Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Лившиц, О почти наилучшем приближении кусочно-полиномиальными функциями в пространстве $C[0, 1]$, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 4, 629–633

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:32:17

О ПОЧТИ НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C[0, 1]$

Е. Д. Лившиц

Введение. Пусть заданы $X = (X, \|\cdot\|_X)$ – действительное банахово пространство и его подмножество M . *Оператором метрической проекции* называется, вообще говоря, многозначное отображение

$$P_{M,X}: x \in X \mapsto \{z \in M : \|x - z\|_X = \rho_X(x, M)\},$$

где $\rho_X(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|_X$. Однозначное отображение $G: X \rightarrow M$ называется *мультипликативной* (соответственно *аддитивной*) ε -выборкой, $\varepsilon \geq 0$, из X в M , если

$$\forall x \in X \quad \|x - G(x)\| \leq \rho(x, M)(1 + \varepsilon) \quad (\text{соответственно } \|x - G(x)\| \leq \rho(x, M) + \varepsilon).$$

Если G непрерывно, будем говорить, что G – *непрерывная выборка*. И. Г. Царьков доказал, что для замкнутого множества M существование для любого $\varepsilon > 0$ непрерывных мультипликативных ε -выборок в него эквивалентно существованию для всех $\varepsilon > 0$ непрерывных аддитивных ε -выборок (в него). Обозначим через $\mathcal{P}_d[a, b]$ множество алгебраических полиномов степени $\leq d$, определенных на $[a, b]$, а через $R_{m,n}[a, b]$ множество алгебраических рациональных дробей

$$R_{m,n}[a, b] = \left\{ \frac{P}{Q}; P \in \mathcal{P}_m[a, b]; Q \in \mathcal{P}_n[a, b]; Q(t) \neq 0 \text{ при } \forall t \in [a, b] \right\}.$$

В 1859 году Чебышев [1] отметил, что для любой функции $f \in C[0, 1]$ и фиксированных $d, m, n \geq 0$ множества $P_{\mathcal{P}_d[0,1], C[0,1]}(f)$ и $P_{R_{m,n}[0,1], C[0,1]}(f)$ состоят из единственной функции. Кирхбергер [2] доказал, что для любого $d \geq 0$ (однозначное) отображение $P_{\mathcal{P}_d[0,1], C[0,1]}(\cdot)$ непрерывно. С другой стороны, Мэли и Вицгол [3] показали, что при $m, n \geq 1$ метрическая проекция $P_{R_{m,n}[0,1], C[0,1]}(\cdot)$ разрывна. Тем не менее, в 1988 году Конягин [4] установил, что для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная аддитивная ε -выборка в множество $R_{m,n}$. Мультипликативные выборки в множества $R_{m,n}$ в $C[0, 1]$, обладающие большей устойчивостью, изучались Рютиным [5], [6].

Наряду с рациональными дробями в качестве аппроксимирующего аппарата в теории приближений также используются кусочно-полиномиальные функции с нефиксированными узлами

$$S_n^d[a, b] = \{f \in C[a, b] : \exists a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \\ f|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \mathcal{P}_d[x_{k-1}, x_k], 1 \leq k \leq n\}.$$

Девор, Ховард и Мичелли [7] построили непрерывные мультипликативные ε -выборки из соболевских шаров в $S_n^1[0, 1]$. В работе [8] изучались выборки в $S_n^1[0, 1]$ из пространства $C[0, 1]$. Было доказано, что 0-выборка (выборка из метрической проекции) в $S_n[0, 1]$ существует только для $n = 1, 2$, но для любого $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$ существует непрерывная аддитивная (и, следовательно, мультипликативная) ε -выборка в S_n^1 . В этой работе изучаются непрерывные мультипликативные выборки из пространства $C[0, 1]$ в $S_n^d[0, 1]$, $d > 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$, $d \geq 1$ существует непрерывная мультипликативная $(1 + \varepsilon)$ -выборка из $C[0, 1]$ в $S_n^d[0, 1]$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00062.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $\varepsilon > 0$, $n \geq 2$, $d \geq 2$ не существует непрерывной мультипликативной $(1 - \varepsilon)$ -выборки из $C[0, 1]$ в $S_n^d[0, 1]$.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \varepsilon < 1$. Через $\|\cdot\|_{[a,b]}$ будем обозначать норму в $C[a, b]$. Для краткости мы будем писать S_n^d и $\|\cdot\|$ вместо $S_n^d[0, 1]$ и $\|\cdot\|_{[0,1]}$ соответственно. Пусть $s \in S_n^d$. Будем говорить, что $t \in H_1(s)$, если существует такое разбиение $0 = x_0 < x_1 = t < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$, что

