Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Таламбуца, Достижимость показателя экспоненциального роста в свободных произведениях циклических групп, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 614–618

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:30:57

УДК 512.543.52

ДОСТИЖИМОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА В СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

А. Л. Таламбаца

В работе исследуется множество показателей экспоненциального роста конечнопорожденной группы относительно ее всевозможных порождающих. Доказывается, что нижняя грань этого множества достигается в свободном произведении циклической группы простого порядка на свободную группу конечного ранга.

Библиография: 6 названий.

Пусть группа G порождена конечным множеством элементов $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Функцией роста* $F_{G,A}(n)$ группы G относительно A называется количество элементов группы G , выражимых групповыми словами длины не больше n в алфавите A . Из очевидного неравенства $F_{G,A}(n+m) \leq F_{G,A}(n) \cdot F_{G,A}(m)$ следует, что (см. [1, утверждение VI.C.56]) существует предел

$$\lambda(G, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_{G,A}(n))^{1/n}.$$

Этот предел называется *показателем экспоненциального роста* группы G относительно множества порождающих A . Так как далее мы будем рассматривать только такие показатели роста, то слово “экспоненциальный” здесь будем опускать.

Говорят, что группа G имеет *экспоненциальный рост*, если $\lambda(G, A) > 1$ для некоторого конечного множества порождающих A . Можно показать, что тогда и для любого множества порождающих A' выполнено $\lambda(G, A') > 1$.

Минимальным показателем роста группы G называется точная нижняя грань $\lambda(G) = \inf_A \lambda(G, A)$ по всем множествам порождающих A .

Возникает естественный вопрос: для каких групп экспоненциального роста эта нижняя грань достигается при некотором выборе множества A (см. [1, VII.C.19])? Недостижимость минимального показателя роста была установлена для некоторых классов конечнопорожденных групп (см. [2]–[4]). Несложно доказывается (см. [1, утверждение VII.13]), что минимальный показатель роста свободной группы ранга k равен $2k - 1$ и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01290, и Программы поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-1545.2003.1.

достигается на любом множестве порождающих из k элементов. До настоящего времени был известен только этот пример групп, имеющих экспоненциальный рост, в которых достигается минимальный показатель роста.

Для доказательства основного результата нам потребуется три вспомогательные леммы. Всюду далее мы будем считать p фиксированным простым числом. Будем обозначать через $\mathbb{Z}_p$ циклическую группу порядка p , а через $\mathbb{F}_k$ – свободную группу конечного ранга k . Если x – действительное число, то через $[x]$ обозначается его целая часть, а через $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число, большее x .

ЛЕММА 1. *Для любого непустого слова R в алфавите $A = \{a_1^{\pm 1}, a_1^{\pm 1}, \dots, a_{k+1}^{\pm 1}\}$ найдется несократимое слово P длины $|P| = \lceil \log_3 |R| \rceil$, которое не является подсловом никакой циклической перестановки R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всего существует ровно $(2k+2) \cdot (2k+1)^{l-1}$ несократимых в A слов длины l , что строго больше, чем 3^l . Очевидно, что в циклических перестановках слова R есть не более $|R|$ различных подслов длины l . Положив $l = \lceil \log_3 |R| \rceil$, получим, что несократимых слов длины l больше, чем подслов длины l в циклических перестановках слова R . Отсюда следует, что искомое слово P существует.

ЛЕММА 2. *В любом конечном множестве, порождающем группу $G = \mathbb{F}_k * \mathbb{Z}_p$, есть подмножество из $k+1$ элементов, порождающее в G подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}_{k+1}$ или $\mathbb{F}_k * \mathbb{Z}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = [G, G]G^p$ и φ – естественный эпиморфизм $G \rightarrow G/N$. Ясно, что факторгруппа $H = G/N$ изоморфна прямой сумме $\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p$. Будем рассматривать ее как векторное пространство $GF(p)^{k+1}$ над конечным полем $GF(p)$ вычетов по модулю p .

Пусть группа G порождена некоторым множеством $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Тогда H порождается системой векторов $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m)$. Выберем в этой системе линейно независимую подсистему из $k+1$ векторов $v_1, \dots, v_{k+1}$, и пусть $b_1, \dots, b_{k+1}$ – элементы из A , которые соответственно проектируются на векторы этой подсистемы. Покажем далее, что подмножество $B = \{b_1, \dots, b_{k+1}\}$ удовлетворяет условию леммы.

