Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пчелинцев, Специальность метабелевых алгебр Мальцева, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 257–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 07:43:12

УДК 512.554.5

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВА

С. В. Пчелинцев

Доказано, что для всякой метабелевой алгебры Мальцева M над полем характеристики $\neq 2, 3$ существует альтернативная алгебра A такая, что алгебра M вложима в коммутаторную алгебру $A^{(-)}$. При этом обертывающая альтернативная алгебра A может быть найдена в многообразии алгебр с тождеством $[x, y][z, t] = 0$. Доказательство указанного результата основано на построении аддитивных базисов свободной метабелевой алгебры Мальцева и свободной альтернативной алгебры с тождеством $[x, y][z, t] = 0$.

Библиография: 7 названий.

Введение

Алгебра Мальцева M называется *специальной*, если она вложима в присоединенную алгебру $A^{(-)}$ для подходящей альтернативной алгебры A . Вопрос о специальности произвольной алгебры Мальцева принадлежит Мальцеву. К настоящему времени доказана специальность полупервичных алгебр Мальцева [1] и алгебр Мальцева, удовлетворяющих тождествам простой нелиевой 7-мерной алгебры C_7 [2]. Отметим также, что ряд результатов о специальности некоторых идеалов мальцевских алгебр содержится в работе [3].

Данная заметка посвящена доказательству специальности любой метабелевой (разрешимой индекса 2) алгебры Мальцева над полем характеристики $\neq 2, 3$. Заметка состоит из трех разделов. В разделе 1 доказываются некоторые следствия тождества метабелевости. В разделе 2 строится аддитивный базис свободной метабелевой алгебры Мальцева. В разделе 3 доказана теорема о специальности – сначала для свободной метабелевой алгебры Мальцева, а затем для произвольной метабелевой алгебры Мальцева. Доказано, что для метабелевой алгебры Мальцева существует альтернативная обертывающая алгебра с тривиальным коммутантом¹.

1. Некоторые следствия метабелевости

1.1. Определения, обозначения, тождества. Напомним основные определения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 0001-00339.

¹Идеал с нулевым умножением называется *тривиальным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Антикоммутативная алгебра над полем k характеристики, отличной от 2 и 3, называется *алгеброй Мальцева*, если она удовлетворяет тождеству

$$J(x, y, yz) = J(x, y, z)y, \quad (1)$$

где $J(x, y, z) := (xy)z + (yz)x + (zx)y$ – якобиан элементов x, y, z .

Известно [4], что в алгебре Мальцева выполнены тождества

$$xy^2z = xzy^2 + x(yz)y + xy(yz), \quad (2)$$

$$xyzt + yztx + ztxy + txyz = (xz)(yt), \quad (3)$$

$$J(xy, z, t) + J(xz, y, t) + J(x, z, t)y + J(x, y, t)z = 0, \quad (4)$$

$$2J(x, y, z)t = J(xy, z, t) + J(yz, x, t) + J(zx, y, t), \quad (5)$$

$$J(xy, z, t) = xJ(y, z, t) + J(x, z, t)y - 2J(x, y, zt), \quad (6)$$

где, как обычно, отсутствующая расстановка скобок предполагается правонормированной, например, $xy^2z = ((xy)y)z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра A над полем k называется *альтернативной*, если в ней ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ является кососимметрической функцией от x, y, z .

Определив на аддитивной структуре алгебры A новое умножение $[x, y] := xy - yx$ (коммутатор элементов x, y), получим присоединенную или коммутаторную алгебру $A^{(-)}$. Из тождеств Муфанг вытекает, что если алгебра A альтернативна, то коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ является алгеброй Мальцева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра называется *метабелевой*, если в ней выполнено тождество

$$(xy)(zt) = 0. \quad (7)$$

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, используются следующие обозначения:

- M – свободная метабелева алгебра Мальцева с множеством X свободных порождающих над полем k характеристики, отличной от 2 и 3;
- a' – оператор $R(a)$ умножения на элемент a , действующий на квадрате M^2 ;
- $J(M)$ – подпространство, порожденное якобианами $J(a, b, c)$;
- $E(M)$ – подпространство, порожденное элементами вида abc^2 ;
- $Z(M) = \{z : J(z, M, M) = (0)\}$ – левый центр алгебры M .

