Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Лауринчикас, К. Матсумото, Й. Штойдинг, Дискретная универсальность L -функций новых форм, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 595–603

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:14:43

УДК 511

ДИСКРЕТНАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ L -ФУНКЦИЙ НОВЫХ ФОРМ

А. Лауринчикас, К. Матсумото, Й. Штойдинг

В статье получена дискретная теорема универсальности типа Воронина для L -функций новых форм.

Библиография: 34 названия.

1. Введение. В работе [1] Воронин (см. также [2]–[6]) получил замечательную теорему об универсальности дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$. Он доказал, что каждая аналитическая и не имеющая нулей в круге $\{s \in \mathbb{C} : |s| < r, r < 1/4\}$ функция, которая непрерывна вплоть до границы этого круга, может быть равномерно приближена с желаемой точностью сдвигами функции $\zeta(s)$. Эта теорема усиливалась и обобщалась для других дзета-функций и рядов Дирихле многими авторами. Мы сформулируем последний вариант теоремы Воронина [7]. Пусть $\text{meas}\{A\}$ означает меру Лебега множества A и при $T > 0$

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \dots\},$$

где многоточие означает некоторое условие, которому удовлетворяет τ . Предположим, что K – компактное подмножество со связным дополнением полосы $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, и пусть функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в K и аналитична внутри K . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Эта теорема показывает, что множество сдвигов дзета-функции Римана, приближающих данную аналитическую функцию, является достаточно богатым: оно имеет положительную нижнюю плотность.

Свойство универсальности для других функций, заданных рядами Дирихле, было получено Гонексом [8], Рейхом [9], [10], Багчи [11], [12], Лауринчикасом [7], [13]–[17], Лауринчикасом и Матсумото [18], [19], Лауринчикасом, Матсумото и Штойдингом [20], Матсумото [21], Штойдингом [22], [23], Мишу [24], [25], Бауэром [26], Гарункштисом [27], Лауринчикасом, Шварцом и Штойдингом [28] и другими авторами. При этом оказалось, что большинство классических дзета и L -функций универсальны в смысле Воронина. Гипотеза Линника–Ибрагимова гласит, что все функции, в некоторой полуплоскости заданные рядами Дирихле, аналитически продолжаемые левее полуплоскости

абсолютной сходимости и удовлетворяющие некоторым натуральным условиям роста, универсальны. Без сомнения, эта гипотеза является сложной, хотя все известные примеры ее подтверждают.

В [20] мы получили универсальность L -функций новых форм, причем применяемый метод основан на методе работы [19], где рассматривался случай новых форм уровня 1. Напомним некоторые определения и обозначения. Пусть $SL(2, \mathbb{Z})$ – полная модулярная группа, а

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{q} \right\}$$

– ее Гекке подгруппа. Аналитическая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функция $F(z)$ называется *параболической формой* веса κ и уровня q , если для всех

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)$$

выполнено равенство

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^\kappa F(z)$$

и $F(z)$ – аналитична и равна нулю в параболических точках. В этом случае $F(z)$ в ∞ имеет следующее разложение Фурье:

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}.$$

Форма $F(z)$ называется *новой формой*, если она не является параболической формой уровня меньше q и если она является собственной функцией всех операторов Гекке. Это влечет за собой неравенство $c(1) \neq 0$, и мы можем предполагать, что $c(1) = 1$.

Каждой нормированной новой форме ставится в соответствие L -функция

$$L(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}.$$

Последний ряд абсолютно сходится при $\sigma > (\kappa + 1)/2$. Кроме того, функция $L(s, F)$ аналитически продолжается на всю s -плоскость и является целой функцией. В полуплоскости $\sigma > (\kappa + 1)/2$ функция $L(s, F)$ имеет произведение Эйлера по простым числам

$$L(s, F) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{c(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{c(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s+1-\kappa}}\right)^{-1}.$$

Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : \kappa/2 < \sigma < (\kappa + 1)/2\}$. Тогда в [20] было получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $F(z)$ – нормированная новая форма веса k и уровня q . Пусть K – компактное подмножество со связным дополнением по плоскости D , и пусть функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в K и аналитична внутри K . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |L(s + i\tau, F) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Цель настоящей заметки – получить дискретный вариант теоремы 1. Пусть при натуральных N

$$\mu_N(\dots) = \frac{1}{N+1} \#(0 \leq m \leq N : \dots),$$

где многоточие означает некоторое условие, которому удовлетворяет m . Предположим, что h – фиксированное положительное число такое, что $\exp\{2\pi k/h\}$ иррационально при всех целых $k \neq 0$. Например, мы можем брать $h = \pi$, поскольку в силу теоремы Линдемана $\exp\{2k\}$, $k \neq 0$, иррационально.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $F(z)$, K и $f(s)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mu_N \left(\sup_{s \in K} |L(s + imh, F) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Недавно была доказана [29] гипотеза Шимуры–Таниямы. Следовательно, каждая несингулярная эллиптическая кривая над полем рациональных чисел

$$E : y^2 = x^3 + ax + b, \quad \Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0,$$

модулярна, поэтому ее L -функция

$$L_E(s) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} \right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}} \right)^{-1}, \quad \sigma > \frac{3}{2},$$

совпадает с L -функцией некоторой новой формы веса 2 некоторой подгруппы Гекке. Таким образом, в силу теоремы 2 $L_E(s)$ имеет дискретное свойство универсальности. Здесь в определении $L_E(s)$ $\lambda(p) = p - \nu(p)$, где $\nu(p)$ – число решений сравнения

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}.$$

Аналогично теореме 2 может быть получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $F(z)$ и K удовлетворяют условиям теоремы 2, и пусть функция $f(s)$ непрерывна в K и аналитична внутри K . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mu_N \left(\sup_{s \in K} |L'(s + imh, F) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Отметим, что в теореме 3 функция $f(s)$ может иметь нули в K .

ТЕОРЕМА 4. Для любых $\sigma_1, \sigma_2, \kappa/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < (\kappa + 1)/2$, существует константа $c = c(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ такая, что для достаточно больших N функция $L'(s + imh, F)$ имеет нуль в круге

$$|s - \hat{\sigma}| \leq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

для более чем cN чисел $m, 0 \leq m \leq N$.

2. Предельная теорема для функции $L(s, F)$. Доказательство теоремы 2 использует дискретную предельную теорему в смысле слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций для функции $L(s, F)$. Пусть $H(G)$ – пространство аналитических в G функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Через $\mathcal{B}(S)$ будем обозначать класс борелевских множеств пространства S . В этом пункте мы изучим слабую сходимость вероятностной меры

$$P_N(A) = \mu_N(L(s + imh, F) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_M)),$$

где $D_M = \{s \in \mathbb{C} : \kappa/2 < \sigma < (\kappa + 1)/2, |t| < M\}$.

Пусть $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ – единичная окружность на комплексной плоскости и

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

где $\gamma_p = \gamma$ для всех простых p . С топологией произведения и поточечным перемножением бесконечномерный тор Ω является компактной топологической абелевой группой. Поэтому на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ существует вероятностная мера Хаара m_H , и это приводит к вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Через $\omega(p)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p и на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ определим $H(D_M)$ -значный случайный элемент $L(s, \omega, F)$ формулой

$$L(s, \omega, F) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{c(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{c(p)\omega(p)}{p^s} + \frac{\omega^2(p)}{p^{2s+1-\kappa}}\right)^{-1}. \quad (1)$$

Пусть P_L означает распределение случайного элемента $L(s, \omega, F)$, т.е.

$$P_L(A) = m_H(\omega \in \Omega : L(s, \omega, F) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_M)).$$

ЛЕММА 1. Вероятностная мера P_N при $N \rightarrow \infty$ слабо сходится к P_L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма является следствием общей дискретной предельной теоремы для дзета-функции Матсумото, полученной в [30].

Для простых p определим целые положительные числа $g(p)$. Кроме того, пусть $a_p^{(j)} \in \mathbb{C}$, а $f(j, p)$, $1 \leq j \leq g(p)$, – целые положительные числа. Определим полином

$$A_p(x) = \prod_{j=1}^{g(p)} (1 - a_p^{(j)} x^{f(j,p)})$$

степени $f(1, p) + \dots + f(g(p), p)$. В [31] Матсумото начал изучать следующую функцию:

$$\varphi(s) = \prod_p A_p^{-1}(p^{-s}). \quad (2)$$

При ограничениях $g(p) \leq cp^\alpha$ и $|a_p^{(j)}| \leq p^\beta$ с положительной константой c и неотрицательными константами α и β бесконечное произведение в (2) абсолютно сходится при $\sigma > \alpha + \beta + 1$ и определяет аналитическую функцию без нулей.

