Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, О сублакунарных последовательностях и
выигрышных множествах, *Матем. заметки*, 2005, том 78,
выпуск 4, 634–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:21:16

О СУБЛАКУНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ И ВЫИГРЫШНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Н. Г. Мошевитин

Напомним определение (α, β) -игры Банаха–Мазура–Шмидта на вещественной прямой, (α, β) -и α -выигрышного множества и их простейшие свойства (см. [1], [2]). Пусть $0 < \alpha, \beta < 1$ и $S \subseteq \mathbb{R}$. Рассматривается игра, в которую играют черные и белые. Сначала черные выбирают на действительной оси замкнутый отрезок B_1 длины $l(B_1) = 2\rho$. Затем белые выбирают замкнутый отрезок $W_1 \subset B_1$ длины $l(W_1) = \alpha l(B_1)$. Потом черные выбирают замкнутый отрезок $B_2 \subset W_1$ длины $l(B_2) = \beta l(W_1)$, и т.д. В результате образуется последовательность вложенных замкнутых отрезков $B_1 \supset W_1 \supset B_2 \supset W_2 \supset \dots$ с длинами

$$l(B_i) = 2(\alpha\beta)^{i-1}\rho \quad \text{и} \quad l(W_i) = 2\alpha(\alpha\beta)^{i-1}\rho, \quad i = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ состоит из одной единственной точки. Если $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in S$, то говорят, что белые выиграли игру. Множество S называется (α, β) -выигрышным, если белые могут выиграть игру независимо от того, как играют черные. Множество S называется α -выигрышным, если оно является (α, β) -выигрышным при каждом $\beta \in (0, 1)$.

Хорошо известно, что всякое α -выигрышное множество на вещественной прямой при $\alpha > 0$ имеет размерность Хаусдорфа, равную единице. Шмидт [1], [2] доказал, что пересечение любого счетного числа α -выигрышных множеств снова будет α -выигрышным. В качестве одного из примеров α -выигрышного множества с произвольным $\alpha \in (0, 1/2)$ Шмидт рассматривал множество

$$\mathcal{N}_q = \{x \in \mathbb{R} : \exists C(x) > 0 \forall n \in \mathbb{N} \|q^n x\| \geq C(x)\},$$

состоящее из чисел, не являющихся нормальными по натуральному основанию $q \geq 2$.

С другой стороны, Поллингтон [3] и де Матам [4], отвечая на вопрос Эрдеша [5], доказали, что для всякой лакунарной последовательности $T = \{t_n\}_{n+1}^{\infty}$ (т.е. для последовательности положительных чисел, удовлетворяющей условию

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

с некоторым $\lambda > 1$) множество

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{R} : \exists C(x) > 0 \forall n \in \mathbb{N} \|t_n x\| \geq C(x)\}$$

имеет хаусдорфову размерность единица (естественно, мера Лебега этого множества равна нулю). Легко проверить, что с точки зрения (α, β) -игры множество $\mathcal{N}(T)$ будет α -выигрышным с любым $\alpha \in (0, 1/2)$. В недавней работе Мошевитина и Ахунжанова [6] был получен ряд обобщений и усилений упомянутых результатов Поллингтона–де Матана. В частности, там было доказано, что для последовательности $T' = \{t'_n\}_{n+1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию

$$\frac{t'_{n+1}}{t'_n} \geq 1 + \frac{1}{n^\beta} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

при некотором $\beta \in (0, 1/2]$ множество

$$\mathcal{N}(T') = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists C(x) > 0 \forall n \in \mathbb{N} \|t'_n x\| \geq \frac{C(x)}{n^{2\beta}} \right\}$$

имеет хаусдорфову размерность единица.

Автору неизвестен ответ на следующий вопрос: верно ли, что для любой последовательности T' , удовлетворяющей условию (1), множество $\mathcal{N}(T')$ является α -выигрышным. Тем не менее, для некоторых последовательностей сублакунарного роста подобный результат получить несложно.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ, грант № МД-3321.2004.1, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-136.2003.1, и фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

ТЕОРЕМА. Пусть последовательность положительных чисел t_n такова, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 : \quad \frac{t_{n+1}}{t_n} \geq 1 + \frac{1}{n^\varepsilon}. \quad (2)$$

Тогда при каждом положительном δ множество

$$\mathcal{A}_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists c(x) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|t_n x\| > \frac{c(x)}{n^\delta} \right\}$$

будет α -выигрышным с любым заданным наперед $\alpha \in (0, 1/2)$, т.е. $\text{win dim } \mathcal{A}_\delta = 1/2$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть для последовательности положительных чисел t_n выполнено (2). Тогда множество

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\delta > 0} \mathcal{A}_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0 \quad \exists c(x, \delta) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|t_n x\| > \frac{c(x, \delta)}{n^\delta} \right\}$$

будет α -выигрышным с любым заданным наперед $\alpha \in (0, 1/2)$, т.е. $\text{win dim } \mathcal{A} = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ представляет собой модификацию оригинальной конструкции Шмидта [1], [2] с использованием соображений работ [3], [4] и развивающей их работы [6].

