_1 \oplus \mu_{2*} \mathcal{E}_2 \rightarrow \nu_* \mathcal{E})$ совпадают. Следовательно,

$$\tilde{\mathcal{E}} \cong \text{Ker}(\mu_{1*} \mathcal{E}_1 \oplus \mu_{2*} \mathcal{E}_2 \rightarrow \nu_* \mathcal{E})$$

и доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Имеем следующую точную последовательность на $X \times S^\vee$:*

$$0 \rightarrow \mu_{1*} \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{O}(-H_X) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mu_{2*} \mathcal{E}_2 \rightarrow 0.$$

3. Вычисление когомологий.

ЛЕММА 3.1. *Выполнены равенства*

$$\begin{aligned} \text{Ext}^k(\mathcal{U}_+, \mathcal{U}_+) &= H^k(X, \mathcal{U}_+^* \otimes \mathcal{U}_+) = \text{Ext}^k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \\ &= H^k(X, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \\ \text{Ext}^\bullet(\mathcal{O}_X, \mathcal{U}_+) &= H^\bullet(X, \mathcal{U}_+) = 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что X является полным пересечением $\mathbb{P}(A_9) \cap \text{LGr}_+(V) \subset \mathbb{P}(SPV)$ и $S^+V/A_9 = B_7^*$. Поэтому $X \subset \text{LGr}_+(V)$ является схемой нулей сечения расслоения $B_7^* \otimes \mathcal{O}_{\text{LGr}_+(V)}(H_{\text{LGr}_+(V)})$. Значит, комплекс Кошуля $\Lambda^\bullet(B_7^* \otimes \mathcal{O}_{\text{LGr}_+(V)}(H_{\text{LGr}_+(V)}))$ является резольвентой структурного пучка $\mathcal{O}_X$ на $\text{LGr}_+(V)$. Иначе говоря, имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Lambda^7(B_7 \otimes \mathcal{O}_{\text{LGr}_+(V)}(-H_{\text{LGr}_+(V)})) \rightarrow \cdots \rightarrow B_7 \otimes \mathcal{O}_{\text{LGr}_+(V)}(-H_{\text{LGr}_+(V)}) \\ \rightarrow \mathcal{O}_{\text{LGr}_+(V)} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Домножая ее на $\mathcal{U}_+$ или $\mathcal{U}_+^* \otimes \mathcal{U}_+$ и вычисляя когомологии возникающих эквивариантных расслоений на $\text{LGr}_+(V)$ по теореме Бореля–Ботта–Вейля [8], получаем искомые равенства.

Поскольку канонический класс X равен $-H_X$, по двойственности Серра получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Имеем*

$$H^\bullet(X, \mathcal{U}_+^*(-H_X)) = 0, \quad H^k(X, \mathcal{U}_+ \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{при } k = 3, \\ 0 & \text{при } k \neq 3. \end{cases}$$

ЛЕММА 3.3. При всех $y \in C^\vee$ имеем

$$H^p(X, \mathcal{E}_{1y}(-H_X)) = H^p(X, \mathcal{E}_{1y} \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X)) = 0.$$

В частности, расслоение $\mathcal{E}_{1y}$ стабильно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что по определению $C^\vee = \mathrm{LGr}_-(V) \cap \mathbb{P}(B_7)$, а $X = \mathrm{LGr}_+(V) \cap \mathbb{P}(A_9)$, где $A_9 = B_7^\perp$. Выберем 6-мерное подпространство $B_6 \subset B_7$ такое, что $\mathbb{P}(B_6)$ пересекает $C^\vee$ трансверсально и не содержит y . Положим $A_{10} = B_6^\perp$ и рассмотрим $\widehat{X} = \mathrm{LGr}_+(V) \cap \mathbb{P}(A_{10})$. Рассуждения леммы 1.4 показывают, что $\widehat{X}$ – гладкое четырехмерное многообразие Фано индекса 2, содержащее X как гиперплоское сечение. Более того, рассуждения, аналогичные использованным в лемме 2.8, показывают, что композиция

$$\widehat{\xi}: \mathcal{U}_{-y} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}} \rightarrow \mathcal{U}_+^*$$

