Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Карабаш, С. Хасси, О подобии J -самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля с операторным потенциалом самосопряженному, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 625–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:11:09

О ПОДОБИИ J -САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ОПЕРАТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ САМОСОПРЯЖЕННОМУ

И. М. Карабаш, С. Хасси

Напомним, что два замкнутых оператора T_1, T_2 в банаховом пространстве X называются *подобными*, если существует ограниченный и ограниченно обратимый в X оператор S такой, что $S \operatorname{dom}(T_1) = \operatorname{dom}(T_2)$ и $T_2 = ST_1 S^{-1}$.

Пусть Q – полуограниченный снизу самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $Q = Q^* \geq \eta_0$. Рассмотрим самосопряженный оператор Штурма–Лиувилля

$$(Ly)(t) = -y''(t) + Qy(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

действующий в пространстве вектор-функций $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ (см. [1]). Пусть J – оператор умножения на $\operatorname{sgn} t$ в $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $J: y(t) \rightarrow (\operatorname{sgn} t)y(t)$.

Так как оператор

$$A = JL = (\operatorname{sgn} t) \left(-\frac{d^2}{dt^2} Q \right), \quad \operatorname{dom}(A) = \operatorname{dom}(L), \quad (1)$$

является произведением двух самосопряженных некоммутирующих операторов, то он не самосопряженный: $A^* = LJ \neq A$. Оператор A^* определяется тем же дифференциальным выражением (1), что и A , но имеет другую область определения:

$$\operatorname{dom}(A^*) = \{y \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) : Jy \in \operatorname{dom}(L)\} \neq \operatorname{dom}(A).$$

Оператор A является J -самосопряженным, т.е. $(JA)^* = JA$ (см. [15]). В статье изучается подобие оператора A самосопряженному.

Задача на собственные значения $(\mathcal{L}y)(x) = \lambda r(x)y(x)$, где $\mathcal{L}$ – самосопряженный дифференциальный оператор, а $r(x)$ – индефинитный вес, возникает в некоторых физических моделях (см. библиографию в [2]). Вопрос, образует ли система собственных функций базис Рисса в пространстве $L^2(|r|)$, изучался во многих работах (см. [2], [3] и библиографию в [3]).

Если спектр $\mathcal{L}$ не дискретен, то вместо базисности Рисса собственных функций изучают подобие оператора $(1/r)\mathcal{L}$ самосопряженному или нормальному операторам. Такая задача рассматривалась для $\mathcal{L} > \delta > 0$ в [4], [5]. Случай $\min \sigma_c(\mathcal{L}) = 0$ изучался для обыкновенных дифференциальных операторов в [6], [7]. В [8] получены достаточные условия подобия самосопряженному для оператора $(\operatorname{sgn} x_n)\mathcal{L}$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{L}$ – неотрицательный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами. В приведенных выше работах используется дефинизируемость оператора $(1/r)\mathcal{L}$ в пространстве Крейна $L^2(r(x) dx)$ (см. [9]), что, вообще говоря, не выполняется, если $\sigma_c(\mathcal{L}) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$.

В работах [10], [11] использован другой метод, позволяющий снять ограничение $\min \sigma_c(\mathcal{L}) \geq 0$. В [10] показано, что оператор $(\operatorname{sgn} x)p(-i d/dx)$ в $L^2(\mathbb{R})$, где p – действительный полином, подобен самосопряженному, если и только если $p(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. В [11] получены критерии подобия для двух классов операторов Штурма–Лиувилля $(\operatorname{sgn} x)(-d^2/dx^2 + q(x))$ в $L^2(\mathbb{R})$.

Основной результат статьи – следующий критерий подобия для операторов вида (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – оператор вида (1). Тогда спектр $\sigma(A)$ оператора A вещественный. Оператор A подобен самосопряженному, если и только если $Q \geq 0$.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Финской Академии наук, грант № 203226.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $q(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – неотрицательная функция из $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, не зависящая от t . Тогда J -самосопряженный оператор Шрёдингера

$$(\operatorname{sgn} t) \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + q(x_1, x_2, \dots, x_n) \right),$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$, подобен самосопряженному оператору.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть p – полуограниченный снизу полином от n переменных, $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \eta_0$. Тогда действующий в $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ оператор

$$(\operatorname{sgn} t) \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + p \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1}, -i \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right)$$

подобен самосопряженному оператору, если и только если $p \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из результатов работы [8] следует только достаточная часть следствия 2. Метод [8] неприменим, если $\min_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) < 0$.

Теорема 1 может применяться к операторам в частных производных, действующим в полосе, полуплоскости, цилиндре.

ПРИМЕР 1. Пусть оператор $Q = Q^*$ в $\mathcal{H} = L^2(-1, 1)$ задается дифференциальным выражением $-d^2/dx^2$ и самосопряженными граничными условиями $u'(-1) - hu(-1) = 0$, $u(1) = 0$. Тогда оператор $L = -y''(t) + Qy(t)$ в $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ можно отождествить с оператором Лапласа в полосе $\Omega = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1)\}$, порождаемым самосопряженными краевыми условиями

$$\frac{\partial y(t, -1)}{\partial x} - hy(t, -1) = 0, \quad y(t, 1) = 0. \quad (2)$$

По теореме 1 оператор $(\operatorname{sgn} t)(-\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2)$ с условиями (2) подобен самосопряженному, если и только если $h \geq 0$, так как условие $h \geq 0$ эквивалентно $Q \geq 0$.