$$s|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathcal{P}_d[x_k, x_{k+1}], \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

ЛЕММА 1. Для любого k , $2 \leq k \leq n$, и $\gamma > 0$ существует такое непрерывное отображение $F_{k,\gamma}: C[0, 1] \setminus S_k^d \rightarrow (0, 1)$, что для каждой $f \in C[0, 1] \setminus S_k^d$ найдутся $p \in \mathcal{P}_d[0, F_{k,\gamma}(f)]$ и $s \in S_{k-1}^d[F_{k,\gamma}(f), 1]$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|f - p\|_{[0, F_{k,\gamma}(f)]} \leq \rho(f, S_n^d)(1 + \gamma), \quad \|f - s\|_{[F_{k,\gamma}(f), 1]} \leq \rho(f, S_n^d)(1 + \gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для k , $2 \leq k \leq n$, рассмотрим функцию $T: C[0, 1] \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, заданную соотношением

$$T(f, t) = \sup_{s \in S_k^d, t \in H_1(s)} \left(\rho(f, S_k^d) \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right) - \|f - s\| \right)_+. \quad (1)$$

Докажем, что требуемое отображение можно задать формулой

$$F_{k,\gamma}(f) = \frac{\int_0^1 t T(f, t) dt}{\int_0^1 T(f, t) dt}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что $T(\cdot, \cdot)$ непрерывна на области определения и, если $f \notin S_k^d$, то в силу замкнутости S_k^d выполняется $\rho(f, S_k^d) > 0$ и существует $t \in (0, 1)$, для которого $T(f, t) > 0$. Отсюда следует непрерывность $F_{k,\gamma}(\cdot)$ на области определения. Из определений (1) и (2) следует, что для любой $f \in C[0, 1] \setminus S_k^d$ найдутся t_1, t_2 , $0 < t_1 < F_{k,\gamma}(f) < t_2 < 1$, и $s_1, s_2 \in S_k^d$, для которых $t_i \in H_1(s_i)$ и $\|f - s_i\| \leq \rho(f, S_k^d)(1 + \gamma)$, $i = 1, 2$. Тогда можно положить $p = s_2|_{[0, F_{k,\gamma}(f)]}$ и $s = s_1|_{[F_{k,\gamma}(f), 1]}$.

Построение мультипликативной $(1 + \varepsilon)$ -выборки $G(\cdot)$. Обозначим через $L_{[\alpha, \beta]}^{\gamma, \delta}$ линейное отображение, переводящее отрезок $[\alpha, \beta]$ в $[\gamma, \delta]$:

$$L_{[\alpha, \beta]}^{\gamma, \delta}(t) = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}(t - \alpha) + \gamma.$$

Если $f \in S_n^d$, то положим $G(f) = f$, в противном случае положим $x_0^{av} = x_0^{av}(f) = 0$, $x_n^{av} = x_n^{av}(f) = 1$ и последовательно определим $0 < x_1^{av} < x_2^{av} < \dots < x_{n-1}^{av} < 1$:

$$x_{k+1}^{av} = x_{k+1}^{av}(f) = L_{[0, 1]}^{[x_k^{av}, 1]}(F_{n-k, \varepsilon/(4n)}(f \circ L_{[0, 1]}^{[x_k^{av}, 1]})), \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (3)$$