инъективна, а ее коядро изоморфно прямому образу расслоения $\mathcal{E}_{1y}$ при вложении $i: X \rightarrow \widehat{X}$. Иначе говоря, мы имеем следующую точную последовательность на $\widehat{X}$:

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_{-y} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}} \rightarrow \mathcal{U}_+^* \rightarrow i_* \mathcal{E}_{1y} \rightarrow 0. \quad (7)$$

С другой стороны, пользуясь теоремой Бореля–Ботта–Вейля и резольвентой Кошуля многообразия $\widehat{X} \subset \mathrm{LGr}_+(V)$, можно вычислить

$$H^\bullet(\widehat{X}, \mathcal{U}_+^* \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_{\widehat{X}})) = H^\bullet(\widehat{X}, \mathcal{U}_+^*(-H_{\widehat{X}})) = H^\bullet(\widehat{X}, \mathcal{O}_{\widehat{X}}(-H_{\widehat{X}})) = 0,$$

и лемма следует из последовательностей когомологий, возникающих из точной последовательности (7), подкрученной на $\mathcal{O}_{\widehat{X}}(-H_{\widehat{X}})$ и $\mathcal{U}_+^*(-H_{\widehat{X}})$ соответственно, поскольку

$$\begin{aligned} H^\bullet(X, \mathcal{E}_{1y}(-H_X)) &= H^\bullet(\widehat{X}, i_* \mathcal{E}_{1y}(-H_{\widehat{X}})), \\ H^\bullet(X, \mathcal{E}_{1y} \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X)) &= H^\bullet(\widehat{X}, i_* \mathcal{E}_{1y} \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_{\widehat{X}})). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.4. При всех $y \in C^\vee$ имеем

$$H^1(X, \mathcal{E}_{1y}(-2H_X)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничивая точную последовательность (3) на $X = X \times \{y\} \subset X \times C^\vee$, подкручивая ее на $\mathcal{O}_X(-H_X)$ и учитывая лемму 2.3, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_{1y}(-2H_X) \rightarrow \mathcal{U}_{-y} \otimes \mathcal{O}_X(-H_X) \rightarrow \mathcal{U}_{+y}^*(-H_X) \rightarrow \mathcal{E}_{1y}(-H_X) \rightarrow 0.$$

Из следствия 3.2 и леммы 3.3 вытекает, что

$$H^1(X, \mathcal{E}_{1y}(-2H_X)) \cong \mathcal{U}_{-y} \otimes H^1(X, \mathcal{O}_X(-H_X)).$$

Далее по двойственности Серра получаем

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-H_X)) = H^2(X, \mathcal{O}_X)^*,$$

что равно нулю по лемме 3.1.

ЛЕММА 3.5. При всех $y \in S^\vee$ имеем

$$H^0(S, \mathcal{E}_{2y}(-H_S)) = 0.$$

В частности, расслоение $\mathcal{E}_{2y}$ стабильно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in C^\vee$, то $\mathcal{E}_{2y} = \mathcal{E}_{1y|_S}$, и лемма вытекает из точной последовательности

$$H^0(X, \mathcal{E}_{1y}(-H_X)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{E}_{2y}(-H_S)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{E}_{1y}(-2H_X)),$$

поскольку первый член равен 0 по лемме 3.3, а третий – по лемме 3.4.

Теперь заметим, что, зафиксировав S (а следовательно, и $S^\vee$) и варьируя B_7 , мы можем получить в качестве $C^\vee$ любое гладкое гиперплоское сечение поверхности $S^\vee$ и рассмотреть соответствующее ему гладкое многообразие $X \supset S$. Поскольку всякая точка $y \in S^\vee$ лежит на гладком гиперплоском сечении, приведенные выше рассуждения в применении к соответствующему X доказывают лемму.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. При всех $y \in C^\vee$ имеем

$$H^p(X, \mathcal{E}_{1y} \otimes \mathcal{U}_+(-H_X)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_+ \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{U}_+^* \rightarrow 0$$

на $\mathcal{E}_{1y}(-H_X)$ и рассмотрим соответствующую последовательность когомологий.