В работе [30] была получена дискретная предельная теорема в пространстве мероморфных функций для функции $\varphi(s)$. Предположим, что функция $\varphi(s)$ мероморфно продолжается в область

$$\widehat{D} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \rho_0\}, \quad \text{где } \alpha + \beta + \frac{1}{2} \leq \rho_0 \leq \alpha + \beta + 1,$$

и все полюсы в этой области содержатся в компактном множестве. Кроме того, при $\sigma > \rho_0$ пусть

$$\varphi(\sigma + it) = O(|t|^\delta), \quad |t| \geq t_0,$$

с некоторым $\delta > 0$ и

$$\int_0^T |\varphi(\sigma + it)|^2 dt = O(T), \quad T \rightarrow \infty.$$

Через $M(\widehat{D})$ обозначим пространство мероморфных в $\widehat{D}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактных множествах, и пусть

$$\varphi(s, \omega) = \prod_p \prod_{j=1}^{g(p)} \left(1 - \frac{\omega^{f(j,p)}(p) a_p^{(j)}}{p^{sf(j,p)}} \right)^{-1}$$

– $H(\widehat{D})$ -значный элемент на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Тогда в [30] было доказано, что вероятностная мера

$$\mu_N(\varphi(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M(\widehat{D})),$$

при $N \rightarrow \infty$ слабо сходится к распределению случайного элемента $\varphi(s, \omega)$.

При $\sigma > (\kappa + 1)/2$ функция $L(s, F)$ может быть записана в виде

$$L(s, F) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{c(p)}{p^s} \right)^{-1} \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{a(p)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{b(p)}{p^s} \right)^{-1},$$

где $c(p) = a(p) + b(p)$, и в силу оценок Делиня

$$|a(p)| \leq p^{(\kappa-1)/2}, \quad |b(p)| \leq p^{(\kappa-1)/2}.$$

Следовательно, функция $L(s, F)$ является частным случаем дзета-функции Матсумото с $\alpha = 0$ и $\beta = (\kappa - 1)/2$.

Функция $L(s, F)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$q^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s, F) = \varepsilon(-1)^{(\kappa-s)/2}(2\pi)^{s-\kappa}\Gamma(\kappa-s)L(\kappa-s, F),$$

где, как обычно, $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера, а $\varepsilon = \pm 1$ – знак функционального уравнения. Последнее функциональное уравнение и принцип Фрагмена–Линделёфа при $\sigma > \kappa/2$ влекут за собой оценку

$$L(\sigma + it, F) = O(|t|^\delta), \quad |t| \geq t_0,$$

с некоторым $\delta > 0$. Кроме того, в [32] было показано, что при $\sigma > \kappa/2$

$$\int_0^T |L(\sigma + it, F)|^2 dt = O(T), \quad T \rightarrow \infty.$$

Таким образом, имеем, что все условия теоремы из [30] выполнены с $\rho_0 = \kappa/2$, и поскольку $L(s, F)$ – целая функция, то вероятностная мера

$$\mu_N(L(s + imh, F) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(\widehat{D})),$$

при $N \rightarrow \infty$ слабо сходится к распределению $H(\widehat{D})$ -значного случайного элемента, определенного формулой (1). Так как функция $u: H(\widehat{D}) \rightarrow H(D_M)$, заданная при помощи координатного сужения, непрерывна, отсюда и теоремы 5.1 [33] получаем утверждение леммы.

3. Носитель меры P_L . Пусть P – вероятностная мера на $(S, \mathcal{B}(S))$. Напомним, что *носителем* меры P называется минимальное замкнутое множество $S_P \subset S$ такое, что $P(S_P) = 1$. Множество S_P состоит из всех элементов $x \in S$ таких, что для всякой окрестности G элемента x имеет место неравенство $P(G) > 0$.

Пусть

$$S_M = \{g \in H(D_M) : g(s) \neq 0 \text{ или } g(s) \equiv 0\}.$$

ЛЕММА 2. *Носителем меры P_L является множество S_M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [20] было доказано, что вероятностная мера

$$\nu_T(L(s + i\tau, F) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_M)),$$

при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере P_L ; там также было доказано, что носитель меры P_L – множество S_M .

4. Доказательство теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Очевидно, существует $M > 0$ такое, что компактное множество $K \subset D_M$.