Приведем набросок доказательства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. J -самосопряженный оператор T с действительным спектром, действующий в гильбертовом пространстве H , подобен самосопряженному, если и только если

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{R}_T(\eta + i\varepsilon)f\|^2 d\eta \leq C\|f\|^2 \quad \forall f \in H, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (3)$$

где $\mathcal{R}_T(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1}$, а C – константа, не зависящая от f и ε .

Предложение 1 является простым следствием резольвентного критерия подобия [12], [13], при этом мы опускаем проверку условия (3) для оператора T^* .

Нам необходимы следующие факты из теории граничных троек [1], [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Пусть $A_{\min}$ – замкнутый симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $\operatorname{dom}(A_{\min})$ и равными дефектными числами ($\leq \infty$). Граничной тройкой (ГТ) оператора $A_{\min}^*$ называют совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а $f \mapsto \Gamma f = \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ – сюръективное отображение $\operatorname{dom}(A_{\min}^*)$ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ такие, что

$$(A_{\min}^* f, g) - (f, A_{\min}^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \operatorname{dom}(A_{\min}^*).$$

Оператор $A_0 := A_{\min}^* \upharpoonright \ker \Gamma_0$ является самосопряженным расширением $A_{\min}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [14]. *Функцией Вейля*, соответствующей ГТ $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, называют оператор-функцию в $\mathcal{H}$, определенную равенством

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \quad f_\lambda \in \ker(A_{\min}^* - \lambda I), \quad \lambda \in \rho(A_0)(= \mathbb{C} \setminus \sigma(A_0)).$$

Если B – замкнутый оператор в $\mathcal{H}$, то $A_B := A_{\min}^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$ – замкнутое расширение $A_{\min}$, $A_B^* = A_B^*$ и верна эквивалентность

$$\lambda \in \rho(A_B) \cap \rho(A_0) \Leftrightarrow 0 \in \rho(M(\lambda) - B). \quad (4)$$

Пусть $L_{\min}^\pm$ – минимальный оператор, порождаемый в $L^2(\mathbb{R}_\pm, \mathcal{H})$ дифференциальным выражением $(-d^2/dt^2 + Q)$, $A_{\min}^\pm := \pm L_{\min}^\pm$. Обозначим $\tilde{Q} := Q - (\eta_0 - 1)I$, тогда $\tilde{Q} = \tilde{Q}^* \geq I$. Совокупность $\Pi_L^\pm = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^\pm, \Gamma_1^\pm\}$, где

$$\Gamma_0^\pm = \tilde{Q}^{-1/4} y(\pm 0), \quad \Gamma_1^\pm = \tilde{Q}^{1/4} (\pm y'(\pm 0) + \tilde{Q}^{1/2} y(\pm 0)),$$

образует ГТ оператора $(L_{\min}^\pm)^*$, а $\Pi_A^\pm = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^\pm, \pm \Gamma_1^\pm\}$ – ГТ оператора $A_{\max}^\pm := (A_{\min}^\pm)^*$. Известно [15], что

$$\ker(A_{\max}^\pm - \lambda I) = \{\exp(\mp t(Q \mp \lambda)^{1/2}) \tilde{Q}^{1/4} h, h \in \mathcal{H}\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (5)$$

Здесь и далее $\operatorname{Re} \lambda^{1/2} > 0$ при $\lambda \notin (-\infty, 0)$.

Пусть $A_{\min} := A_{\min}^+ \oplus A_{\min}^-$, $A_{\min}$ – симметрический оператор в $H = L^2(R, \mathcal{H})$. Тогда совокупность $\Pi_A = \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где

$$\Gamma_0 \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_0^+ y_+ \\ -\Gamma_1^- y_- \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_1^+ y_+ \\ -\Gamma_0^- y_- \end{pmatrix}, \quad y_\pm \in \operatorname{dom}(A_{\max}^\pm) \subset L^2(\mathbb{R}_\pm, \mathcal{H}),$$

образует ГТ оператора $A_{\min}^* = A_{\max}^+ \oplus A_{\max}^-$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Оператор A вида (1) совпадает с оператором $A_B = A_{\min}^* \upharpoonright \operatorname{dom}(A_B)$, где*

$$\operatorname{dom}(A_B) := \left\{ \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} \in \operatorname{dom}(A_{\min}^*) : \Gamma_1 \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} = B \Gamma_0 \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} \right\}, \quad B := \begin{pmatrix} 2\tilde{Q} & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя эквивалентность (4), приходим к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Спектр оператора A действительный, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Пусть $A_0^\pm := A_{\min}^* \upharpoonright \ker \Gamma_0^\pm$, оператор

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} O & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