4. Производные категории. Рассмотрим функторы Фурье–Мукаи с ядрами $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$:

$$\begin{aligned} \Phi_1: \mathcal{D}^b(C^\vee) &\rightarrow \mathcal{D}^b(X), & \Phi_2: \mathcal{D}^b(S^\vee) &\rightarrow \mathcal{D}^b(S), \\ \Phi_i(-) &= R p_{i*}(L q_i^*(-) \otimes \mathcal{E}_i), \end{aligned}$$

где p_i и q_i – проекции на первый и второй сомножители:

$$\begin{array}{ccc} & X \times C^\vee & \\ p_1 \swarrow & & \searrow q_1 \\ X & & C^\vee \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & S \times S^\vee & \\ p_2 \swarrow & & \searrow q_2 \\ S & & S^\vee \end{array}.$$

ТЕОРЕМА 4.1. Функторы Φ_i строго полны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам Бондала и Орлова [9] достаточно проверить, что для структурных пучков любых двух точек $y_1, y_2 \in C^\vee$ (соответственно $y_1, y_2 \in S^\vee$) и всех $p \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\mathrm{Ext}^p(\Phi_i(\mathcal{O}_{y_1}), \Phi_i(\mathcal{O}_{y_2})) = \mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_{y_1}, \mathcal{O}_{y_2}).$$

С другой стороны, ясно, что $\Phi_i(\mathcal{O}_{y_k}) = \mathcal{E}_{iy_k}$, и остается использовать следствие 2.5 и теорему 1.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Функтор $\Phi_2: \mathcal{D}^b(S^\vee) \rightarrow \mathcal{D}^b(S)$ – эквивалентность категорий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам Бриджланда любой строго полный функтор между производными категориями $K3$ -поверхностей является эквивалентностью [5].

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \dots \mathcal{E}_1 \dots & C^\vee \\ \alpha \uparrow & & \downarrow \beta \\ S & \dots \mathcal{E}_2 \dots & S^\vee \end{array},$$

где пунктирная линия, соединяющая два многообразия, означает, что мы рассматриваем соответствующее ядро на их произведении. Из этой диаграммы возникает диаграмма функторов

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^b(X) & \xleftarrow{\Phi_1^*} & \mathcal{D}^b(C^\vee) \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \beta_* \\ \mathcal{D}^b(S) & \xleftarrow{\Phi_2} & \mathcal{D}^b(S^\vee) \end{array},$$

которая коммутативна по лемме 2.6, поскольку функтор $\alpha^* \circ \Phi_1$ задается ядром $\lambda_1^* \mathcal{E}_1$, а функтор $\Phi_2 \circ \beta_*$ – ядром $\lambda_2^* \mathcal{E}_2$.

Обозначим через

$$\Phi_1^*: \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(C^\vee) \quad \text{и} \quad \Phi_2^*: \mathcal{D}^b(S) \rightarrow \mathcal{D}^b(S^\vee)$$

левые сопряженные функторы. Стандартные вычисления показывают, что эти функторы задаются ядрами

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^*(-H_X)[3] &= \mathcal{E}_1(-2H_X - H_{C^\vee})[3] && \text{на } X \times C^\vee, \\ \mathcal{E}_2^*[2] &= \mathcal{E}_2(-H_S - H_{S^\vee})[2] && \text{на } S \times S^\vee \end{aligned}$$

соответственно.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^b(X) & \xrightarrow{\Phi_1^*} & \mathcal{D}^b(C^\vee) \\ \alpha^* \downarrow & & \downarrow \beta_* \\ \mathcal{D}^b(S) & \xrightarrow{\Phi_1^*} & \mathcal{D}^b(S^\vee) \end{array}.$$

Она уже не является коммутативной. Однако следующее предложение показывает, что она становится коммутативной при замене категории $\mathcal{D}^b(X)$ подкатегорией ${}^\perp\langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X \rangle \subset \mathcal{D}^b(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Функторы*

$$\beta_* \circ \Phi_1^* \quad \text{и} \quad \Phi_2^* \circ \alpha^*: \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(S^\vee)$$