Из тождеств (2)–(6) вытекает, что подпространства $J(M)$, $E(M)$, $Z(M)$ являются идеалами произвольной алгебры Мальцева M , а не только метабелевой.

1.2. Вспомогательные тождества алгебры M .

ЛЕММА 1. В алгебре M справедливы следующие соотношения:

- (а) $J(xy^2, x, z) = 0$, в частности, $J(xy^2, y, z) = 0$;
- (б) $J(M^2y^2, z, t) = (0)$, т.е. $E(M) \subseteq Z(M)$;
- (в) $J(M)t^2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Заметим, что если $w \in M^2$, то на основании тождеств (3) и (7) справедливы равенства $J(w, y, z) = w[y', z']$ и $[y'z', t'] = 0$. Значит, $J(wx, y, z) = J(w, y, z)x$ ввиду тождества (6), и указанные функции кососимметричны по переменным x, y, z . В частности, имеем $J(wx, y, z) = J(w, x, y)z$, $J(xy^2, x, z) = J(xyu, x, z) = J(xy, y, x)z = 0$.

Тождество (б) получается линейризацией тождества (а); (в) доказано в [5, § 3, лемма 1, г)].

СЛЕДСТВИЕ. Если $w \in M^2$, то функция $J(wx_1 \dots x_n, y, z)$ кососимметрична по переменным $x_1, \dots, x_n, y, z$.

В дальнейшем это следствие используется без дополнительных пояснений.

ЛЕММА 2. В алгебре Мальцева M справедливо тождество

$$J(a, b, c)D = J(aD, b, c) + J(a, bD, c) + J(a, b, cD) - 6J(yza, b, c),$$

где оператор $D := D(y, z)$ определяется равенством $aD = J(a, y, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождество (6) в терминах оператора D принимает вид

$$(ab)D = a \cdot bD + aD \cdot b - 2J(a, b, yz).$$

Отсюда на основании тождества метабелевости (7) имеем

$$\begin{aligned} J(abc, y, z) &= (abc)D = (ab) \cdot cD + (ab)D \cdot c - 2J(ab, c, yz) = (ab)D \cdot c \\ &= (a \cdot bD + aD \cdot b - 2J(a, b, yz))c = a(dD)c + (aD)bc - 2J(a, b, yz)c \\ &= a(bD)c + (aD)bc - 2J(yza, b, c), \end{aligned}$$

т.е.

$$J(abc, y, z) = a(bD)c + (aD)bc - 2J(yza, b, c).$$

Переставляя циклически переменные a, b, c и складывая полученные три равенства, получаем на основании (7) требуемое тождество.

1.3. Однородные компоненты якобиана $J(M)$ типа $[3, 1, \dots]$ и $[2, 2, \dots]$. Мы считаем известными основные понятия, связанные с тождествами и свободными алгебрами. Все необходимые факты можно найти в монографиях [6, гл. 2] и [7, гл. 1].

ЛЕММА 3. Однородный многочлен алгебры M степени $[3, 1, \dots]$ или $[2, 2, \dots]$ содержится в идеале $E(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая факторалгебру $M/E(M)$, можно считать, что в метабелевой алгебре выполнено тождество

$$xyz^2 = 0, \tag{8}$$

а также его линейризация

$$xy(z' \circ t') = 0, \quad \text{где } a \circ b = ab + ba. \tag{9}$$

Тогда, во-первых, $xy(x' \circ y') = 0$ в силу тождества (9), а, во-вторых, в силу бинарной лиевостности алгебры Мальцева $xy[x', y'] = 0$, значит,

$$xy^2x = 0. \quad (10)$$

Докажем, что одночлен y типа $[2, 2, \dots]$ равен нулю (одночлены типа $[3, 1, \dots]$ рассматриваются аналогично). Пусть, от противного, ненулевой одночлен v имеет степень 2 по каждой из переменных x и y . Если полная степень одночлена v равна 4, то утверждение вытекает из тождества (10). Допустим, что одночлен v имеет вид $aby_1 \dots y_n$, где $n \geq 3$ и $a, b, y_1, \dots, y_n$ – переменные, среди которых два раза встречается каждая из букв x и y . Если среди $y_1, \dots, y_n$ дважды встречается одна буква, то в силу тождеств (8) и (9) получаем $v = 0$. Итак, можно считать, что среди переменных $y_1, \dots, y_n$ каждая из букв x и y встречается ровно один раз. Без ограничения общности, ввиду тождества (9) можно считать, что $y_1 = y, y_2 = x$. Следовательно, одна из букв a, b совпадает с x , а другая с y , и на основании тождества (10) имеем

$$v = aby_1 \dots y_n = \pm xy^2xy_3 \dots y_n = 0.$$

Противоречие.

