Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Демидов, Ж. Мвамбакана, И. А. Федотов, Альтернирующий метод Шварца для эллиптических краевых задач, удовлетворяющих принципу максимума, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 622–624

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:38:47

АЛЬТЕРНИРУЮЩИЙ МЕТОД ШВАРЦА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМА

А. С. Демидов, Ж. Мвамбакана, И. А. Федотов

Рассматривается построение решения эллиптической краевой задачи

$$Au|_{x \in \omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + c(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

$$Bu|_{s \in \partial_r \omega} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{s \in \partial_r \omega} + \beta(s)u(s) = g(s) \quad (2)$$

для “сложных” областей $\omega \in \mathbb{R}^n$, т.е. таких, которые представимы в виде объединения конечного числа “простых” областей ω_k . При этом “простые” области – это те, для которых задачи вида (1), (2) (с заменой ω на ω_k) могут быть “легко” построены. Мы ограничимся рассмотрением таких “простых” областей, которые могут быть представлены как пересечение конечного числа n -мерных областей с гладкой $(n-1)$ -мерной границей. При этом предполагается, что в точках пересечения гладких $(n-1)$ -мерных частей границы (как $\partial\omega$, так и $\partial\omega_k$) нормали к этим частям границы не коллинеарны. В качестве “простых” областей могут быть, например, рассмотрены

- 1) ограниченная n -мерная область с гладкой $(n-1)$ -мерной границей, и
- 2) параллелепипед (возможно, “криволинейный”).

Пример “сложной” области представлен на рис. 1.

Рис. 1. Область $\omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\gamma = \partial\omega$, составленная из “параллелепипедов” ω_1 и ω_2 ; при этом $\partial\omega_k = \gamma_k \cup \delta_k$, где $\delta_k = \partial\omega_k \cap \omega_{3-k}$, $k = 1, 2$

Объединение гладких $(n-1)$ -мерных частей границы области ω будем обозначать $\partial_r \omega$. Сингулярную часть границы, т.е. $\partial\omega \setminus \partial_r \omega$, обозначим $\partial_s \omega$.

Под решением задачи (1), (2) понимается функция $u: \omega \ni x \mapsto u(x)$, которая

- 1) непрерывна и ограничена на $\bar{\omega} \setminus \partial_s \omega$;
- 2) имеет ограниченные предельные значения в граничных точках $\partial_r \omega_k$;
- 3) удовлетворяет всем условиям задачи (1), (2), включая существование соответствующих производных.

Предполагается, что функции a_{ij} , b_k , c и f , фигурирующие в (1), непрерывны в $\bar{\omega}$ и при $x \in \bar{\omega}$ выполнены условия

$$c(x) \leq 0, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2, \quad \text{где } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad a_0 > 0. \quad (3)$$

Что касается функций α , β и g , фигурирующих в (2), то предполагается, что они непрерывны вплоть до границы каждой компоненты связности регулярной части $\partial_r \omega$ границы области ω , причем

$$\alpha(s)\beta(s) \geq 0, \quad \inf_s [\alpha(s) + \beta(s)] > 0, \quad \beta(s) \neq 0 \quad \text{при } s \in \partial_r \omega. \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00735.

В 1869 г. Шварц предложил идею построения решения задачи Дирихле для 2-мерного уравнения Лапласа в “сложной” области $\omega = \bigcup_{k=1}^m \omega_k$ с помощью итерационного процесса (см., например, [1], [2] или [3]), в котором последовательно фигурируют решения задач Дирихле в “простых” областях ω_k . Алгоритмы такого рода принято называть *альтернирующим методом Шварца*. Отметим, что близкая идея была использована в [4] и [5] для построения решения эллиптических краевых задач с нелинейными условиями сопряжения.

В данной работе мы применяем идею Шварца к задаче (1), (2), имея в виду построение такого алгоритма численного решения, который был бы эффективен при анализе влияния на искомое решение функциональных параметров α и β , входящих в граничное условие (2). Такой анализ предполагает численное решение большой серии однотипных краевых задач. В этой ситуации есть резон попытаться построить функцию Грина. Это сравнительно легко сделать для некоторых “простых” областей (по крайней мере, в случае оператора Лапласа). Альтернирующий метод Шварца позволяет “обойти” это обстоятельство и получить более эффективное средство исследования по сравнению с изучением серии задач непосредственно в исходной “сложной” области.