изоморфны на подкатегории ${}^\perp\langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X \rangle \subset \mathcal{D}^b(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что функторы $\beta_* \circ \Phi_1^*$ и $\Phi_2^* \circ \alpha^*$ задаются ядрами

$$\mu_{1*} \mathcal{E}_1(-2H_X - H_{S^\vee})[3] \quad \text{и} \quad \mu_{2*} \mathcal{E}_2(-H_X - H_{S^\vee})[2]$$

соответственно на $X \times S^\vee$. Рассматривая спираль точной последовательности из следствия 2.9, подкрученную на $\mathcal{O}(-H_X - H_{S^\vee})$, мы видим, что существует выделенный треугольник

$$\mu_{2*} \mathcal{E}_2(-H_X - H_{S^\vee})[2] \rightarrow \mu_{1*} \mathcal{E}_1(-2H_X - H_{S^\vee})[3] \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}(-H_X - H_{S^\vee})[3].$$

Остается показать, что ядерный функтор $\mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(S^\vee)$, заданный ядром $\widetilde{\mathcal{E}}(-H_X - H_{S^\vee})$ зануляется на триангулированной подкатегории ${}^\perp \langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X \rangle \subset \mathcal{D}^b(X)$.

Заметим, что из леммы 2.8 следует, что пучок $\widetilde{\mathcal{E}}(-H_X - H_{S^\vee})$ изоморфен конусу морфизма

$$\mathcal{U}_-(-H_X - H_{S^\vee}) \rightarrow \mathcal{U}_+^*(-H_X - H_{S^\vee})$$

на $X \times S^\vee$, так что достаточно проверить, что ядерные функторы $\mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(S^\vee)$, заданные ядрами

$$\mathcal{U}_-(-H_X - H_{S^\vee}) \quad \text{и} \quad \mathcal{U}_+^*(-H_X - H_{S^\vee})$$

на $X \times S^\vee$, зануляются на триангулированной подкатегории ${}^\perp \langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X \rangle \subset \mathcal{D}^b(X)$. Обозначим через

$$\tilde{p}: X \times S^\vee \rightarrow X \quad \text{и} \quad \tilde{q}: X \times S^\vee \rightarrow S^\vee$$

проекции. Прямое вычисление с использованием формулы проекции и двойственности Серра на X показывает, что для всякого объекта $F \in \mathcal{D}^b(X)$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{U}_-(-H_X - H_{S^\vee})}(F) &= R\tilde{q}_*(L\tilde{p}^*(F) \otimes \mathcal{U}_-(-H_X - H_{S^\vee})) \\ &= R\Gamma(X, F(-H_X)) \otimes \mathcal{U}_-(-H_{S^\vee}) \\ &= R\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_X)^* \otimes \mathcal{U}_-(-H_{S^\vee}), \\ \Phi_{\mathcal{U}_+^*(-H_X - H_{S^\vee})}(F) &= R\tilde{q}_*(L\tilde{p}^*(F) \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X - H_{S^\vee})) \\ &= R\Gamma(X, F \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X)) \otimes \mathcal{O}_{S^\vee}(-H_{S^\vee}) \\ &= R\mathrm{Hom}(F, \mathcal{U}_+)^* \otimes \mathcal{O}_{S^\vee}(-H_{S^\vee}). \end{aligned}$$

В частности, интересующие нас ядерные функторы равны нулю на всяком объекте $F \in {}^\perp \langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X \rangle \subset \mathcal{D}^b(X)$.