ЛЕММА 4. *Всякий однородный многочлен из якобиана $J(M)$ степени $[3, 1, \dots]$ или $[2, 2, \dots]$ является нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку идеал $J(M)$ линейно порождается якобианами, то утверждение достаточно доказать для якобианов $J(p, q, r)$, в которых p, q, r – одночлены над X . В силу метабелевостности можно считать, что $q, r \in X$. Из бинарной лиевостности алгебры Мальцева вытекает, что одночлен p имеет степень ≥ 3 . Значит, на основании следствия из леммы 1 можно считать, что одночлен p имеет тип $[3, 1, \dots]$ или $[2, 2, \dots]$. Применяя теперь леммы 3 и 1, получаем, что $p \in E(M) \subseteq Z(M)$, т.е. $J(p, q, r) = 0$.

2. Аддитивный базис алгебры M

Будем считать в дальнейшем, что множество $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ свободных порождающих алгебры M упорядочено по возрастанию индексов. Укажем аддитивный базис алгебры M , являющийся объединением базиса $B(L)$ свободной метабелевой алгебры Ли L и базиса $B(J(M))$ якобиана $J(M)$. Хорошо известно [6, гл. 4], что одночлены

$$xyt_1 \dots t_n, \quad \text{где } x, y, t_i \in X, \quad x < y, \quad x \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots,$$

составляют базис $B(L)$ алгебры Ли L .

2.1. Правильные J -слова. Поскольку однородные многочлены из якобиана $J(M)$ степени $[3, 1, \dots]$ и $[2, 2, \dots]$ равны нулю (в силу леммы 4), а характеристика поля $\neq 2, 3$, то для описания аддитивной структуры алгебры M достаточно указать базис пространства полилинейных элементов, содержащихся в якобиане $J(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Правильными J -словами* над множеством $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \geq 3$, называются следующие многочлены:

при $n = 3$: $J(x_1, x_2, x_3)$;

при $n = 4$: $J(x_2, x_3, x_4, x_1), J(x_1x_p, x_q, x_r), q < r$;

при $n = 5$: $J(x_1(x_2x_3), x_4, x_5), J([x_1, x_2, x_3], x_4, x_5), J(J(x_p, x_2, x_3), x_q, x_r), q < r$;

при $n \geq 6$: $J(x_1(x_2x_3)x_4 \dots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n), J([x_1, x_2, x_3]x_4 \dots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n), J(J(x_p, x_2, x_3)x_{q_1} \dots x_{q_{n-5}}, x_r, x_s), q_1 < \dots < q_{n-5} < r, s$, где $[x, y, z] := xyz + xzy$.

ЛЕММА 5. *Правильные J -слова линейно независимы в коммутаторной алгебре Дорофеева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – альтернативная алгебра Дорофеева [7, гл. 6], т.е. разрешимая индекса 2, но не нильпотентная альтернативная алгебра. Легко проверить, что в алгебре D справедливы тождества $[[ab, x], x] = 0$, $J^-(x, y, z) = 6(x, y, z)$, где $J^-(x, y, z)$ – якобиан в присоединенной алгебре $D^{(-)}$. Следовательно, $[[ab, x], y] = 3abxy$. Отсюда вытекает, что в алгебре $D^{(-1)}$ не выполняются тождества

$$J(xy^2x_1 \cdots x_n, z, t) = 0, \quad n \geq 0.$$

Допустим теперь, что в алгебре $D^{(-)}$ правильные J -слова степени 5 удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} \alpha J(x_1(x_2x_3), x_4, x_5) + \beta J([x_1, x_2, x_3], x_4, x_5) + \gamma_1 J(J(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5) \\ + \gamma_4 J(J(x_4, x_2, x_3), x_1, x_5) + \gamma_5 J(J(x_5, x_2, x_3), x_1, x_4) = 0. \end{aligned}$$