Так как система $\{v_i\}$ линейно независима, то она порождает $G_{ab,p}$, т.е. группу ранга $k+1$. Отсюда следует, что порожденная множеством B в группе G подгруппа $gp(B)$ имеет ранг $k+1$, и тогда по теореме Куроша о подгруппах свободных произведений для нее есть следующие возможности:

$$\mathbb{F}_{k+1}, \quad \mathbb{F}_k * \mathbb{Z}_p, \quad \mathbb{F}_{k-1} * \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p, \quad \dots, \quad \mathbb{Z}_p * \dots * \mathbb{Z}_p.$$

Случаи, отличные от первых двух, невозможны. Действительно, предположим, что группа $gp(B)$ изоморфна свободному произведению $\mathbb{F}_{k-m+1} * \mathbb{Z}_p * \dots * \mathbb{Z}_p$, где $m \geq 2$. Пусть $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{k+1}\}$ – множество порождающих группы $gp(B)$, относительно которых она задается как $\langle C \mid c_1^p = 1, \dots, c_m^p = 1 \rangle$. Так как элементы $c_1, \dots, c_m$ имеют конечный порядок, то они лежат в нормальном замыкании единственного свободного множителя $\mathbb{Z}_p$ группы G и при отображении φ переходят в одно и то же слагаемое группы $G_{ab,p}$. Так как это слагаемое – циклическая группа простого порядка, то

один из элементов $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m)$ есть степень другого. Предположим, что это элемент $\varphi(c_i)$, тогда мы имеем

$$G_{ab,p} = gp(\varphi(B)) = gp(\varphi(C)) = gp(\varphi(C \setminus \{c_i\})),$$

т.е. $G_{ab,p}$ может быть порождена множеством, состоящим из k элементов. Приходим к противоречию, так как ранг группы $G_{ab,p} = GF(p)^{k+1}$ равен $k+1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ и $G = \langle A \mid R^n = 1 \rangle$, где R — циклически несократимое слово. Тогда при $(n-1)|R| \geq 15$ выполнено неравенство

$$\lambda(G, A) \geq (2k+1)^{1-(1+\lceil \log_3 |R| \rceil)/\lfloor (n-1)|R|/3 \rfloor}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 найдем несократимое слово P длины $l = \lceil \log_3 |R| \rceil$, не являющееся подсловом циклических перестановок R . Положим $L = \lfloor (n-1)|R|/3 \rfloor$, и пусть $(n-1)|R| \geq 15$, тогда $L > l+1$. Рассмотрим слова следующего вида:

$$PC_1P^{-1}C_2PC_3P^{-1} \dots P^{-1}C_{2t}P, \quad \text{где } |C_i| = L-l. \quad (2)$$

Пусть заданы два графически различных несократимых слова вида (2):

$$U = PC_1P^{-1}C_2PC_3P^{-1} \dots P^{-1}C_{2t}P, \quad V = PD_1P^{-1}D_2PD_3P^{-1} \dots P^{-1}D_{2t}P.$$

Покажем, что они задают различные элементы группы G . Рассмотрим слово W , являющееся результатом сокращения слова UV^{-1} . Так как U и V несократимы, то в UV^{-1} сокращения возможны лишь на стыке. Так как $|C_i| = |D_i|$, то происходит попарное сокращение подслов: C_i с D_i^{-1} и P с P^{-1} . При этом, если взаимное сокращение P с P^{-1} началось, то оно происходит полностью.

Слово W непусто, так как U и V графически различны. Пусть сокращение произошло до пары слов C_{i+1} , D_{i+1}^{-1} , которые сократились не полностью и оставили соответственно куски C' и D'^{-1} . Тогда получаем, что

$$W = PC_1P^{-1} \dots C_iP^{-1}C'D'^{-1}P^{-1}D_i^{-1}P^{-1} \dots PD_1P^{-1}.$$

По такой записи легко проверяется, что любое подслово длины $3L-1$ в слове W , содержит вхождения P и P^{-1} .

Докажем, что слово W не содержит вхождений циклических сдвигов слова $R^{(n-1)}$. Предположим, что такое вхождение есть, тогда его длина равна $(n-1)|R| > 3L-1$, значит, оно содержит подслово P . Тогда, очевидно, слово P входит в некоторый циклический сдвиг слова R внутри сдвига R^{n-1} . Но это противоречит изначальному построению слова P .

Аналогично доказывается, что в W нет вхождений циклических сдвигов $R^{-(n-1)}$.

По теореме Ньюмана о группах с одним определяющим соотношением и кручением (см. [5, с. 279]) из того, что W не содержит циклических сдвигов $R^{\pm(n-1)}$, следует, что $W \neq e$, следовательно, слова U и V задают различные элементы G .

Для построения графически различных несократимых слов вида (2) будем выбирать различные наборы $(C_1, \dots, C_{2t})$ следующим образом. Набор строится слева направо. Все буквы кроме последней в очередном слове C_i выбираются так, чтобы текущая буква не была обратной к предыдущей букве в уже построенном начале слова. Очевидно, есть $2k + 1$ варианта выбора таких букв на каждом шаге. Последнюю букву в каждом C_i выбираем так, чтобы она не была обратной к предпоследней букве в слове C_i и к первой в слове P^{-1^i} . В этом случае заведомо есть $2k$ вариантов выбора.