ТЕОРЕМА 4.4. *Имеем полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X, \Phi_1(\mathcal{D}^b(C^\vee)) \rangle. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.1 пара расслоений $(\mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X)$ исключительная. Более того, обозначая через $\Phi_1^!: \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(C^\vee)$ правый сопряженный функтор и подставляя $F = \mathcal{O}_X$ или $F = \mathcal{U}_+$, мы видим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{O}_y, \Phi_1^!(F)) &= \mathrm{Ext}^\bullet(\Phi_1(\mathcal{O}_y), F) = \mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{E}_y, F) \\ &= H^p(X, \mathcal{E}_y^* \otimes F) = H^p(X, \mathcal{E}_y \otimes F(-1)) = 0 \end{aligned}$$

по лемме 3.3 и следствию 3.6. Следовательно, $\Phi_1^!(F) = 0$, так как $\{\mathcal{O}_y\}_{y \in C^\vee}$ – порождающий класс в $\mathcal{D}^b(C^\vee)$. Значит,

$$\mathrm{Ext}^\bullet(\Phi_1(G), F) = \mathrm{Ext}^\bullet(G, \Phi_1^!(F)) = \mathrm{Ext}^\bullet(G, 0) = 0$$

для всех $G \in \mathcal{D}^b(C^\vee)$, т.е. набор $\langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X, \Phi_1(\mathcal{D}^b(C^\vee)) \rangle$ полуортогонален в $\mathcal{D}^b(X)$.

Остается проверить, что категория $\mathcal{D}^b(X)$ порождается $\mathcal{U}_+$, $\mathcal{O}_X$ и $\Phi_1(\mathcal{D}^b(C^\vee))$ как триангулированная категория. Действительно, пусть $F \in {}^\perp \langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X, \Phi_1(\mathcal{D}^b(C^\vee)) \rangle$. Так как $F \in {}^\perp \Phi_1(\mathcal{D}^b(C^\vee))$ имеем $\Phi_1^*(F) = 0$. С другой стороны, так как $F \in {}^\perp \langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X \rangle$ по предложению 4.3 имеем

$$\Phi_2^* \circ \alpha^*(F) = \beta_* \circ \Phi_1^*(F) = 0.$$

Однако Φ_2 – эквивалентность по следствию 4.2, следовательно, Φ_2^* – эквивалентность; значит, $\alpha^*(F) = 0$.

Теперь заметим, что зафиксировав X (а следовательно, и $C^\vee$), и варьируя подпространство A_8 , мы можем получить в качестве S любое гладкое гиперплоское сечение многообразия X . Приведенные выше рассуждения показывают, что ограничение всякого $F \in {}^\perp \langle \mathcal{U}_+, \mathcal{O}_X, \Phi_1(\mathcal{D}^b(C^\vee)) \rangle \subset \mathcal{D}^b(X)$ на любое гладкое гиперплоское сечение изоморфно нулю.

Доказательство завершается следующей леммой.

ЛЕММА 4.5. *Если X – гладкое алгебраическое многообразие, а F – комплекс когерентных пучков на X , ограничение которого на любое гладкое гиперплоское сечение многообразия X ациклично, то F и сам ацикличен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что F не ацикличен, и пусть k – максимальное целое число такое, что $\mathcal{H}^k(F) \neq 0$. Выберем точку $x \in X$ в носителе пучка $\mathcal{H}^k(F)$. Выберем гладкое гиперплоское сечение $j: S \subset X$, проходящее через x . Поскольку функтор ограничения j^* точен справа, ясно, что $\mathcal{H}^k(Lj^*F) \neq 0$, – противоречие.

5. Применение: поверхность Фано многообразия V_{12} . Обозначим через F_X поверхность Фано многообразия X , параметризующую коники (рациональные кривые степени 2) на X .

ЛЕММА 5.1. *Если $R \subset X$ – коника, то*

$$\mathcal{U}_{+|R} \cong \mathcal{O}_R \oplus \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{U}_+$ – подрасслоение тривиального расслоения $V \otimes \mathcal{O}_X$ и так как $r(\mathcal{U}_+|_R) = 5$, $\deg(\mathcal{U}_+|_R) = -4$, имеем

$$\mathcal{U}_+|_R \cong \bigoplus_{j=1}^5 \mathcal{O}_R(-u_j), \quad \text{где } u_j \geq 0, \quad \sum u_j = 4.$$

Сразу видно, что одно из u_j равно нулю, и надо лишь показать, что такое u_j равно одно, т.е., что $\dim H^0(R, \mathcal{U}_+|_R) = 1$.