Считая $w \in [D, D]$ и полагая последовательно $x_1 = w$, $x_4 = w$, $x_5 = w$, получаем $\gamma_1 = 0$, $\gamma_4 = 0$, $\gamma_5 = 0$. Значит, $\alpha J(x_1(x_2x_3), x_4, x_5) + \beta J([x_1, x_2, x_3], x_4, x_5) = 0$. Полагая $x_2 = x_3$, получим в алгебре $D^{(-)}$ тождество вида $2\beta J(xy^2, z, t) = 0$, или после линеаризации имеем $\beta J^-([ab, x], y, z, t) = 0$. Тогда $\beta abxyz = 0$ и, поскольку алгебра D не нильпотентна, то $\beta = 0$, а значит, и $\alpha = 0$. Тем самым, доказана линейная независимость правильных J -слов степени 5. Линейная независимость остальных правильных J -слов доказывается аналогично; заметим, что линейная независимость правильных J -слов степени $n \geq 6$ доказана в [5, § 3, лемма 4].

2.2. Аддитивный базис якобиана $J(M)$.

ЛЕММА 6. *Всякий однородный многочлен степени $[1, 1, \dots, 1]$ над множеством X_n , $n \geq 3$, из якобиана $J(M)$ представим в виде линейной комбинации правильных J -слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 3$ или $n = 4$, то требуемое утверждение легко вытекает из кососимметричности якобиана и полной линеаризации тождества $J(xy, x, y) = 0$. Если $n \geq 6$, то утверждение вытекает из [5, § 3, лемма 3].

Итак, пусть $n = 5$; $X_5 = \{x, y, z, t, u\}$, $x < y < z < t < u$. Рассмотрим сначала полилинейный многочлен j над X_5 вида $j(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = J([t_1, t_2, t_3], t_4, t_5)$, где t_i обозначают переменные из множества X_5 . Пусть V – линейное подпространство, порожденное правильными J -словами над X_5 , т.е. многочленами вида $J(xy, z, *, *)$, $J([x, y, z], *, *)$, $J(J(*, y, z), *, *)$, где через $*$ обозначены переменные из множества X_5 .

Заметим, что функция $J([t_1, t_2, t_3], t_4, t_5)$ симметрична относительно t_2 и t_3 ; ввиду леммы 1 она кососимметрична по переменным t_1, t_4, t_5 , и, кроме того, справедливы тождества

$$J([a, b, c], p, q) + J([p, b, c], a, q) = 0, \quad (11)$$

$$J([a, b, c], p, q) + J([a, c, p], b, q) + J([a, p, b], c, q) = 0. \quad (12)$$

Отсюда вытекает, что многочлен j является линейной комбинацией слов $J([*, y, *], *, *)$. Каждый из элементов вида $J([*, y, *], *, *)$ ввиду аналогичных соображений является

линейной комбинацией элементов $J([x, y, *], *, *)$ и $J([*, y, x], *, *)$. Тогда, без ограничения общности, достаточно рассмотреть следующие две возможности:

$$\text{I) } j = J([z, y, x], *, *),$$

$$\text{II) } j = J([x, y, *], z, *).$$

Рассмотрим последовательно каждый из этих случаев.

I) Случай $j = J([z, y, x], *, *)$. Поскольку $2xyz = x(yz) + [x, y, z] + J(x, y, z)$, то для полилинейного одночлена $w(x, y, z)$ верно соотношение

$$J(w(x, y, z), *, *) \in V, \quad (13)$$

в частности, $j \equiv 0$ (здесь и далее знак $\equiv$ означает сравнение по модулю V).

$$\text{II) Случай } j = J([x, y, p], z, q).$$

Рассмотрение этого случая представим в виде последовательности шагов.

Шаг 1. Докажем, что $2J(xb^2, y, z) = 2J(xb, y, z)b = -J(J(b, y, z), x, b)$.