Рассмотрим полиномы

$$p_k = p_k(f) = P_{\mathcal{P}_d[0, 1], C[0, 1]}(f \circ L_{[0, 1]}^{[x_k^{av}, x_{k+1}^{av}]}), \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

линейные функции

$$l_k(t) = \frac{1}{2}(p_{k-1}(1) - p_k(0) + t(-p_{k-1}(1) + p_k(0) - p_k(1) + p_{k+1}(0)))$$

и полиномы

$$\tilde{p}_k = \tilde{p}_k(f) = p_k + l_k, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

считая $p_{-1}(1) = p_0(0)$ и $p_n(0) = p_{n-1}(1)$. Ясно, что

$$\tilde{p}_k(1) = \tilde{p}_{k+1}(0) = \frac{1}{2}(p_k(1) + p_{k+1}(0)).$$

Это делает корректным определение $G(f) \in S_n^d$ посредством равенств

$$G(f)|_{[x_k^{av}, x_{k+1}^{av}]} \equiv \tilde{p}_k \circ L_{[x_k^{av}, x_{k+1}^{av}]}^{[0,1]}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

В силу леммы 1, определения (3) и неравенства $0 < \varepsilon < 1$ имеем для $0 \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned} \|f \circ L_{[0,1]}^{[x_k^{av}, x_{k+1}^{av}]} - p_k\| &\leq \rho(f, S_n^d) \left(1 + \frac{\varepsilon}{4n}\right)^n \leq \rho(f, S_n^d) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ |l_k(0)| &= \frac{1}{2} |p_{k-1}(1) - p_k(0)| \leq \frac{1}{2} (|p_{k-1}(1) - f(x_k^{av})| + |f(x_k^{av}) - p_k(0)|) \\ &= \frac{1}{2} (|p_{k-1}(1) - f \circ L_{[0,1]}^{[x_{k-1}^{av}, x_k^{av}]}(1)| + |f \circ L_{[0,1]}^{[x_k^{av}, x_{k+1}^{av}]}(0) - p_k(0)|) \leq \rho(f, S_n^d) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Точно так же проверяется, что

$$|l_k(1)| \leq \rho(f, S_n^d) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

и в силу линейности

$$\|l_k\| \leq \rho(f, S_n^d) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Следовательно, по неравенству треугольника,

$$\|f \circ L_{[0,1]}^{[x_k^{av}, x_{k+1}^{av}]} - \tilde{p}_k\| \leq \rho(f, S_n^d)(2 + \varepsilon).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $\|f - G(f)\| \leq \rho(f, S_n^d)(1 + 1 + \varepsilon)$. Поэтому отображение $G(\cdot)$ является мультипликативной $(1 + \varepsilon)$ -выборкой.

Непрерывность выборки $G(\cdot)$. Докажем непрерывность $G(\cdot)$ в произвольной точке f_0 . Если $f_0 \in S_n^d$, то $G(f_0) = f_0$. Пусть $f \in C[0, 1]$ и $\|f - f_0\| < \delta$. В силу того, что $G(\cdot)$ является $(1 + \varepsilon)$ -выборкой, имеем

$$\|f - G(f)\| \leq \rho(f, S_n^d)(2 + \varepsilon) \leq \|f - G(f_0)\|(2 + \varepsilon) = \|f - f_0\|(2 + \varepsilon) < \delta(2 + \varepsilon).$$

Следовательно,

$$\|G(f) - G(f_0)\| \leq \|G(f) - f\| + \|f - f_0\| + \|f_0 - G(f_0)\| \leq \delta(3 + \varepsilon) \leq 4\delta,$$

что доказывает непрерывность $G(\cdot)$ в точке $f_0 \in S_n^d$.