Предположим, что $\dim H^0(R, \mathcal{U}_+|_R) \geq 2$. Выберем двумерное подпространство

$$U \subset H^0(R, \mathcal{U}_+|_R) \subset H^0(R, V \otimes \mathcal{O}_R) = V$$

и рассмотрим $V' = U^\perp/U$. Тогда $\mathrm{LGr}_+(V') \subset \mathrm{LGr}_+(V)$, и ясно, что $R \subset X' := \mathrm{LGr}_+(V') \cap X$. Поскольку X является линейным сечением грассманиана $\mathrm{LGr}_+(V)$, то X' является линейным сечением $\mathrm{LGr}_+(V')$. Однако $V' = \mathbb{C}^6$; следовательно, $\mathrm{LGr}_+(V') \cong \mathbb{P}^3$ и, так как всякое линейное сечение $\mathbb{P}^3$, содержащее конику, содержит также и плоскость $\mathbb{P}^2$, то X' содержит $\mathbb{P}^2$. Следовательно, X содержит $\mathbb{P}^2$, что невозможно по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении, примененной к $\mathrm{LGr}_+(V)$ семь раз.

ЛЕММА 5.2. *Выполнено равенство*

$$\bigcap_{y \in C^\vee} \mathcal{U}_{-y} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $0 \neq v \in \bigcap_{y \in C^\vee} \mathcal{U}_{-y}$, и рассмотрим $V'' = v^\perp/Cv$. Тогда $C^\vee \subset \mathrm{LGr}_-(V'') \subset \mathrm{LGr}_-(V)$. Более того, так как $C^\vee$ является линейным сечением грассманиана $\mathrm{LGr}_-(V)$, то $C^\vee$ является линейным сечением $\mathrm{LGr}_-(V'')$. Далее, так как $V'' = \mathbb{C}^8$, то $\mathrm{LGr}_-(V'')$ – квадрика. Кривая, являющаяся линейным сечением квадрики, – это коника или прямая, но $C^\vee$ не является ни прямой, ни коникой.

ТЕОРЕМА 5.3 [10]. *Выполнено равенство*

$$F_X \cong S^2 C^\vee.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \subset X$ – коника. Рассмотрим разложение ее структурного пучка относительно полуортогонального разложения

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{U}_+^*, \Phi_1(\mathcal{D}^b(C^\vee)) \rangle,$$

полученного из разложения (8) перестройкой $\mathcal{U}_+$ через $\mathcal{O}_X$. Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_R, \mathcal{O}_X) &= H^{3-p}(R, \omega_R)^* = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } p = 2, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ \mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_R, \mathcal{U}_+) &= \mathrm{Ext}^{3-p}(\mathcal{U}_+, \omega_R)^* = H^{3-p}(R, \mathcal{U}_+^* \otimes \omega_R)^* \\ &= H^{p-2}(R, \mathcal{U}_+|_R) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } p = 2, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

по лемме 5.1. Следовательно, разложение сводится к точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{U}_+^* \rightarrow \Phi_1(\Phi_1^!(\mathcal{O}_R)) \rightarrow \mathcal{O}_R \rightarrow 0, \quad (9)$$

где

$$\Phi_1^!: \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(C^\vee), \quad \Phi_1^!(\cdot) = Rq_{1*}(Lp_1^*(-) \otimes \mathcal{E}_1^*(H_{C^\vee}))[1]$$

– правый сопряженный к Φ_1 функтор.