Действительно, ввиду леммы 2 и тождества (6) имеем

$$\begin{aligned} 2J(xb^2, y, z) &= 2J(xb, y, z)b = 2(J(xJ(b, y, z) + J(x, y, z)b - 2J(x, b, yz))b \\ &= -2J(b, y, z)x'b' = -J(b, y, z)[x', b'] - J(b, y, z)(x' \circ b') \\ &= -J(J(b, y, z), x, b). \end{aligned}$$

Шаг 2. Докажем, что $J([x, p, q], y, z) \equiv 0$.

Тождество из шага 1 может быть записано в виде $J([x, b, b], y, z) = -J(J(b, y, z), x, b)$.

Проведя его линеаризацию, получаем

$$2J([x, p, q], y, z) = -J(J(p, y, z), x, q) - J(J(q, y, z), x, p) \equiv 0,$$

поскольку $J(J(*, y, z), *, *) \equiv 0$. Тем самым, требуемое сравнение доказано.

Шаг 3. Функция $j = J([x, y, p], z, q)$ кососимметрична (по модулю V) относительно p и q , а также кососимметрична относительно y и z , т.е. справедливы сравнения

$$\begin{aligned} J([x, y, p], z, q) + J([x, y, q], z, p) &\equiv 0, \\ J([x, y, p], z, q) + J([x, z, p], y, q) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= J([x, y, p], z, q) + J([x, p, q], z, y) + J([x, q, y], z, p) \quad \text{ввиду (12)} \\ &\equiv J([x, y, p], z, q) + J([x, q, y], z, p) \quad \text{ввиду шага 2} \\ &= J([x, y, p], z, q) + J([x, y, q], z, p), \\ 0 &= J([x, y, p], z, q) + J([x, p, z], y, q) + J([x, z, y], q, p) \quad \text{ввиду (12)} \\ &\equiv J([x, y, p], z, q) + J([x, p, z], y, q) \quad \text{ввиду (13)} \\ &= J([x, y, p], z, q) + J([x, z, p], y, q). \end{aligned}$$

Шаг 4. Докажем, что $J(xpy, z, q) \equiv -J(xqy, z, p)$. Действительно,

$$2J(xby, z, b) = 2J(xb, y, z)b = -J(J(b, y, z), x, b)$$

в силу равенства из шага 1. Проведя линеаризацию ввиду сравнения $J(J(*, y, z), *, *) \equiv 0$, получаем требуемое сравнение.

Шаг 5. Докажем, что $J(J(x, p, q), y, z) \equiv 0$. Действительно, ввиду леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} J(J(x, p, q), y, z) &= J(J(x, y, z), p, q) + J(x, J(p, y, z), q) \\ &\quad + J(x, p, J(q, y, z)) - 6J(yz, p, q) \equiv 0, \end{aligned}$$

поскольку $J(J(*, y, z), *, *) \equiv 0$ и $J(x(yz), *, *) \equiv 0$.

Шаг 6. Докажем, что $J(x(pq), y, z) \equiv 0$. Заметим сначала, что

$$J(x(ab), a, b) = -J(a(ab), x, b) = J(ba^2, b, x) = 0$$

в силу леммы 1. Используя линеаризацию тождества $J(a(ab), a, b) = 0$, имеем в силу соотношения (13) и шага 4

$$\begin{aligned} -J(x(pq), y, z) &= J(x(yq), p, z) + J(x(pz), y, q) + J(x(yz), p, q) \\ &\equiv J(x(yq), p, z) + J(x(pz), y, q) \equiv -J(x(yq), q, z) + J(x(pz), y, q) \\ &= J(z(yq), q, x) - J(y(pz), x, q) = J(pyz - pzy, q, x) \\ &= J(J(p, y, z) + p(yz), q, x) = J(J(p, y, z), q, x) + J(x(yz), p, q) \\ &\equiv J(J(p, y, z), q, x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Теперь мы можем завершить проверку сравнения $j \equiv 0$, где $j = J([x, y, p], z, q)$ – якобиан из случая II. Ввиду соотношения (13) и сравнений из шагов 2, 5, 6 имеем

$$\begin{aligned} 2j &= 2J([x, y, p], z, q) = 2J(xyp + xpy, z, q) = -2J(xyz, p, q) + 2J(xpy, z, q) \\ &\equiv 2J(xpy, z, q) = 2J(xpq, y, z) = J([x, p, q] + J(x, p, q) + x(pq), y, z) \equiv 0. \end{aligned}$$

Итак, утверждение леммы доказано для якобианов вида $J([*, *, *], *, *)$.

