Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Теорема о неявной функции на конусе в окрестности аномальной точки, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 619–621

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 11:40:17

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ НА КОНУСЕ В ОКРЕСТНОСТИ АНОРМАЛЬНОЙ ТОЧКИ

А. В. Арутюнов

Пусть X – топологическое пространство, Y и Z – банаховы пространства, а $K \subseteq Y$ – выпуклый замкнутый конус. Пусть также заданы: отображение $F: X \times Y \rightarrow Z$ и точки $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, для которых $F(x_0, y_0) = 0$.

Рассмотрим систему, состоящую из уравнения и включения

$$F(x, y) = 0, \quad y \in K, \quad (1)$$

где y является неизвестным, а x – параметром. Наша цель – считая отображение F гладким в окрестности точки (x_0, y_0) , получить для (1) теорему о неявной функции, априори не предполагая выполненным условие регулярности Робинсона

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(K + \text{Lin}\{y_0\}) = Z.$$

(Здесь Lin – линейная оболочка множества.) Приводимые ниже теоремы обобщают некоторые результаты работы [1], в которой приведена библиография по теоремам о неявной и обратной функции без априорных предположений нормальности.

Относительно отображения F будем предполагать, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) оно дважды непрерывно дифференцируемо по y и при каждом фиксированном x его вторая частная производная $(\partial^2 F / \partial y^2)(x, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y с одной и той же константой Липшица, не зависящей от x . Отображения

$$F(\cdot, y_0), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\cdot, y_0), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\cdot, y_0)$$

предполагаются непрерывными в точке x_0 .

Положим

$$\mathcal{K} = K + \text{Lin}\{y_0\}, \quad C = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(\mathcal{K})$$

и будем предполагать, что относительная внутренность $\text{ri } C$ конуса C непуста, его линейная оболочка $\text{Lin } C$ замкнута и это подпространство топологически дополняемо. Через π обозначим линейный непрерывный оператор, проектирующий Z на какое-нибудь подпространство, дополняющее $\text{Lin } C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [1]). Пусть

$$h \in \mathcal{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)h = 0, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)[h, h] \in \text{ri } C. \quad (2)$$

Отображение F называется 2-регулярным в точке (x_0, y_0) относительно K по направлению h , если

$$\text{Lin}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(\mathcal{K})\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)\left[h, \mathcal{K} \cap \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right] = Z.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует $h \in Y$, для которого выполняется (2), и отображение F 2-регулярно в точке (x_0, y_0) относительно K по направлению h . Тогда для произвольного $l \in \text{ri } C$ существуют окрестность O точки x_0 , число $\delta > 0$ и непрерывное отображение $y(\cdot) : O \rightarrow K$ такие, что

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in O, \quad (3)$$

$$\|y(x) - y_0\| \leq \text{const} \left(\left\| \pi \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \right\| + \phi(x) + \|F(x, y_0)\| + \rho(F(x, y_0), C_\delta)^{1/2} \right) \quad \forall x \in O, \quad (4)$$

где

$$\phi(x) = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0)y \right\| : y \in \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \|y\| \leq 1 \right\}. \quad (5)$$

Здесь ρ – расстояние от точки до множества, $C_\delta = \text{cone}(B_\delta(l)) \cap \text{Lin } C$, $B_\delta(l)$ – δ -окрестность точки l , cone – коническая оболочка множества, для линейного оператора A $\|A\|$ – его норма, а использованная в (4) запись означает существование константы $\text{const} > 0$, для которой выполнено соответствующее неравенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы основано на тех же соображениях, что и доказательство теоремы о накрывании в [1]. Приведем схему доказательства. Используя теорему 1 из [1] и теорему Майкла о существовании непрерывного селектора для полунепрерывного снизу выпуклозначного отображения, можно найти такие $\delta > 0$, окрестность O точки x_0 и непрерывное отображение $\chi(\cdot) : O \rightarrow Y$, что

$$\begin{aligned} z_1(x) &:= (I - \pi) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \chi(x) \in C_\delta, \\ \|F(x, y_0) + z_1(x)\| &\leq 2\rho(-F(x, y_0), C_\delta), \\ \|\chi(x)\| &\leq \text{const} \|F(x, y_0)\|, \quad \frac{y_0}{2} + \chi(x) \in K, \quad \forall x \in O. \end{aligned}$$

(Здесь $I : Z \rightarrow Z$ – тождественный оператор). Выберем

$$\xi_0 \in \mathcal{K} : \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \xi_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)[h, h].$$

Решение (1) будем искать в виде

$$y(\varepsilon, x) = \chi(x) + \varepsilon h + \varepsilon \xi_2 + \varepsilon^2 (\xi_1 + \xi_0).$$