Сначала предположим, что функция $f(s)$ допускает ненулевое аналитическое продолжение в область D_M . Через G обозначим множество функций $g \in H(D_M)$ таких, что

$$\sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon.$$

В силу леммы 2 множество G принадлежит носителю меры P_L . Поэтому $P_L(G) > 0$. Кроме того, множество G открыто. Следовательно, теорема 2.1 из [33] и лемма 1 дают

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mu_N \left(\sup_{s \in K} |L(s + imh, F) - f(s)| < \varepsilon \right) \geq P_L(G) > 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Теперь пусть $f(s)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда по теореме Мергеляна [34] существует полином $p_n(s)$, $p_n(s) \neq 0$ в K , такой, что

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p_n(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4)$$

Полином $p_n(s)$ имеет только конечное число нулей. Поэтому найдется область G_1 со связным дополнением такая, что $K \subset G_1$ и $p_n(s) \neq 0$ на G_1 . Это показывает, что на G_1 существует непрерывная ветвь $\log p_n(s)$, которая аналитична внутри G_1 . Опять по теореме Мергеляна найдется полином $q_m(s)$ такой, что

$$\sup_{s \in K} |p_n(s) - \exp\{q_m(s)\}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Это и (4) показывает, что

$$\sup_{s \in K} |f(s) - \exp\{q_m(s)\}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Однако, $\exp\{q_m(s)\} \neq 0$. Следовательно, ввиду (3)

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mu_N \left(\sup_{s \in K} |L(s + imh, F) - \exp\{q_m(s)\}| < \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0.$$

Это и (5) дают утверждение теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 аналогично доказательству теоремы 2. В этом случае при $N \rightarrow \infty$ носителем предельной меры

$$\mu_N(L'(s + imh, F) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_M)),$$

является пространство $H(D_M)$. Это получается при помощи рассуждений, аналогичных проведенным в [17].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_0 = \max \left\{ \left| \sigma_1 - \frac{2\kappa + 1}{4} \right|, \left| \sigma_2 - \frac{2\kappa + 1}{4} \right| \right\},$$

а $f(s) = s - \hat{\sigma}$ и $0 < \varepsilon < (\sigma_2 - \sigma_1)/10$. Тогда в силу теоремы 3 существует константа $c = c(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ такая, что при достаточно большом N

$$\mu_N \left(\max_{|s - (2\kappa + 1)/4| \leq \sigma_0} |L'(s + imh, F) - f(s)| < \varepsilon \right) > c.$$

Окружность $|s - \hat{\sigma}| = (\sigma_2 - \sigma_1)/2$ лежит в круге

$$\left| s - \frac{2\kappa + 1}{4} \right| \leq \sigma_0. \quad (6)$$

Поэтому для m , которые удовлетворяют (6), выполняется оценка

$$\max_{|s - \hat{\sigma}| = (\sigma_2 - \sigma_1)/2} |L'(s + imh, F) - (s - \hat{\sigma})| < \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{10}.$$

Это показывает, что функции $(s - \hat{\sigma})$ и $L'(s + imh, F) - (s - \hat{\sigma})$ в круге $|s - \hat{\sigma}| \leq (\sigma_2 - \sigma_1)/2$ удовлетворяют условиям теоремы Руше. Однако функция $s - \hat{\sigma}$ в этом круге имеет точно один нуль. Значит, по теореме Руше и функция $L'(s + imh, F)$ в круге $|s - \hat{\sigma}| \leq (\sigma_2 - \sigma_1)/2$ имеет один нуль. Поскольку таких m , $0 \leq m \leq N$, в силу (6), больше чем cN , то теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воронин С. М. Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 475–486.
- [2] Воронин С. М. Теорема о распределении значений дзета-функции Римана // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 4. С. 771.
- [3] Воронин С. М. Исследование поведения дзета-функции Римана. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: Матем. институт АН СССР, 1972.
- [4] Воронин С. М. Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов. Дисс. ... д. ф.-м. н. М.: Матем. институт АН СССР, 1977.
- [5] Воронин С. М. Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов // Матем. заметки. 1978. Т. 29. № 6. С. 879–884.
- [6] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
- [7] Laurinćikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-function. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1996.
- [8] Gonek S. M. Analytic Properties of Zeta and L -functions. Ph. D. Thesis. Michigan: University of Michigan, 1979.
- [9] Reich A. Universelle Wertverteilung von Eulerprodukten // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. -Phys. Kl. II. 1977. № 1. P. 1–17.
- [10] Reich A. Zur Universalität und Hypertranszendenz der Dedekindschen Zetafunktion // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1982. V. 33. P. 187–203.
- [11] Bagchi B. The Statistical Behaviour and Universality Properties of the Riemann Zeta-Function and Other Allied Dirichlet Series. Ph. D. Thesis. Calcutta: Indian Statistical Institute, 1981.
- [12] Bagchi B. A joint universality theorem for Dirichlet L -functions // Math. Z. 1982. V. 181. P. 319–334.