Тогда по модулю V функция $J(t_1 t_2 t_3, t_4, t_5)$, где t_i – переменные из X_5 , кососимметрична по всем переменным, и, значит, содержится в пространстве V .

ЗАМЕЧАНИЕ. Повторив доказательство леммы 6, легко понять, что всякий многочлен типа $[1, 2, 1, \dots, 1]$ из $J(M)$ пропорционален элементу $J(x_1 x_2^2 x_3 \dots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$, $n \geq 5$. Следовательно, указанные элементы вместе с правильными J -словами образуют базис $J(M)$.

3. Вложение метабелевых алгебр Мальцева в альтернативные алгебры

3.1. Специальность свободной метабелевой алгебры Мальцева. Пусть поле K является расширением поля k . Тогда алгебра $K \otimes_k M$ является свободной метабелевой алгеброй Мальцева над полем K . Поэтому в дальнейшем можно считать, что поле k бесконечно, а любое многообразие k -алгебр однородно.

Свободная метабелева k -алгебра M обладает базисом $B(L) \cup B(J(M))$ (см. раздел 2). Далее, легко понять, что элементы из $B(L)$ линейно независимы в 2-мерной неабелевой алгебре Ли, которая изоморфна алгебре $C^{(-)}$, где C – ассоциативная алгебра матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in k.$$

В разделе 2 было доказано, что многочлены из $B(J(M))$ линейно независимы в коммутаторной алгебре Дороеева $D^{(-)}$, следовательно, элементы из $B(L) \cup B(J(M))$ линейно независимы в коммутаторной алгебре $(C \oplus D)^{(-)}$. Обозначим через F свободную алгебру над X в многообразии, порожденном алгебрами C и D . Тогда из предыдущего получаем, что свободная метабелева алгебра Мальцева M (над X) изоморфна подалгебре алгебры $F^{(-)}$, порожденной множеством X . Следовательно, свободная метабелева алгебра Мальцева специальна.

3.2. Одно замечание об альтернативной алгебре, в которой выполнено тождество $[x, y][z, t] = 0$. Поскольку алгебры C и D удовлетворяют тождеству

$$[x, y][z, t] = 0, \quad (14)$$

то в качестве альтернативной обертывающей алгебры для M можно взять свободную альтернативную алгебру A с единицей, удовлетворяющую тождеству (14).

ЛЕММА 7. Пусть A – альтернативная алгебра, удовлетворяющая тождеству (14). Тогда ее коммутант A' является тривиальным идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в алгебре A верно тождество $J^-(x, y, z) = 6(x, y, z)$, то коммутант представим в виде $A' = [A, A]A$. Далее, если v, w – коммутаторы, то $(v, w, a) = (1/6)J^-(v, w, a) = 0$, откуда имеем

$$w(va) = (wv)a = 0, \quad (va)w = (av + [v, a])w = (av)w = a(vw) + (a, v, w) = 0,$$

т.е. $[A, A] \subseteq \text{Ann } A'$, значит, $A'^2 = (0)$.

3.3. Аддитивный базис альтернативной алгебры, в которой выполнено тождество $[x, y][z, t] = 0$. Всюду ниже A – свободная альтернативная алгебра с тождеством (14), X – множество свободных порождающих, M – подалгебра алгебры $A^{(-)}$, порожденная множеством X .

ЛЕММА 8. Если $y_1, y_2, \dots$ – базис пространства $[M, M]$, то алгебра A обладает аддитивным базисом над полем k , состоящим из элементов вида

$$\text{а) } x_{i_1} \circ x_{i_2} \circ \dots \circ x_{i_n}, \quad \text{б) } y_p \circ (x_{i_1} \circ x_{i_2} \circ \dots \circ x_{i_n}),$$

где $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$, $n \geq 0^2$; отсутствующая расстановка скобок правонормирована.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала индукцией по степени одночлена, что всякий одночлен является линейной комбинацией многочленов типа а) и

$$\text{в) } y \circ (x_{i_1} \circ x_{i_2} \circ \dots \circ x_{i_n}),$$

где y – однородный многочлен из $[M, M]$, $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$.