ЛЕММА 5.4. *Объект $\Phi_1^!(\mathcal{O}_R)$ – чистый пучок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы описать объект

$$\Phi_1^!(\mathcal{O}_R) = Rq_{1*}(Lp_1^*(\mathcal{O}_R) \otimes \mathcal{E}_1^*(H_{C^\vee}))[1] \in \mathcal{D}^b(C^\vee),$$

рассмотрим

$$H^\bullet(X, \mathcal{E}_{1|y}^* \otimes \mathcal{O}_R) = H^\bullet(R, \mathcal{E}_{1|y|R}^*)$$

для всех $y \in C^\vee$. Пучок $\mathcal{E}_{1|y}^*$ в силу (3) является подпучком тривиального расслоения $\mathcal{U}_{-y} \otimes \mathcal{O}_X$, следовательно,

$$H^0(R, \mathcal{E}_{1|y|R}^*) \subset \mathcal{U}_{-y} \subset V.$$

С другой стороны, по (4) пучок $\mathcal{E}_{1|y}^* = \mathcal{E}_{1|y}(-H_X)$ является подпучком в $\mathcal{U}_+$, следовательно,

$$H^0(R, \mathcal{E}_{1|y|R}^*) \subset H^0(R, \mathcal{U}_{+|R}) = \mathbb{C} \subset V.$$

Значит, если $H^0(R, \mathcal{E}_{1|y|R}^*) \neq 0$ при всех $y \in C^\vee$, то $\bigcap_{y \in C^\vee} \mathcal{U}_{-y} \neq 0$, что противоречит лемме 5.2. Значит, для общей точки $y \in C^\vee$ имеем $H^0(R, \mathcal{E}_{1|y|R}^*) = 0$, следовательно,

$$R^0q_{1*}(Lp_1^*(\mathcal{O}_R) \otimes \mathcal{E}_1^*(H_{C^\vee})) = 0.$$

С другой стороны, так как R – одномерное многообразие, имеем

$$R^kq_{1*}(Lp_1^*(\mathcal{O}_R) \otimes \mathcal{E}_1^*(H_{C^\vee})) = 0 \quad \text{при } k \neq 0, 1.$$

Следовательно, $\Phi_1^!(\mathcal{O}_R)$ – чистый пучок.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Объект $\Phi_1^!(\mathcal{O}_R)$ – артинов пучок длины 2 на $C^\vee$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямом вычислении характера Черна пучка $\Phi_1^!(\mathcal{O}_R)$ с помощью теоремы Римана–Роха–Гротендика.

Таким образом, $\Phi_1^!(\mathcal{O}_R)$ – либо структурный пучок подсхемы длины 2 в $C^\vee$, либо $\Phi_1^!(\mathcal{O}_R) = \mathcal{O}_y \oplus \mathcal{O}_y$ для некоторой точки $y \in C^\vee$. Покажем, что второй случай невозможен. Для этого нам понадобится

ЛЕММА 5.6. *Выполнено равенство*

$$\Phi_1^*(\mathcal{U}_+^*) = \mathcal{O}_{C^\vee}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$\Phi_1^*(\mathcal{U}_+^*) = Rq_{1*}(Lp_1^*(\mathcal{U}_+^*) \otimes \mathcal{E}_1^*(-H_X))[3] = Rq_{1*}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{U}_+^*(-2H_X - H_{C^\vee}))[3].$$

С другой стороны, домножая последовательность (4) на $\mathcal{U}_+^*(-H_X)$, получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{U}_+^*(-2H_X - H_C^\vee) &\rightarrow \mathcal{U}_+ \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X) \\ &\rightarrow \mathcal{U}_-^* \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X) \rightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из леммы 3.3 следует, что $R^\bullet q_{1*}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X)) = 0$, а следствие 3.2 означает, что

$$\begin{aligned} R^\bullet q_{1*}(\mathcal{U}_-^* \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X)) &= 0, \\ R^k q_{1*}(\mathcal{U}_+ \otimes \mathcal{U}_+^*(-H_X)) &= \begin{cases} \mathcal{O}_{C^\vee} & \text{при } k = 3, \\ 0 & \text{при } k \neq 3, \end{cases} \end{aligned}$$

и лемма вытекает из спектральной последовательности Лере.

