Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Пупырев, О линейной и алгебраической независимости q -дзета-значений, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 608–613

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2619>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:30:14

УДК 511.3+517.51

О ЛИНЕЙНОЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ q -ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ

Ю. А. Пупырев

В работе получены результаты о линейной и алгебраической независимости q -рядов $\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n)q^n$, где $\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^{s-1}$, $s = 1, 2, \dots$, над полем $\mathbb{C}(q)$.
Библиография: 3 названия.

1. Введение. Для натуральных $s = 1, 2, \dots$ определим q -ряды

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n)q^n, \quad q \in \mathbb{C}, \quad |q| < 1, \quad (1)$$

где $\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^{s-1}$ обозначает сумму степеней делителей. Несложно проверить (например, с помощью леммы 1 далее) предельные соотношения

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1-q)^s \zeta_q(s) = (s-1)! \cdot \zeta(s), \quad s = 2, 3, \dots,$$

где $\zeta(s)$ – значения дзета-функции Римана (дзета-значения). Это обстоятельство мотивирует название q -дзета-значения для рядов (1).

Для четных $s \geq 2$ ряды $E_s(q) = 1 - 2s\zeta_q(s)/B_s$, где $B_s \in \mathbb{Q}$ – числа Бернулли, известны как *ряды Эйзенштейна*. Поэтому модулярное происхождение (относительно параметра $\tau = (\ln q)/(2\pi i)$) функций $E_4, E_6, E_8, \dots$ и теорема Малера [1] приводят к алгебраической независимости $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ над $\mathbb{Q}[q]$, в то время как остальные четные q -дзета-значения являются многочленами (с коэффициентами из $\mathbb{Q}$) от $\zeta_q(4)$ и $\zeta_q(6)$.

В настоящей заметке мы решаем следующие задачи, сформулированные в [2].

ЗАДАЧА 1. Доказать, что q -дзета-значения $\zeta_q(1), \zeta_q(2), \zeta_q(3), \dots$ как функции от q линейно независимы над $\mathbb{C}(q)$.

ЗАДАЧА 2. Доказать, что q -функциональное множество, включающее три четные q -дзета-значения $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ и все нечетные q -дзета-значения $\zeta_q(1), \zeta_q(3), \zeta_q(5), \dots$, состоит из алгебраически независимых над $\mathbb{C}(q)$ функций.

Именно, мы приводим полное решение задачи 1 (теорема 1 и ее следствие) и частичное решение задачи 2 (теоремы 2–4). Отметим также, что подход к доказательству линейной и алгебраической независимости q -рядов, используемый в данной работе, был предложен в [3] и может применяться в других задачах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Для $\zeta_q(s)$, $s = 1, 2, \dots$, имеем представление

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \rho_s(q^n)}{(1 - q^n)^s}, \quad (2)$$

где ρ_s – многочлен со следующими свойствами:

- 1) все его коэффициенты положительны;
- 2) при $s > 1$ его степень равна $s - 2$, при $s = 1$ степень равна 0;
- 3) $\rho_s(1) = (s - 1)!$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала представление (2):

$$\begin{aligned} \zeta_q(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n) q^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{\nu n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{s-1} x^{\nu} \right) \Big|_{x=q^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(x \frac{d}{dx} \right)^{s-1} \frac{x}{1-x} \right) \Big|_{x=q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \rho_s(x)}{(1-x)^s} \Big|_{x=q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \rho_s(q^n)}{(1-q^n)^s}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем, что $\rho_1 \equiv 1$, и по индукции проверим указанные выше свойства многочлена ρ_s . Пусть $\gamma_s(x) = x \rho_s(x)$ – многочлен степени не выше s с неотрицательными коэффициентами. Тогда

$$\frac{\gamma_{s+1}(x)}{(1-x)^{s+1}} = \left(x \frac{d}{dx} \right) \frac{\gamma_s(x)}{(1-x)^s} = x \frac{\gamma'_s(x)(1-x) + s\gamma_s(x)}{(1-x)^{s+1}} = x \frac{(s\gamma_s(x) - x\gamma'_s(x)) + \gamma'_s(x)}{(1-x)^{s+1}}.$$

Заметим, что коэффициенты γ'_s получаются из коэффициентов γ_s умножением на числа, не превосходящие s . Поэтому, учитывая, что $\gamma_{s+1}(x) = x \rho_{s+1}(x)$, убеждаемся в справедливости свойства 1) и получаем рекуррентное соотношение для ρ_s :

$$\rho_{s+1}(x) = (1 + (s-1)x)\rho_s(x) + x(1-x)\rho'_s(x),$$

откуда следуют свойства 2) и 3). Лемма доказана.