Пусть A' – коммутант алгебры A . Факторалгебра A/A' является свободной ассоциативно-коммутативной алгеброй, т.е. A/A' – алгебра многочленов, в которой элементы типа а) образуют базис. Далее, произвольный элемент коммутанта A' можно записать в виде линейной комбинации элементов v вида $v = [p, q]r$, где p, q, r – одночлены. Каждый из одночленов p, q по предположению индукции представим в виде линейной комбинации элементов типа а) и в). Поскольку коммутатор является йордановым дифференцированием, то элемент v является линейной комбинацией элементов (того же состава, что и v) вида $wT(v_1) \dots T(v_s)$, где w – однородный элемент из $[M, M]$, $v_1, \dots, v_s$ – одночлены над X , $T(v)$ – оператор правого или левого умножения в алгебре A на элемент v .

Докажем, что элемент ξ вида $wT(v_1) \dots T(v_s)$ при указанных ограничениях на элементы $w, v_1, \dots, v_s$, представим в виде линейной комбинации элементов типа в). Для

²Для $n = 0$ слово типа а) считается равным единице 1, а слово типа б) – элементу y_p .

этого рассмотрим вспомогательный элемент t вида $t = xT(v_1) \cdots T(v_s)$, считая, что переменная x (из множества X) больше всех переменных, входящих в состав многочлена ξ . По индукции элемент t представим в виде линейной комбинации базисных элементов, относительно переменных, входящих в слово t . Подставим в полученную линейную комбинацию вместо переменной x элемент w . При этой подстановке элемент t перейдет в ξ ; базисные слова типа а) перейдут в слова типа в), а базисные слова типа в) либо перейдут в нулевые, либо в элементы вида в).

Тем самым, доказано, что элементы вида а) и в), линейно порождают пространство A . Значит, тем же свойством обладают элементы вида а) и б).

Теперь докажем линейную независимость элементов типа а) и б). Для этого достаточно ограничиться рассмотрением элементов типа б). Пусть для некоторых ненулевых скаляров верно равенство $\sum_p \alpha_p y_p \circ f_p = 0$, где f_p — одночлены типа а). Среди всех одночленов типа f_p выберем одночлены, имеющие максимальную полную степень, а среди них выберем наибольший (в смысле лексикографии) одночлен

$$w = \underbrace{x_1 \circ \cdots \circ x_1}_{t_1} \circ \underbrace{x_2 \circ \cdots \circ x_2}_{t_2} \circ \cdots \circ \underbrace{x_n \circ \cdots \circ x_n}_{t_n}.$$

Обозначая, как обычно, через $\Delta(x)$ оператор частной производной по переменной x [7] и применяя к тождеству $\sum_p \alpha_p y_p \circ f_p = 0$ оператор $\Delta^{t_1}(x_1) \Delta^{t_2}(x_2) \cdots \Delta^{t_n}(x_n)$, получаем $\sum_p 2^N \alpha_p y_p = 0$ (степень двойки появляется за счет йордановых произведений), суммирование ведется по тем индексам p , для которых верно равенство $f_p = w$. Поскольку элементы y_p линейно независимы, то хотя бы одно из чисел α_p равно нулю, что невозможно по предположению.

СЛЕДСТВИЕ. а) Элементы типа б) из леммы 8 образуют аддитивный базис коммутанта A' .

б) Имеет место равенство $M \cap A' = [M, M]$.

3.4. Основной результат. Нам потребуется следующее уточнение леммы 8.

