Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Филиппов, Об одной задаче Э. Майкла, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 638–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:05:48

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Э. МАЙКЛА

В. В. Филиппов

В [1] Майкл доказал следующую фундаментальную теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F: X \rightarrow L$ – полунепрерывное снизу многозначное отображение паракомпакта X в банахово пространство L , значения которого являются непустыми выпуклыми замкнутыми множествами. Тогда отображение F обладает непрерывной селекцией.

В [2] Майкл сформулировал следующий

ВОПРОС. Пусть Y – выпуклое G_δ -подмножество банахова пространства L . Будет ли всякое полунепрерывное снизу многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ паракомпакта X с выпуклыми замкнутыми в Y значениями обладать непрерывной селекцией?

В [3] и [4] были получены положительные ответы на этот вопрос при дополнительных ограничениях. См. также подробное обсуждение этого вопроса в [5].

Ниже, построив соответствующий пример, мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос Майкла. Основным исходным фактом будет наличие собственного выпуклого G_δ -подмножества Y пространства $P([0, 1])$ вероятностных мер на отрезке $[0, 1]$, содержащего в себе все меры с однотоочечными носителями (“меры Дирака”), см. [6], а также [5]. (Множество Y может быть построено следующим образом. Пусть λ обозначает обычную лебегову меру на отрезке $[0, 1]$. Обозначим через A_k , $k = 1, 2, \dots$, множество всех точек $m \in P([0, 1])$, удовлетворяющих условию: существует точка $n \in P([0, 1])$ такая, что $\rho(n, \lambda) \geq 2^{-k}$ и отрезок $[m, n]$ содержит λ . Здесь ρ обозначает произвольную метрику на $P([0, 1])$. Легко показать, что множества A_k замкнуты, множество $Y = P([0, 1]) \setminus \bigcup \{A_k : k = 1, 2, \dots\}$ выпукло, содержит все меры Дирака и не содержит меру λ .)

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пространство $P([0, 1])$ мы рассматриваем с топологией, предбазу которой составляют множества вида $\{m : m \in P([0, 1]), m(f) \in U\}$, где f – произвольная действительная непрерывная на $[0, 1]$ функция, U – произвольное открытое подмножество действительной прямой. В силу этого определения для любой действительной непрерывной на $[0, 1]$ функции f функции $\psi_f(m) = m(f)$ непрерывна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существует вложение Ψ пространства $P([0, 1])$ в гильбертов куб, сохраняющее выпуклую структуру. Чтобы убедиться в этом, возьмем любое счетное плотное подмножество $W = \{w_j : j = 1, 2, \dots\}$ пространства непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, не содержащее постоянных функций. По замечанию 1 каждая из функций $\psi_j(m) = m(w_j)$, $j = 1, 2, \dots$, непрерывна. В силу компактности пространства $P([0, 1])$ образ функции ψ_j лежит в некотором отрезке I_j . Поэтому диагональное произведение

$$\Psi_1: P([0, 1]) \rightarrow \prod \{I_j : j = 1, 2, \dots\}$$

этих функций также непрерывно ($\Psi_1(m) = \{\psi_j(m) : j = 1, 2, \dots\}$). В силу плотности множества W в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ и определения топологии пространства $P([0, 1])$ семейство функций $\{\psi_j(m) : j = 1, 2, \dots\}$ разделяет точки пространства $P([0, 1])$ (т.е. для любых двух мер m_1 и m_2 из $P([0, 1])$ найдется функция $w_j \in W$, для которой $\psi_j(m_1) \neq \psi_j(m_2)$). Это означает, что диагональное произведение (см. [7]) Ψ_1 этих функций инъективно. Множество $P([0, 1])$ компактно, поэтому из инъективности и непрерывности отображения Ψ следует, что оно является вложением. Каждая из функций $\psi_j(m)$, $j = 1, 2, \dots$, сохраняет выпуклую структуру, т.е. $\psi_j(\lambda m_1 + \mu m_2) = \lambda \psi_j(m_1) + \mu \psi_j(m_2)$, поэтому этим же свойством обладает и отображение Ψ_1 . Для каждого $j = 1, 2, \dots$ зафиксируем аффинный гомеоморфизм α_j отрезка I_j на отрезок $[-2^{-j}, 2^{-j}]$. Диагональное произведение

$$A: \prod \{I_j : j = 1, 2, \dots\} \rightarrow \prod \{[-2^{-j}, 2^{-j}] : j = 1, 2, \dots\}$$

гомеоморфизмов $\alpha_j, j = 1, 2, \dots$, является гомеоморфизмом, сохраняющим выпуклую структуру. Произведение $\prod\{[-2^{-j}, 2^{-j}] : j = 1, 2, \dots\}$ есть стандартный гильбертов куб. Поэтому композиция $\Psi = A\Psi_1$ удовлетворяет всем поставленным условиям. См. также [8] и [9].

ЛЕММА 1. *Отображение $\Pi: P([0, 1]) \rightarrow \exp[0, 1]$, сопоставляющее мере ее носитель, полунепрерывно снизу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольно меру $m \in P([0, 1])$ и точку $x \in \Pi(m)$ ее носителя. Пусть Ox – произвольная окрестность точки x . Возьмем любую непрерывную функцию $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, принимающую значение 1 в точке x и тождественно равную нулю на множестве $[0, 1] \setminus Ox$. Так как точка x принадлежит носителю меры m , то $m(f) > 0$. Поэтому множество