Напомним, что запись $f(x) \asymp g(x)$ при $x \rightarrow a$ означает, что с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$ выполнено

$$C_1 |g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2 |g(x)| \quad \text{при } x \rightarrow a.$$

ЛЕММА 2. Пусть θ – некоторый корень из единицы и $q = r\theta$, где $0 < r < 1$. Тогда

- 1) для $s > 1$

$$\zeta_q(s) \asymp \frac{1}{(1-r)^s} \quad \text{при } r \rightarrow 1;$$

- 2) для $s = 1$

$$\zeta_q(1) \asymp -\frac{\ln(1-r)}{1-r} \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θ – первообразный корень степени p из единицы, а число s фиксировано. Запишем ряд из (2) в виде $\zeta_q(s) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где

$$\Sigma_1 = \sum_{n \geq 1, p|n} \frac{q^n \rho_s(q^n)}{(1 - q^n)^s}, \quad \Sigma_2 = \sum_{n \geq 1, p \nmid n} \frac{q^n \rho_s(q^n)}{(1 - q^n)^s}.$$

Если $p \nmid n$, то $|1 - q^n| = |1 - r^n \theta^n| \geq c_1 > 0$, так как множество значений $q^n = r^n \theta^n$ расположено на радиальных лучах, не проходящих через 1, а значит, разность $|1 - q^n|$ оценивается снизу константой, равной расстоянию от 1 до данного множества. Для $p \geq 4$ это расстояние равно $\sin(2\pi/p)$, если же $p < 4$, то оно равно 1. Итак, постоянная c_1 зависит только от p . И в дальнейшем символы $c_2, c_3, \dots$ будут обозначать положительные величины, не зависящие от r .

В области $|q| < 1$ значения $\rho_s(q^n)$ ограничены суммой модулей коэффициентов многочлена, которая в силу их положительности и леммы 1 равна $(s-1)!$. Пользуясь данным фактом и установленным выше неравенством, получаем

$$|\Sigma_2| \leq c_1^{-s} (s-1)! \sum_{n \geq 1, p \nmid n} r^n \leq c_1^{-s} (s-1)! \sum_{n=0}^{\infty} r^n \leq \frac{c_2}{1-r}.$$

Заметим, что это верно для любого $s \in \mathbb{N}$.

Далее отдельно рассмотрим случаи $s > 1$ и $s = 1$.

Пусть $s > 1$. Из леммы 1 также следует, что многочлен ρ_s является положительным и неубывающим на вещественной полуоси $[0, +\infty)$, а его свободный член не равен нулю, так что значения многочлена ограничены снизу некоторой константой $c_3 > 0$. Поэтому при $r > 1/2$ справедлива следующая оценка:

$$\Sigma_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{pl} \rho_s(r^{pl})}{(1 - r^{pl})^s} \geq \frac{c_3 r^p}{(1 - r^p)^s} \geq \frac{c_4}{(1 - r)^s}.$$

Для оценки сверху разобьем множество возможных значений индекса суммирования l на непересекающиеся подмножества S_N так, что $l \in S_N$, если $N = [1 + r + \dots + r^{pl-1}]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{pl} \rho_s(r^{pl})}{(1 - r^{pl})^s} \leq (s-1)! \frac{1}{(1-r)^s} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{pl}}{(1 + r + \dots + r^{pl-1})^s} \\ &\leq (s-1)! \frac{1}{(1-r)^s} \sum_{N=1}^{[1/(1-r)]} \frac{1}{N^s} \sum_{l \in S_N} r^{pl}. \end{aligned}$$

Согласно построению множеств S_N выполнено

$$0 < \sum_{l \in S_N} r^{pl} = r^{pl^*} + r^{p(l^*+1)} + \dots + r^{p(l^*-1)+r^{pl^*}} \leq r^{pl^*} + r^{pl^*+1} + \dots + r^{pl^*-1} + 1 \leq 2,$$

где $l_* = \min_{l \in S_N} \{l\}$, а $l^* = \max_{l \in S_N} \{l\}$, откуда

$$\Sigma_1 \leq 2(s-1)! \frac{1}{(1-r)^s} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^s} \leq \frac{c_5}{(1-r)^s}. \quad (3)$$

Таким образом, первая часть леммы доказана.