Пусть $f_0 \notin S_n^d$ и $\delta > 0$. В силу непрерывности метрической проекции на $\mathcal{P}_d[0, 1]$ существует такое $\eta > 0$, что для всех k , $0 \leq k \leq n-1$, и $\tilde{f} \in C[0, 1]$, $\|\tilde{f} - f_0 \circ L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f_0), x_{k+1}^{av}(f_0)]}\| < \eta$, справедливо неравенство

$$\|P_{\mathcal{P}_d[0,1], C[0,1]}(f_0 \circ L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f_0), x_{k+1}^{av}(f_0)]}) - P_{\mathcal{P}_d[0,1], C[0,1]}(\tilde{f})\| < \frac{\delta}{4}. \quad (4)$$

Существует $\tau > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $|t_1 - t_2| < \tau$, выполняется

$$|G(f_0)(t_1) - G(f_0)(t_2)| < \frac{\delta}{2}. \quad (5)$$

В силу непрерывности $F_{k,\gamma}(\cdot)$ (лемма 1) найдется $\lambda > 0$ такое, что для всех $f \in C[0, 1]$, $\|f - f_0\| < \lambda$, $0 \leq k \leq n - 1$, $t \in [0, 1]$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & |L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f), x_{k+1}^{av}(f)]}(t) - L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f_0), x_{k+1}^{av}(f_0)]}(t)| < \tau, \\ & \|f \circ L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f), x_{k+1}^{av}(f)]} - f_0 \circ L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f_0), x_{k+1}^{av}(f_0)]}\| < \eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно, согласно (4) $\|\tilde{p}_k(f) - \tilde{p}_k(f_0)\| < \delta/2$. Тогда по определению выборки $G(\cdot)$ для любого $t \in [0, 1]$ выполняется

$$|G(f)(L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f), x_{k+1}^{av}(f)]}(t)) - G(f_0)(L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f_0), x_{k+1}^{av}(f_0)]}(t))| < \frac{\delta}{2}.$$

Используя (5) и (6), получим, что

$$\begin{aligned} & |G(f)(L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f), x_{k+1}^{av}(f)]}(t)) - G(f_0)(L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f), x_{k+1}^{av}(f)]}(t))| \\ & \leq |G(f)(L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f), x_{k+1}^{av}(f)]}(t)) - G(f_0)(L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f_0), x_{k+1}^{av}(f_0)]}(t))| \\ & \quad + |G(f_0)(L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f_0), x_{k+1}^{av}(f_0)]}(t)) - G(f_0)(L_{[0,1]}^{[x_k^{av}(f), x_{k+1}^{av}(f)]}(t))| < \delta. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности k и t вытекает, что $\|G(f) - G(f_0)\| < \delta$, и непрерывность выборки $G(\cdot)$ в точке f_0 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для простоты изложения мы проведем доказательство теоремы в случае $n = 2$, а потом укажем, как перейти к общему случаю. Мы будем использовать слегка модифицированный вариант леммы 6.1 из работы [8] (его доказательство отличается от доказательства леммы 6.1 лишь незначительными изменениями).

ЛЕММА 2. Пусть заданы банахово пространство X , его подмножества $M, V_0, V_1 \subset X$, число $\gamma > 0$ и $x \in X$. Если

$$\begin{aligned} d(V_0, V_1) &= \inf_{x_0 \in V_0, x_1 \in V_1} \|x_0 - x_1\| > 0, \\ P_{M,\gamma,X}(x) &= \{y \in M : \|x - y\| \leq \rho(x, M)(1 + \gamma)\} \subset V_0 \cup V_1, \\ \exists y_i \in V_i : \quad y_i &\in P_{M,X}(x), \quad i = 0, 1, \end{aligned}$$

то не существует непрерывной мультипликативной γ -выборки из X в M .