ЛЕММА 5.7. *Выполнено условие*

$$\Phi_1^!(\mathcal{O}_R) \neq \mathcal{O}_y \oplus \mathcal{O}_y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы имело место равенство, то разложение (9) имело бы вид

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{U}_+^* \rightarrow \mathcal{E}_{1y} \oplus \mathcal{E}_{1y} \rightarrow \mathcal{O}_R \rightarrow 0.$$

С другой стороны, из леммы 5.6 следует, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathcal{U}_+^*, \mathcal{E}_{1y}) &= \mathrm{Hom}(\mathcal{U}_+^*, \Phi_1(\mathcal{O}_y)) \\ &= \mathrm{Hom}(\Phi_1^*(\mathcal{U}_+^*), \mathcal{O}_y) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{C^\vee}, \mathcal{O}_y) = \mathbb{C}, \end{aligned}$$

следовательно, ранг всякого отображения $\mathcal{U}_+^* \rightarrow \mathcal{E}_{1y} \oplus \mathcal{E}_{1y}$ не превосходит 2, и такая точная последовательность невозможна.

СЛЕДСТВИЕ 5.8. *Объект $\Phi_1^!(\mathcal{O}_R)$ – структурный пучок подсхемы длины 2 в $C^\vee$.*

Функтор $\Phi_1^!$ индуцирует отображение $F_X \rightarrow S^2 C^\vee$.

Обратно, если Z – подсхема длины 2 в $C^\vee$, то

$$\mathbb{C} = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{C^\vee}, \mathcal{O}_Z) = \mathrm{Hom}(\Phi_1^*(\mathcal{U}_+^*), \mathcal{O}_Z) = \mathrm{Hom}(\mathcal{U}_+^*, \Phi_1(\mathcal{O}_Z)).$$

Следовательно, существует нетривиальный гомоморфизм $f: \mathcal{U}_+^* \rightarrow \Phi_1(\mathcal{O}_Z)$. Его ядро является рефлексивным пучком ранга 1 с $c_1 = 0$, следовательно, изоморфно пучку $\mathcal{O}_X$, и несложно показать, что коядро этого гомоморфизма есть структурный пучок коники. Следовательно, отображение $\Phi_1^!: F_X \rightarrow S^2 C^\vee$ является изоморфизмом.

Автор выражает признательность Атанасу Илиеву и Дмитрию Маркушевичу за важные сведения о многообразиях V_{12} , а также Дмитрию Орлову и Алексею Бондалу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kuznetsov A. G. Fano threefolds V_{22} // Preprint MPI 1997-24. Bonn: MPI, 1997.
- [2] Кузнецов А. Г. Производная категория трехмерной кубики и многообразия V_{14} // Тр. МИАН. 2004. Т. 246. С. 183–207.
- [3] Mukai S. Fano 3-folds // Complex Projective Geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989). London Math. Soc. Lecture Notes Ser. V. 179. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. P. 255–263.
- [4] Iliev A., Markushevich D. Elliptic curves and rank 2 vector bundles on the prime Fano threefolds of genus 7 // Adv. Geom. 2004. V. 4. № 3. P. 287–318.
- [5] Bridgeland T. Equivalences of triangulated categories and Fourier–Mukai transforms // Bull. London Math. Soc. 1999. V. 31. № 1. P. 25–34.
- [6] Исковских В. А. Трехмерные многообразия Фано. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. С. 516–562; II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. С. 506–549.
- [7] Iskovskikh V. A., Prokhorov Yu. G. Algebraic Geometry V: Fano Varieties. Encyclopaedia Math. Sci. V. 47. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [8] Demazure M. A very simple proof of Bott's theorem // Invent. Math. 1976. V. 33. № 3. P. 271–272.
- [9] Bondal A., Orlov D. Semiorthogonal decompositions for algebraic varieties // Preprint MPI 1995-15; E-print [math.AG/9506012](https://arxiv.org/abs/math.AG/9506012). Bonn: MPI, 1995.
- [10] Iliev A., Markushevich D. Parametrization of $\text{Sing}(\Theta)$ for a Fano 3-fold of genus 7 by moduli of vector bundles // E-print [math.AG/0403122](https://arxiv.org/abs/math.AG/0403122), 2004.

Математический институт им. В. А. Стеклова, РАН
E-mail: akuznet@mi.ras.ru, sasha@kuznetsov.mccme.ru

Поступило
22.11.2004