Пусть теперь $s = 1$. Тогда

$$\Sigma_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{pl}}{1 - r^{pl}} = \frac{1}{1 - r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{pl}}{1 + r + \dots + r^{pl-1}} = \frac{1}{1 - r} \psi(r).$$

Так как $1 + r + \dots + r^{pl-1} \leq pl$, получаем

$$\psi(r) \geq c_6 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{pl}}{pl} = -c_6 \frac{1}{p} \ln(1 - r^p) \geq -c_7 \ln(1 - r),$$

откуда

$$\Sigma_1 \geq -\frac{c_7 \ln(1 - r)}{1 - r}.$$

Теперь оценим Σ_1 сверху. Так же, как и в доказательстве оценки (3), получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{pl}}{1 - r^{pl}} \leq 2 \frac{1}{1 - r} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{[1/(1 - r)]} \right) \\ &\leq 2 \frac{1}{1 - r} \left(1 + \int_1^{1/(1-r)} \frac{dx}{x} \right) \leq c_8 \frac{-\ln(1 - r)}{1 - r}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

3. Основные результаты. Пусть даны ненулевые многочлены $P_i(q) \in \mathbb{C}[q]$, $i = 1, \dots, k$, со степенями d_i соответственно. Определим линейную комбинацию

$$P(q) = P(s_1, \dots, s_k; q) = \sum_{i=1}^k P_i(q) \zeta_q(s_i), \quad (4)$$

где $s_1 > \dots > s_k$. Через $\Omega \subset \mathbb{C}$ обозначим мультипликативную группу всех корней из единицы.

ТЕОРЕМА 1. *Начиная с некоторого p_0 , зависящего от $s_1, s_2, \dots, s_k$ и многочлена $P_1(q)$, каждый первообразный корень p -й степени из единицы, $p \geq p_0$, является особой точкой функции $P(q)$. В частности, множество всех особых точек функции (4) всюду плотно на окружности $|q| = 1$, а функция $P(q)$ трансцендентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем число $\theta \in \Omega$, не являющееся корнем многочлена P_1 , и пусть $q = r\theta$. Представим многочлены P_i , $i = 1, \dots, k$, в виде

$$P_i(q) = \sum_{m=0}^{d_i} a_{m,i} (\theta - q)^m. \quad (5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(q) &= \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{d_i} a_{m,i} (\theta - q)^m \zeta_q(s_i) \\ &= a_{0,1} \zeta_q(s_1) + \sum_{i=2}^k a_{0,i} \zeta_q(s_i) + \theta(1-r) \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^{d_i} a_{m,i} \theta^{m-1} (1-r)^{m-1} \zeta_q(s_i), \end{aligned}$$

откуда в соответствии с леммой 2 при $r \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} P(q) &\asymp \frac{1}{(1-r)^{s_1}}, & \text{если } s_1 \geq 2, \\ P(q) &\asymp -\frac{\ln(1-r)}{1-r}, & \text{если } s_1 = 1. \end{aligned}$$

Поэтому θ – особая точка функции (4).

Для завершения доказательства остается заметить, что алгебраическая функция имеет особенности лишь в конечном числе точек.

СЛЕДСТВИЕ. *Функции $\zeta_q(s)$, $s \geq 1$, линейно независимы над $\mathbb{C}(q)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо многочленов P_i в (4) можно рассматривать целые функции (в этом случае ряды в (5) бесконечны). Тогда результат теоремы 1 можно усилить, заменив поле $\mathbb{C}(q)$ на поле мероморфных функций.