Пусть Δ , $0 < \Delta < 1/4$, и $N \in \mathbb{N}$ – фиксированные числа, которые будут заданы позднее. Пусть $p_0(t) = 0$, $p_1(t) = -(2/\Delta^2)(t - 1/2 + \Delta)(t - 1/2 - \Delta)$. Рассмотрим $y_0, y_1 \in S_2^d$:

$$y_0(t) = \begin{cases} p_0(t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} + \Delta, \\ p_1(t), & \frac{1}{2} + \Delta \leq t \leq 1, \end{cases} \quad y_1(t) = \begin{cases} p_0(t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \Delta, \\ p_1(t), & \frac{1}{2} - \Delta \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f_{\Delta,N} \in C[0, 1]$, заданную соотношениями

$$\begin{aligned} f_{\Delta,N}\left(\frac{j}{N}\right) &= \begin{cases} \max\left(y_0\left(\frac{j}{N}\right), y_1\left(\frac{j}{N}\right)\right) - 1, & j \text{ четное,} \\ \min\left(y_0\left(\frac{j}{N}\right), y_1\left(\frac{j}{N}\right)\right) + 1, & j \text{ нечетное,} \end{cases} \\ f_{\Delta,N}|_{[j/N, (j+1)/N]} &\in \mathcal{P}_1\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В первом определении $0 \leq j \leq N$, во втором $-0 \leq j \leq N-1$. Пусть

$$V_0 = \left\{ y \in S_2^d : y\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad V_1 = \left\{ y \in S_2^d : y\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Тогда $y_i \in V_i$, $i = 0, 1$, и $d(V_0, V_1) \geq \varepsilon > 0$. Из равенства $\|y_0 - y_1\| = 2$, определения (7) и теоремы Чебышева об альтернансе следует, что для достаточно больших N выполняется $\rho(f_{\Delta, N}, S_2^d) = 1$ и, следовательно, $y_0, y_1 \in P_{S_2^d, C[0,1]}(f_{\Delta, N})$. Докажем, что при достаточно большом N и малом Δ справедливо $P_{S_2^d, 1-\varepsilon, C[0,1]}(f_{\Delta, N}) \subset V_0 \cup V_1$. Действительно, пусть $y \in P_{S_2^d, 1-\varepsilon, C[0,1]}(f_{\Delta, N})$ и $t \in H_1(s)$. Если $t \geq 1/2$, то $y|_{[0,t]} \in \mathcal{P}_d[0, t]$, и в силу неравенства $\|y - f_{\Delta, N}\| \leq 1(1 + 1 - \varepsilon)$ выполняются следующие неравенства:

$$y\left(\frac{j}{N}\right) \leq -1 + (2 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon \quad \text{для четных } j, \quad \frac{j}{N} \leq \frac{1}{2} - \Delta,$$

$$y\left(\frac{j}{N}\right) \geq -1 + \varepsilon \quad \text{для нечетных } j, \quad \frac{j}{N} \leq \frac{1}{2} - \Delta.$$

Ясно, что если Δ достаточно мало, а N достаточно велико, то для t , $0 \leq t \leq 1/2$, выполняется неравенство $|y(t)| \leq 1 - \varepsilon/2$ и, следовательно, $y \in V_0$. Если $t \leq 1/2$, то аналогичным образом можно показать, что $y \in V_1$. Таким образом, мы можем воспользоваться леммой 2 для $M = S_2^d$, $X = C[0, 1]$, $x = f_{\Delta, N}$ и $\gamma = 1 - \varepsilon$.

В случае большего числа звеньев надо реализовать предложенную конструкцию на отрезке $[0, 1/2]$ и доопределить $y_0(\cdot)$ и $y_1(\cdot)$ на отрезке $[1/2, 1]$ одинаковой кусочно-полиномиальной функцией с соответствующим числом звеньев и достаточно большим колебанием.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П. Л. // Собр. сочинений. Т. 2. М.-Л., 1946–1951. С. 151–235.
2. Kirchberger P. Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden. Inauguraldissertation. Göttingen, 1902.
3. Maehly H., Witzgall Ch. // Numer. Math. 1960. V. 2. № 5. P. 293–307.
4. Конягин С. В. // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 3. С. 404.
5. Рютин К. С. // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6. № 4. С. 1205–1220.
6. Рютин К. С. // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 2. С. 261–270.
7. DeVore R., Howard R., Micchelli Ch. // Manuscripta Math. 1989. V. 63. № 4. P. 469–478.
8. Лившиц Е. Д. // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 1. С. 99–130.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

17.02.2005