Чтобы не перегружать изложение, рассмотрим здесь лишь один конкретный случай, представляющий наиболее сложную ситуацию: ту, когда пересекаются границы “простых” областей¹. Именно такая ситуация возникает в задаче, инициировавшей данную работу². Поэтому мы ограничимся здесь случаем L -образной области ω , схематически представленной на рисунке.

ТЕОРЕМА. *Решение и задачи (1), (2) существует, однозначно определено на $\bar{\omega} \setminus \partial_s \omega$. При этом,*

$$\|u - u_{kj}\|_{\omega_k} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \omega_k} |u(x) - u_{kj}(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } 1 \leq j \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где u_{1j} и u_{2j} – решения следующих задач в “простых” областях ω_1 и ω_2 :

$$Au_{kj} = f \quad \text{в } \omega_k, \quad Bu_{kj} = g \quad \text{на } \gamma_k, \quad u_{kj} = g_{kj} \quad \text{на } \delta_k. \quad (6)$$

Здесь непрерывная на $\bar{\delta}_1$ функция g_{11} может быть выбрана произвольно (можно считать, что $g_{11} = 0$), а $g_{1j} = u_{2,j-1}|_{\delta_1}$, $g_{2j} = u_{1j}|_{\delta_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $M \geq 1$ и положим $v_{kj} = u_{k,j+M} - u_{kj}$. Имеем

$$Av_{kj} = 0 \quad \text{в } \omega_k, \quad Bv_{kj} = 0 \quad \text{на } \gamma_k, \quad v_{kj} = \varphi_{kj} \quad \text{на } \delta_k, \quad (7)$$

где $\varphi_{1j} = v_{2,j-1}|_{\delta_1}$, $\varphi_{2j} = v_{1j}|_{\delta_2}$. В силу условий (3) для функции v_k (мы опускаем здесь у v_{kj} второй индекс) справедлива ГНО-лемма о нормальной производной (доказанная Жиро [9] в плоском случае, а затем в 1952 году независимо Хопфом [10] и Олейник [11] для любой размерности). Согласно этой лемме, максимум модуля функции v_k достигается на границе области ω_k , причем в точке $s \in \partial\omega_k$, где достигается этот максимум, нормальная производная³ $\partial v_k / \partial \nu$ отлична от нуля (если, конечно, $v_k \neq 0$). Проверим, что максимум модуля функции v_k достигается на $\delta_k = \partial\omega_k \cap \omega_{3-k}$ (см. рис. 1). В силу ГНО-леммы, этот максимум не может достигаться на той части $\gamma_k = \partial\omega_k \setminus \delta_k$, где коэффициент β , фигурирующий в формуле (2), равен нулю. Да и на той части γ_k , где $\beta \neq 0$, максимум модуля функции v_k тоже не может достигаться, ибо иначе

¹Случай, когда “простые” области ω_k пересекаются без пересечения своих границ рассматривался в [6] при построении решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа. При этом брались две “простые” области: 1) внешность шара радиуса r (там явно выписывается решение, зависящее только от радиуса) и 2) пересечение исходной области с шаром радиуса $R > r$ (там решение строится численно). Такого сорта построение было реализовано в [7] и в некоторых случаях для уравнения Гельмгольца при условиях Зоммерфельда на бесконечности.

²Речь идет о задаче [8], связанной с вопросом спектрального анализа исследуемого вещества, помещенного в графитовую печь. Требование чистоты эксперимента необходимо влечет “сложную” форму этой печи.

³Это верно и для нормальной производной к каждой из гладких частей границы в точках их пересечения.

внутри ω_k нашлась бы точка⁴ $\tilde{s}$, в которой величина $|v_k(\tilde{s})|$ была бы больше, чем предполагаемый $\max |v_k| = |v_k(\hat{s})|$ (на той части γ_k , где $\beta \neq 0$). Итак,

$$\max_{\bar{\omega}_k} |v_k| \leq \max_{\delta_k} |v_k|. \quad (8)$$

Ниже мы покажем, что

$$\max_{\delta_k} |v_k| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Тем самым, будет доказана теорема, поскольку (5) следует из (8) и (9), а единственность на $\bar{\omega} \setminus \partial_s \omega$ вытекает из ГНО-леммы.