действует в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\tilde{A} := A_{\min}^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - \tilde{B}\Gamma_0)$. Тогда $A_0^+ \oplus A_0^-$ и $A_{\tilde{B}}$ – самосопряженные расширения $A_{\min}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $f_\pm \in L^2(\mathbb{R}_\pm, \mathcal{H})$, $f_+ + f_- = f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Тогда резольвенты $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_{\tilde{A}}$ имеют вид*

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_A(\lambda)f)(t) &= (\mathcal{R}_{A_0^+ \oplus A_0^-} f)(t) + y_\lambda^-(t) + y_\lambda^+(t), \\ (\mathcal{R}_{\tilde{A}}(\lambda)f)(t) &= (\mathcal{R}_{A_0^+ \oplus A_0^-} f)(t) + \tilde{y}_\lambda^-(t) + \tilde{y}_\lambda^+(t), \\ y_\lambda^\pm(t) &= \exp(\mp t(Q \mp \lambda)^{1/2}) \tilde{Q}^{-1/4} ((Q - \lambda)^{1/2} + (Q + \lambda)^{1/2})^{-1} r(\lambda), \\ \tilde{y}_\lambda^\pm(t) &= \pm \exp(\mp t(Q \mp \lambda)^{1/2}) \tilde{Q}^{-1/4} ((Q - \lambda)^{1/2} - (Q + \lambda)^{1/2})^{-1} r(\lambda), \end{aligned} \quad (6)$$

где $r(\lambda) = \Gamma_1^+ \mathcal{R}_{A_0^+}(\lambda) f_+ + \Gamma_1^- \mathcal{R}_{A_0^-}(\lambda) f_-$.

Предложение 4 выводится из найденной в [14] связи формулы М. Г. Крейна для резольвет с ГТ или непосредственным вычислением с использованием (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. *Достаточность.* Так как $A_0^+ \oplus A_0^-$, $A_{\tilde{B}}$ – самосопряженные операторы, то для них выполняется (3). Поэтому

$$\varepsilon \int_{\eta \in \mathbb{R}} \|\tilde{y}_{\eta+i\varepsilon}^{\pm}\|^2 d\eta \leq \tilde{C}_{\pm} \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), \quad \varepsilon > 0, \quad \tilde{C}_{\pm} = \text{const}. \quad (7)$$

Неравенство (3) для оператора A эквивалентно выполнению двух оценок

$$\varepsilon \int_{\eta \in \mathbb{R}} \|y_{\eta+i\varepsilon}^{\pm}\|^2 d\eta \leq C_{\pm} \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), \quad \varepsilon > 0, \quad C_{\pm} = \text{const}. \quad (8)$$

Пусть $Q \geq 0$, тогда оператор-функция

$$((Q - \lambda)^{1/2} - (Q + \lambda)^{1/2})((Q - \lambda)^{1/2} + (Q + \lambda)^{1/2})^{-1}$$

равномерно ограничена в $\mathbb{C}_+$. Поэтому оценка (8) следует из (7). По предложению 1 оператор A подобен самосопряженному. Достаточность доказана.

Необходимость. Хорошо известно, что если оператор T подобен самосопряженному, то

$$\|\mathcal{R}_T(\lambda)\| \leq \frac{C}{\text{Im } \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (9)$$

Необходимость условия теоремы 1 следует из того, что (9) не выполняется для оператора A , если $\min \sigma(Q) < 0$. Точнее, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\min \sigma(Q) < 0$. Тогда существует $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и константа $C_1 > 0$ такие, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется $\|\mathcal{R}_A(i\varepsilon)f\| \geq C_1 \varepsilon^{-3/2}$.

Авторы искренне благодарны М. М. Маламуду за интерес к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984.
2. Beals R. // J. Differential Equations. 1985. V. 56. №3. P. 391–407.
3. Пятков С. Г. // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. №2. С. 409–426.
4. Ćurgus B., Langer H. // J. Differential Equations. 1989. V. 79. P. 31–61.
5. Ćurgus B., Najman B. // Differential Integral Equations. 1994. V. 7. P. 1241–1252.
6. Ćurgus B., Najman B. // Oper. Theory Adv. Appl. 1996. V. 87. P. 95–104.
7. Фаддеев М. М., Штеренберг Р. Г. // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2000. Т. 270. С. 336–349.
8. Ćurgus B., Najman B. // Oper. Theory Adv. Appl. 1998. V. 106. P. 113–130.
9. Langer H. // Lecture Notes in Math. 1982. №948. P. 1–46.
10. Karabash I. M. // Methods Funct. Anal. Topology. 2000. V. 6. №2. P. 22–49.
11. Карабаш И. М., Маламуд М. М. // Докл. РАН. 2004. Т. 395. №3. С. 303–307.
12. Набоко С. Н. // Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. №1. С. 16–27.
13. Маламуд М. М. // Укр. матем. ж. 1985. Т. 37. №1. С. 49–56.
14. Деркач В. А., Маламуд М. М. // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. №4. С. 435–459.
15. Холькин А. М. // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1985. Т. 44. С. 112–121.

(И. М. Карабаш) Донецкий национальный университет, Украина
(С. Хасси) Университет г. Вааса, Финляндия
E-mail: karabashi@yahoo.com, sha@uwasa.fi

Поступило
09.02.2005