Рассмотрев всевозможные описанные варианты выбора, получаем всего $(2k)^{2t} \times (2k+1)^{2t(L-(l+1))}$ графически различных слов вида (2). Все они имеют длину $T = 2tL + l$ и задают различные элементы группы G . Это означает, что

$$F_{G,A}(T)^{1/T} \geq (2k+1)^{2t(L-(l+1))/(2tL+l)}.$$

Отсюда соотношение (1) вытекает в результате предельного перехода к $t \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА. *Минимальный показатель роста группы $G = \mathbb{F}_k * \mathbb{Z}_p$ достигается на некотором множестве порождающих для G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что в группе G существует такое множество порождающих A_0 , что для любого множества A из $k+1$ порождающих $\lambda(G, A_0) \leq \lambda(G, A)$.

Рассмотрим стандартное задание $G = \langle c_1, \dots, c_{k+1} \mid c_{k+1}^p = 1 \rangle$. По теореме Грушко–Неймана (см. [6, с. 202]) каждое множество порождающих $A = \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ приводится нильсеновскими преобразованиями к множеству порождающих вида $\{c_1^{\pm 1}, \dots, c_k^{\pm 1}, c_{k+1}^s\}$. Индукцией по числу преобразований элементарно показывается, что тогда группа G имеет следующее задание относительно A : $G = \langle a_1, \dots, a_{k+1} \mid R_A^p = 1 \rangle$, где R_A – некоторое циклически несократимое слово, которое является записью c_{k+1} в образующих a_i и получается при обратных нильсеновских преобразованиях. Ясно, что $\lambda(G, A)$ равен показателю роста группы $\langle a_1, \dots, a_{k+1} \mid R_A^p = 1 \rangle$ относительно стандартной системы порождающих.

Так как в G есть нетривиальное соотношение, то по теореме 1.1 из статьи [2] существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\lambda(G, C) = (2k+1) - \varepsilon.$$

Очевидно, существует такое целое число d_0 , что при $d > d_0$

$$(2k+1)^{1-(1+\lceil \log_3 d \rceil)/\lfloor (p-1)d/3 \rfloor} > (2k+1) - \varepsilon.$$

Тогда по лемме 3, если $G = \langle a_1, \dots, a_{k+1} \mid R_A^p = 1 \rangle$, где $|R_A| > d_0$, то $\lambda(G, A) > (2k+1) - \varepsilon$. Среди множеств порождающих A , которым соответствуют слова R_A длины $|R_A| \leq d_0$, существует множество A_0 с минимальным показателем роста λ_0 . Действительно, $\lambda(G, A)$ полностью определяется словом R_A , а таких слов конечное множество. Ясно, что тогда λ_0 не превосходит $\lambda(G, C) = (2k+1) - \varepsilon$, и следовательно, является минимумом среди всех $(k+1)$ -элементных множеств порождающих.

Покажем, что λ_0 есть минимальный показатель роста группы G . Рассмотрим произвольное множество порождающих A . По лемме 2 из множества A можно выбрать

подмножество $B = \{b_1, \dots, b_{k+1}\}$, порождающее в G подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}_k * \mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{F}_{k+1}$. Покажем, что в обоих случаях

$$\lambda(gp(B), B) \geq \lambda_0. \quad (3)$$

Для $gp(B) = \mathbb{F}_k * \mathbb{Z}_p$ это было доказано нами выше. В случае, когда $gp(B) = \mathbb{F}_{k+1}$, рассмотрим естественный эпиморфизм ψ группы $gp(B)$ на ее факторгруппу по нормальной подгруппе, порожденной элементом b_{k+1}^p . Ясно, что эта факторгруппа изоморфна $\mathbb{F}_k * \mathbb{Z}_p$, и по доказанному выше $\lambda(\psi(gp(B)), \psi(B)) \geq \lambda_0$. Очевидно, минимальная длина $\psi(g)$ в образующих $\psi(B)$ не больше минимальной длины g в образующих B , поэтому $\lambda(gp(B), B) \geq \lambda_0$. Так как различные элементы подгруппы $gp(B)$ различны и в группе G , то из неравенства (3) сразу следует $\lambda(G, A) \geq \lambda(G, A_0)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] de la Harpe P. Topics in Geometric Group Theory. Chicago: Univ. of Chicago Press, 2000.
- [2] Sambusetti A. Minimal growth of non-Hopfian free products // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1999. V. 329. P. 943–946.
- [3] Arzhantseva G., Lysionok I. Growth tightness for word hyperbolic groups // Math. Z. 2002. V. 241. P. 597–611.
- [4] Wilson J. S. On exponential and uniformly exponential growth for groups // Invent. Math. 2004. V. 155. № 2. P. 287–303.
- [5] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
- [6] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

Математический институт им. В. А. Стеклова, РАН

Поступило

27.12.2004

Исправленный вариант

14.02.2005