ТЕОРЕМА 2. *При любом $s > 1$ функции $\zeta_q(1)$ и $\zeta_q(s)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть от противного существует многочлен $P(x_0, x_1)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[q]$ такой, что $P(\zeta_q(1), \zeta_q(s)) \equiv 0$. Запишем его в виде

$$P(x_0, x_1) = \sum_i P_i(q) x_0^{l_{0,i}} x_1^{l_{1,i}},$$

где суммирование распространяется на все ненулевые коэффициенты $P_i(q)$ многочлена $P(x_0, x_1)$.

Выберем число $\theta \in \Omega$, не являющееся корнем ни одного из $P_i(q)$, и пусть $q = r\theta$. Рассмотрим те i , для которых значение суммы $l_{1,i}s + l_{0,i}$ максимально, и выберем из них то, для которого максимально $l_{0,i}$. Пусть это $l_{0,i} = l_0$, а соответствующее $l_{1,i} = l_1$. Тогда, проводя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 1, получаем

$$P(\zeta_q(1), \zeta_q(s)) \asymp (-\ln(1-r))^{l_0} \frac{1}{(1-r)^{l_1 s + l_0}} \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

Это противоречит предположению $P(\zeta_q(1), \zeta_q(s)) \equiv 0$, откуда и следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть для некоторого набора $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{N}$ чисел таких, что $s_i > 1$, $i = 1, \dots, k$, функции $\zeta_q(s_1), \zeta_q(s_2), \dots, \zeta_q(s_k)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(q)$. Тогда функции $\zeta_q(1)$ и $\zeta_q(s_1), \zeta_q(s_2), \dots, \zeta_q(s_k)$ также алгебраически независимы над $\mathbb{C}(q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольный многочлен $P(x_0, x_1, \dots, x_k)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[q]$ можно представить в виде

$$P(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_i P_i(q) x_0^{l_{0,i}} x_1^{l_{1,i}} \dots x_k^{l_{k,i}}, \quad (6)$$

где $P_i(q) \in \mathbb{C}[q]$ – все ненулевые коэффициенты $P(x_0, x_1, \dots, x_k)$.

Аналогично доказательству теоремы 2 выберем число $\theta \in \Omega$, не являющееся корнем ни одного из многочленов P_i , и пусть $q = r\theta$. Из леммы 2 для функций $\zeta_q(s)$, $s > 1$, имеем

$$\zeta_q(s) = \frac{1}{(1-r)^s} \chi_s(r), \quad (7)$$

где $\chi_s(r)$ – ограниченные на отрезке $[0, 1]$ функции. Теперь представим многочлен (6) в виде

$$P(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_l x_0^l \sum_{i \in I(l)} P_i(q) x_1^{l_{1,i}} \dots x_k^{l_{k,i}},$$

где $I(l)$ – множество значений индекса i , для которых $l_{0,i} = l$. Из алгебраической независимости функций $\zeta_q(s_1), \zeta_q(s_2), \dots, \zeta_q(s_k)$ и представления (7) для любого l получаем

$$\sum_{i \in I(l)} P_i(q) \zeta_q(s_1)^{l_{1,i}} \dots \zeta_q(s_k)^{l_{k,i}} \asymp \frac{1}{(1-r)^{m(l)}} \quad \text{при } r \rightarrow 1,$$

где $m(l)$ – целое неотрицательное число. Рассмотрим те l , для которых значение суммы $m(l) + l$ максимально, и выберем из них максимальное $l = l^*$. Тогда

$$P(\zeta_q(1), \zeta_q(s_1), \dots, \zeta_q(s_k)) \asymp (-\ln(1-r))^{l^*} \frac{1}{(1-r)^{m(l^*)+l^*}} \quad \text{при } r \rightarrow 1$$

и, в частности, выражение слева отлично от нуля. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Функции $\zeta_q(1)$ и $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из алгебраической независимости $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ (см. введение), доказанной в [1], и теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mahler K. On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions // J. Austral. Math. Soc. 1969. V. 10. P. 445–450.
- [2] Зудилин В. В. О диофантовых задачах для q -дзета-значений // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 6. С. 936–940.
- [3] Нестеренко Ю. В. О трансцендентности некоторых функций. Рукопись (2003).