Свойство (9) есть следствие того, что существует константа $q < 1$ такая, что

$$\max_{\delta_k} |v_{k,j+1}| \leq q \max_{\delta_k} |v_{kj}|. \quad (10)$$

Для доказательства неравенства (10) рассмотрим оператор

$$G_{kl}: C(\delta_k) \ni \varphi \mapsto v_\varphi|_{\delta_l} \in C(\delta_l), \quad k \neq l. \quad (11)$$

Здесь через v_φ обозначено решение задачи (7) в области ω_k (с заменой φ_{kj} на φ и v_{kj} на v_φ), а $C(\delta)$ – это пространство непрерывных функций на δ , продолжающихся по непрерывности на $\bar{\delta}$. Это пространство снабжено нормой

$$\|\varphi\|_\delta = \max_{s \in \delta} |\varphi(s)|.$$

В силу теоремы Арцела оператор G_{kl} компактен, поскольку функция $v_\varphi|_{\delta_l}$ дифференцируема вплоть до границы δ_l . Действительно, v_φ дважды непрерывно дифференцируема в ω_k (и потому и на δ_l), а в точках $\bar{\delta}_l \setminus \delta_l$ функция v_φ дифференцируема, поскольку $Bv_\varphi = 0$. Заметим теперь, что

$$v_{k,j+1}|_{\delta_k} = G_k v_{kj}|_{\delta_k}, \quad \text{где } G_k = G_{lk} \circ G_{kl}. \quad (12)$$

Для завершения доказательства неравенства (10), а потому и теоремы, нам достаточно проверить, что $\|G_k\| < 1$, где

$$\|G_k\| = \sup_{\|\varphi\|_\delta \leq 1} \|G_k \varphi\|_\delta, \quad \text{а } \delta = \delta_k.$$

Пусть $\|\varphi_j\|_\delta \leq 1$ и $\|G_{lk} \psi_j\|_\delta \rightarrow \sup$, где $\psi_j = G_{kl} \varphi_j$. В силу компактности оператора G_{kl} можно считать, что $\psi_j \rightarrow \psi$ в $C(\delta_l)$. Непрерывность оператора G_{lk} влечет соотношение $\|G_k\| = \max_{\delta_k} |G_{lk} \psi|$. Остается заметить, что (в силу ГНО-леммы) $\max_{\delta_l} |\psi| \leq 1$ и, кроме того,

$$\max_{\delta_k} |G_{lk} \hat{\psi}| \leq q \max_{\delta_l} |\hat{\psi}|, \quad \text{где } q < 1.$$

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа (3-е изд.). М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
4. Демидов А. С. // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 127.
5. Demidov A. S., Yatchenko E. S. // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37. № 14. P. 2155–2163.
6. Демидов А. С., Никифоров Е. А., Шубин М. А. Отчет ОКБ МЭИ и мех.-мат. фак-та МГУ. М., 1995.
7. Воскобойникова О. И. // Препринт ИПМ № 38. М.: ИПМ РАН им. М. В. Келдыша, 1997.
8. Katskov A. D., Marais P. J. J., Ngobeni P. // Spectrochimica Acta. 1998. V. 53B. P. 671–682.
9. Giraud G. // Bull. Sci. Math. 1932. V. 56. P. 248–272.
10. Hopf E. // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 701–793.
11. Олейник О. А. // Матем. сб. 1952. Т. 30. № 3. С. 696–697.

(А. С. Демидов) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
(А. С. Демидов, Ж. Мвамбакана, И. А. Федотов)
Tschwane University of Technology, г. Претория, ЮАР
E-mail: asd@math.msu.su, mwambakanajn@tut.as.za, fedotovi@tut.as.za

Поступило
07.02.2005

⁴В качестве $\tilde{s} \in \omega_k$ можно было бы взять любую точку, лежащую вблизи точки $\hat{s} \in \gamma_k$ в направлении внутренней нормали от $\hat{s} \in \gamma_k$. Это следует из условия (4), так как знак нормальной производной $\partial v_k / \partial \nu$ противоположен знаку v_k в точках, где $\beta \neq 0$ (и $v_k \neq 0$).