- [13] Laurinčikas A. Distribution des valeurs de certaines séries de Dirichlet // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1979. V. 289. P. 43–45.
- [14] Лауринчикас А. Универсальность дзета-функции Лерха // Литовский матем. сб. 1997. Т. 37. № 2. С. 367–375.
- [15] Laurinčikas A. On the Matsumoto zeta-function // Acta Arith. 1988. V. 84. P. 1–16.
- [16] Laurinčikas A. The universality of zeta-functions // Acta Appl. Math. 2003. V. 78. P. 251–271.
- [17] Laurinčikas A. On the derivatives of zeta-functions of certain cusp forms // Preprint 2004-06. Vilnius: Department Math. and Inform., Vilnius University, 2004.
- [18] Laurinčikas A., Matsumoto K. The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions // Nagoya Math. J. 2000. V. 157. P. 211–227.
- [19] Laurinčikas A., Matsumoto K. The universality of zeta-functions attached to certain cusp-forms // Acta Arith. 2001. V. 98. P. 345–359.
- [20] Лауринчикас А., Матсумото К., Стеудинг Й. Универсальность L -функций связанных с новыми формами // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 1. С. 83–98.
- [21] Matsumoto K. The mean values and the universality of Rankin–Selberg L -functions // Number Theory / ed. M. Jutila, T. Metsänkylä. Proceedings of the Turku Symposium on number theory in memory Kustaa Inkeri (1999). Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2001. P. 201–221.
- [22] Steuding J. Upper bounds for the density of universality // Acta Arith. 2003. V. 107. P. 195–202.
- [23] Steuding J. On the universality for functions in the Selberg class // Proc. Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations (MPI–Bonn, January–June 2002) / ed. D.R. Heath-Brown, B.Z. Moroz. V. 360. Bonn: Bonner Math. Schriften, 2003. Paper № 28.
- [24] Mishou H. The universality theorem for L -functions associated with ideal class characters // Acta Arith. 2001. V. 98. P. 395–410.
- [25] Mishou H. The universality theorem for Hecke L -functions // Acta Arith. 2003. V. 110. P. 45–71.
- [26] Bauer H. The value distribution of Artin L -series and zeros of zeta-functions // J. Number Theory. 2003. V. 98. P. 254–279.
- [27] Garunkštis R. The effective universality theorem for the Riemann zeta-function // Proc. Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations (MPI–Bonn, January–June 2002) / ed. D.R. Heath-Brown, B.Z. Moroz. V. 360. Bonn: Bonner Math. Schriften, 2003. P. 1–21.
- [28] Laurinčikas A., Schwarz W., Steuding J. The universality of general Dirichlet series // Analysis. 2003. V. 23. P. 13–26.
- [29] Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor R. On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises // J. Amer. Math. Soc. 2001. V. 14. P. 843–939.
- [30] Качинская П. Дискретная предельная теорема для Матсумото дзета-функции в пространстве мероморфных функций // Литовский матем. сб. 2002. Т. 42. № 1. С. 46–67.
- [31] Matsumoto K. Value-distribution of zeta-functions // Lecture Notes in Math. 1990. V. 1434. P. 178–187.
- [32] Matsumoto K. A probabilistic study on the value distribution of Dirichlet series attached to certain cusp forms // Nagoya Math. J. 1989. V. 116. P. 123–138.
- [33] Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: John Wiley, 1967.
- [34] Walsh J. L. Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 20. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1960.

(А. Лауринчикас) Вильнюсский университет, Литва

Поступило

(К. Матсумото) Университет Нагойи, Япония

28.06.2004

(Й. Штойдинг) Франкфуртский университет им. И. В. Гёте, Германия

E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt, kohjimat@math.nagoya-u.ac.jp,

steuding@math.uni-frankfurt.de