ЛЕММА 9. Пусть I — идеал алгебры M ; $h_1, h_2, \dots$ — аддитивный базис пространства $I \cap [M, M]$. Дополним эту систему до базиса пространства I элементами $g_1, g_2, \dots$. Пусть также $f_1, f_2, \dots$ — дополнение системы $h_1, h_2, \dots$ до базиса пространства $[M, M]$; $e_1, e_2, \dots$ — дополнение системы $f_1, f_2, \dots, g_1, g_2, \dots, h_1, h_2, \dots$ до базиса пространства M . Тогда алгебра A обладает аддитивным базисом над полем k , состоящим из элементов вида:

- а) $a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_n},$
- б) $y \circ (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_n}),$

где все a_i принадлежат упорядоченному множеству $e_1 < e_2 < \cdots < g_1 < g_2 < \cdots$; $i_1 \leq i_2 \leq \cdots, n \geq 0$; $y \in \{f_1, f_2, \dots, h_1, h_2, \dots\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия из леммы 8 вытекает, что система многочленов типа а) и б) линейно порождает обертывающую алгебру A . Для доказательства линейной независимости указанных элементов рассмотрим канонические гомоморфизмы $\bar{\cdot} : A \rightarrow A/A', * : M \rightarrow M/[M, M]$. В силу следствия из леммы 8 гомоморфизм $*$ является ограничением на M гомоморфизма $\bar{\cdot}$.

Поскольку элементы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots$ образуют базис пространства $k\bar{X}$, то факторалгебра A/A' изоморфна алгебре многочленов $k[\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots]$. Учитывая,

что образы слов типа а) при гомоморфизме $\bar{\cdot}$ линейно независимы, получаем линейную независимость самих слов типа а). Тогда, без ограничения общности, можно считать, что линейно зависимы слова типа б). Каждый из элементов $y \circ (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \dots \circ a_{i_n})$ на основании леммы 7 имеет вид $y \circ (a_{i_1}^* \circ a_{i_2}^* \circ \dots \circ a_{i_n}^*)$, где образ a^* получен из a отбрасыванием однородных компонент степени большей 1. Значит, мы получаем линейную зависимость элементов $y \circ (v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_n})$, где (v_s) – базис пространства kX . Пусть φ – автоморфизм алгебры A , продолжающий отображение $x_s \varphi = v_s$. Тогда под действием φ^{-1} многочлены вида $y \circ (v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_n})$ перейдут в базисные элементы типа б) из леммы 8. Тем самым, линейно зависимыми оказались базисные слова из леммы 8, что, очевидно, невозможно.

ТЕОРЕМА. *Всякая метабелева алгебра Мальцева над полем характеристики, отличной от 2 и 3, специальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что для произвольного идеала I алгебры M верно равенство $I^\wedge \cap M = I$, где $I^\wedge$ – идеал, порожденный множеством I в A .

В силу леммы 9 легко понять, что идеал $I^\wedge$ линейно порождается элементами $a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \dots \circ a_{i_n}$, $y \circ (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \dots \circ a_{i_n})$, в запись каждого из которых входит хотя бы один базисный элемент идеала I . Если некоторая линейная комбинация указанных элементов содержится в алгебре Мальцева M , то получаем равенство

$$\begin{aligned} & \sum \beta a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \dots \circ a_{i_n} + \sum \gamma y \circ (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \dots \circ a_{i_n}) \\ &= \sum \lambda e + \sum \mu f + \sum \nu g + \sum \eta h. \end{aligned}$$

В силу леммы 9 в правой части этого равенства векторы типа e и f могут встречаться только с нулевыми коэффициентами. Значит, в правой части последнего равенства находятся только элементы из идеала I .

Доказанное равенство $I^\wedge \cap M = I$ позволяет завершить доказательство теоремы. Образ алгебры M при каноническом гомоморфизме $A \rightarrow A/I^\wedge$ совпадает с алгеброй $(M + I^\wedge)/I^\wedge$ изоморфной алгебре $M/(I^\wedge \cap M) = M/I$. Следовательно, алгебра M/I вложима в присоединенную алгебру $(A/I^\wedge)^{(-)}$, т.е. является специальной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. Т. Первичные алгебры Мальцева // Матем. заметки. 1982. Т. 31. №5. С. 669–678.
- [2] Sverchkov S. Varieties of special algebras // Comm. Algebra. 1988. V. 16. P. 1877–1919.
- [3] Филиппов В. Т. О вложении мальцевских алгебр в альтернативные // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. №4. С. 443–465.
- [4] Sagle A. A. Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101. №3. P. 426–458.
- [5] Пчелинцев С. В. Разрешимые индекса 2 многообразия алгебр // Матем. сб. 1981. Т. 115. №2. С. 179–203.
- [6] Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
- [7] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.