$$V_m = \{n : n \in P([0, 1]), n(f) > 0\}$$

является окрестностью точки m в пространстве $P([0, 1])$. Если $n \in V_m$, то $n(f) > 0$ и поэтому носитель меры n пересекается с множеством Ox . В силу теоремы 6.1.4 из [10] это дает требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Отображение $\Pi_1: P([0, 1]) \rightarrow P([0, 1])$, сопоставляющее мере $m \in P([0, 1])$ множество вероятностных мер, носители которых лежат в $\Pi(m)$, полунепрерывно снизу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\Pi_0: P([0, 1]) \rightarrow P([0, 1])$, сопоставляющее мере $m \in P([0, 1])$ множество вероятностных мер, носители которых одноточечны и лежат в $\Pi(m)$, полунепрерывно снизу. Этот факт следует непосредственно из леммы 1 в силу того, что множество вероятностных мер, носители которых одноточечны, гомеоморфно отрезку (мере сопоставляется ее носитель). Множество $\Pi_1(m)$ является замкнутой выпуклой оболочкой множества $\Pi_0(m)$, поэтому доказываемое утверждение вытекает из теоремы 6.2.5 в [10]. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Отображение $\Pi_2: P([0, 1]) \rightarrow Y$, сопоставляющее мере $m \in P([0, 1])$ множество $\Pi_1(m) \cap Y$, полунепрерывно снизу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\Pi_3(m)$ всех мер с конечными носителями, лежащими в $\Pi(m)$, $m \in P([0, 1])$, плотно в множестве $\Pi_2(m)$. В силу выпуклости множества Y множество $\Pi_3(m)$ лежит в Y . Отсюда следует, что $[\Pi_2(m)] = \Pi_1(m)$. Из леммы 2 и из предложения 2.3 в [1] вытекает полунепрерывность снизу отображения Π_2 как отображения в компакт $P([0, 1])$. Но значения отображения Π_2 лежат в Y . Поэтому в силу определения топологии подпространства отображение Π_2 полунепрерывно снизу как отображение из $P([0, 1])$ в Y . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Значения отображения Π_2 выпуклы.* Это вытекает из первоначального определения отображения Π_2 : пересечение выпуклых множеств выпукло.

Пусть $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ – конечное подмножество отрезка $[0, 1]$, Δ – n -мерный симплекс, вершины которого отождествлены с точками $a_0, \dots, a_n$. Это отождествление естественно по выпуклости продолжается до гомеоморфизма пространства $P(A)$ на симплекс Δ . При этом отождествлении отображения Π_1 и Π_2 сопоставляют точке x симплекса Δ несущую ее (замкнутую) грань.

ЛЕММА 4. *В описанных обозначениях любая селекция g отображения $\Pi_A = \Pi_1|_\Delta = \Pi_2|_\Delta: \Delta \rightarrow \Delta$ является сюръективным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки x границы F симплекса Δ точка $g(x)$ принадлежит грани, являющейся носителем точки x . Поэтому прямолинейный отрезок, соединяющий точки x и $g(x)$, лежит в F . Иными словами, отображение $g|_F$ и тождественное отображение $F \rightarrow F$ являются смежными, см. [11]. Поэтому отображение $g|_F$ гомотопно тождественному отображению $F \rightarrow F$. Следовательно, степень отображения $g|_F$ равна 1. Поэтому отображение $g: \Delta \rightarrow \Delta$ сюръективно. Лемма доказана.

Нам остается сделать заключительный шаг.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение $\Pi_2: P([0, 1]) \rightarrow Y$ не имеет непрерывной селекции.*

Доказательство проведем “от противного”. Допустим, что такая селекция g существует. В силу леммы 4 отображение $g|_B$ множества B всех мер с конечными носителями в себя является сюръективным. Множество B плотно в $P([0, 1])$, поэтому множество $g(P([0, 1]))$ плотно в $P([0, 1])$. В силу непрерывности отображения g множество $g(P([0, 1]))$ компактно и потому замкнуто в $P([0, 1])$. Сопоставляя эти два факта, получаем $g(P([0, 1])) = P([0, 1])$. Но одновременно множество $g(P([0, 1]))$ лежит в множестве Y , являющемся собственным подмножеством компакта $P([0, 1])$. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение о существовании селекции g неверно, что и дает требуемое. Предложение доказано.

Вернемся к замечанию 2. Множество $Y_1 = \Psi(Y)$ лежит в выпуклом компактном подмножестве гильбертова куба $X_1 = \Psi(P([0, 1]))$, лежащего в гильбертовом (следовательно, банаховом) пространстве. При этом множество Y_1 является выпуклым G_δ -подмножеством. По очевидным соображениям многозначное отображение $G_1: X_1 \rightarrow Y_1$, $G_1(x) = \Psi(\Pi_2(\Psi^{-1}(x)))$ полунепрерывно снизу, а из предложения 1 вытекает, что оно не обладает непрерывной селекцией. Это и есть требуемый пример.

Автор выражает признательность Э. Майклу, А. В. Архангельскому и П. В. Семенову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Michael E. A. // Ann. of Math. 1956. V. 63. P. 361–382.
2. Michael E. A. // Open Problems in Topology / ed. J. van Mill, G. M. Reed. Amsterdam: North Holland, 1990. P. 271–278.
3. Gutev V. G. // Comm. Math. Univ. Carol. 1994. V. 35. № 3. P. 533–538.
4. Gutev V. G., Valov V. // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. P. 233–242.
5. Repovš D., Semenov P. V. // Recent Progress in General Topology / ed. M. Hušek, J. van Mill: Elsevier, 2002. P. 424–461.
6. von Weizsäcker H. // Math. Scand. 1976. V. 38. P. 321–324.
7. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
8. Klee V. L., Jr. // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 78. P. 30–45.
9. Bessaga C., Dobrovolski T. // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. № 1. P. 259–268.
10. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
11. Хилтон П. Дж., Уайли С. Теория гомологий. М.: Мир, 1966.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vvf11@mech.math.msu.su

Поступило
23.04.2004
Исправленный вариант
27.10.2004