В этом представлении $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{K}$, $\xi_2 \in \text{Ker}(\partial F / \partial y)(x_0, y_0)$, $\|\xi_1\| \leq 1$, $\|\xi_2\| \leq 1$ и $\varepsilon \geq 0$ являются неизвестными, которые зависят от x и при каждом фиксированном x подлежат определению. Подставляя это представление в уравнение (1) и выбирая соответствующим образом $\varepsilon = \varepsilon(x)$, преобразуем его к виду

$$A(\xi_1, \xi_2) = f(\xi_1, \xi_2; x). \quad (6)$$

Здесь $A : Y \times \mathcal{K} \rightarrow Z$ – линейный непрерывный оператор, который удовлетворяет условию Робинсона, а f – непрерывная функция, для которой константа Липшица функции $f(\cdot, \cdot; x)$ на окрестности нуля радиуса r стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_0$ и, кроме того, $f(0, 0; x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_0$. Несложно доказывается, что при всех x из некоторой окрестности точки x_0 уравнение (6) имеет решение, непрерывно зависящее от x .

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидна оценка $\rho(F(x, y_0), C_\delta) \leq \|F(x, y_0)\|$.

При дополнительном предположении, что

$$\text{конус } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(\mathcal{K}) \text{ является подпространством} \quad (7)$$

оценку (4) в теореме 1 можно усилить, опустив в ней слагаемое $\phi(x)$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1, а также имеет место условие (7). Тогда существует такая окрестность O точки x_0 и непрерывное отображение $y: O \rightarrow K$, что выполняется (3) и оценка

$$\|y(x) - y_0\| \leq \text{const} \left(\left\| \pi \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \right\| + \|F(x, y_0)\| + \|\pi(F(x, y_0))\|^{1/2} \right) \quad \forall x \in O. \quad (8)$$

Условие (7) автоматически выполняется, если, например, $K = Y$.

Из теоремы 1 вытекает также следующая обобщенная теорема о неявной функции. Положим $z_0 = F(x_0, y_0)$. Для фиксированных $x \in X$ и $z \in Z$, лежащих в окрестности точки (x_0, z_0) , рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = z$$

относительно неизвестного $y \in K$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть существует $h \in K$, для которого выполняется (2) и отображение F 2-регулярно в точке (x_0, y_0) относительно K по направлению h . Тогда для произвольного $l \in \text{ri } C$ существуют окрестность O точки x_0 , $\delta > 0$ и непрерывное отображение $y(\cdot, \cdot): O \times B_\delta(z_0) \rightarrow K$ такие, что

$$\begin{aligned} F(x, y(x, z)) &= z \quad \forall x, z, \\ \|y(x, z) - y_0\| &\leq \text{const} \left(\left\| \pi \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \right\| + \phi(x) + \|F(x, y_0) - z\| \right. \\ &\quad \left. + \rho(F(x, y_0) - z, C_\delta)^{1/2} \right) \quad \forall x \in O, \quad z \in B_\delta(z_0), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\phi(x)$ определяется по формуле (5).

Справедливость теоремы 3 непосредственно вытекает из теоремы 1, примененной к уравнению $F(x, y) - z = 0$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) . При этом пространством параметров является декартово произведение $X \times Z$.

Если кроме предположений теоремы 3 выполнено также условие (7), то, очевидно, оценку (9) можно улучшить, опустив в ней слагаемое $\phi(x)$.

Следующий пример показывает, что без предположения (7) оценка (8) в теореме 2 может не выполняться, даже если ее ослабить, добавив в правую часть (8) слагаемое $\|(\partial F / \partial y)(x, y_0)h\|$.

ПРИМЕР. Пусть $Y = R^5$, $Z = R^2$, $X = R_+^1$, $K = \{y : y_1 \geq 0, y_3 \geq 0, y_5 \geq 0\}$,

$$F_1(x, y) = -y_1 + y_2^2 - y_3x = 0, \quad F_2(x, y) = -y_5 + y_3y_4 - x^{10} = 0.$$

Непосредственно проверяется, что предположения теоремы 1 выполнены в нуле при $h = (0, 1, 0, 1, 0)$; $\pi = 0$ так как C — неположительный ортант в R^2 . Возьмем произвольный вектор $l \in \text{int } C$ и $\delta > 0$. Имеем

$$\pi \frac{\partial F}{\partial y}(x, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, 0)h \equiv 0, \quad |F(x, 0)| \equiv x,$$

откуда в силу замечания к теореме 1 $\rho(F(x, 0), C_\delta)^{1/2} \leq x^5$. С другой стороны непосредственно доказывается, что не существует таких решений (1) $y(x)$, что $|y(x)| \leq \text{const } x^5$.

Имеются также примеры, которые показывают, что каждое из слагаемых, стоящее в правой части оценки (4), может оказаться наибольшим (главным по порядку) при $x \rightarrow x_0$.

Автор выражает благодарность Е. Р. Авакову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А. В. // Матем. заметки. 2005. Т. 77. № 4. С. 483–497.