Зафиксируем $\alpha, \beta \in (0, 1)$ такие, что $\gamma = \gamma(\alpha, \beta) = 1 + \alpha\beta - 2\alpha > 0$. Положим

$$d = d(\alpha, \beta) = \left\lceil \frac{\log_2(2/\gamma)}{\log_2(1/(\alpha\beta))} \right\rceil, \quad \tau = 8d \log_2 \frac{1}{\alpha\beta}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{40d \log_2(1/(\alpha\beta))}. \quad (3)$$

Будем считать, что при $n \geq N_0(\alpha, \beta, \delta)$ для рассматриваемой последовательности выполнено $t_{n+1}/t_n \geq 1 + 1/n^\varepsilon$ с ε , определенным в (3).

Определим рекуррентным образом величины $n_r, k_r, \kappa_r \in \mathbb{N}$ из условий

$$\begin{aligned} k_0 &= n_0 = 1, & n_{r+1} &= n_r + k_{r+1}, & \kappa_r &= \lceil \log_2 4k_r \rceil \geq 2, \\ k_{r+1} &= \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{t_{n_r+k}}{t_{n_r}} \geq (16k_r k)^\tau \right\}. \end{aligned}$$

Сразу заметим, что $k_r \leq n_r$. Заметим также, что если положить $k^* = \lceil n_r^{2\varepsilon} \rceil$, то

$$\begin{aligned} \frac{t_{n_r+k^*}}{t_{n_r}} &\geq \prod_{n=n_r}^{n_r+k^*-1} \left(1 + \frac{1}{n^\varepsilon} \right) \geq \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{n=n_r}^{n_r+k^*-1} \frac{1}{n^\varepsilon} \right) \geq \exp \left(\frac{1}{2} \int_{n_r}^{n_r+k^*} \frac{dx}{x^\varepsilon} \right) \\ &\geq \exp \left(\frac{1}{1(1-\varepsilon)} ((n_r + k^*)^{1-\varepsilon} - n_r^{1-\varepsilon}) \right) \geq \exp \left(\frac{k^*}{8n^\varepsilon} \right) \\ &= \exp \left(\frac{n^\varepsilon}{8} \right) \geq (16n_r)^\tau (1+2\varepsilon) \geq (16k_r k^*)^\tau \end{aligned}$$

при $n_r \geq N_1(\alpha, \beta, \delta)$. Следовательно, при $n_r \geq N_2(\alpha, \beta, \delta) = \max(N_0(\alpha, \beta, \delta), N_1(\alpha, \beta, \delta))$ выполняется

$$k_{r+1} \leq k^* \leq n_r^{2\varepsilon}, \quad \kappa_{r+1} \leq 2\varepsilon \log_2 n_r + 3. \quad (4)$$

Из монотонности последовательности n_r видим, что

$$k_r \leq n_r^{2\varepsilon}, \quad \kappa_r \leq 2\varepsilon \log_2 n_r. \quad (5)$$

Определим величины

$$\Delta_r = \min \left\{ \frac{1}{t_{n_{r+1}-1}}, \frac{(\alpha\beta)^{1+2d\kappa_r}}{t_{n_r-1}} \right\}.$$

Из определения Δ_r очевидно, что

$$\Delta_r \geq \frac{(\alpha\beta)^{1+2d\kappa_r}}{t_{n_{r+1}-1}}. \quad (6)$$

Докажем неравенство

$$\frac{\Delta_r}{\Delta_{r+1}} \geq \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{1+2d\kappa_{r+1}}. \quad (7)$$

Действительно, в случае, когда $\Delta_r = 1/t_{n_{r+1}-1}$, используя неравенство

$$\Delta_{r+1} \leq \frac{(\alpha\beta)^{1+2d\kappa_{r+1}}}{t_{n_{r+1}-1}},$$

сразу получаем (7). Если же $\Delta_r = (\alpha\beta)^{1+2d\kappa_r}/t_{n_r-1}$, то используем неравенство $\Delta_{r+1} \leq 1/t_{n_{r+2}-1}$ и оценку $t_{n_{r+2}-1}/t_{n_r-1} \geq t_{n_{r+1}}/t_{n_r} \geq (16k_r k_{r+1})^\tau$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_r}{\Delta_{r+1}} &\geq \frac{t_{n_{r+2}-1}}{t_{n_r-1}} (\alpha\beta)^{1+2d\kappa_r} \geq (16k_r k_{r+1})^\tau (\alpha\beta)^{1+2d\kappa_r} \\ &\geq \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{\tau(\log_2 4k_r + \log_2 4k_{r+1})/\log(1/(\alpha\beta)) - 1 - 2d\kappa_r}. \end{aligned}$$

Здесь показатель в последнем выражении оценивается снизу через

$$\frac{\tau}{\log(1/(\alpha\beta))}(\kappa_r + \kappa_{r+1} - 2) - 1 - 2d\kappa_r \geq 1 + 2\kappa_{r+1}$$

в силу выбора параметра τ по формуле из (3). Из последних двух оценок соотношение (7) следует и в этом случае.

Теперь будем непосредственно доказывать (α, β) -выигрышность множества $\mathcal{A}_\delta$. Пусть черные начали (α, β) -игру с отрезка B_1 радиуса ρ . Возьмем достаточно большое j , чтобы $n_j \geq N_2$ и, кроме того, $\Delta_j < \rho$, и определим натуральные величины m_r из условий

$$\Delta_{r+j} > 2\rho(\alpha\beta)^{m_r-1} \geq \alpha\beta\Delta_{r+j}. \quad (8)$$

Отрезок B_{m_r} содержит в себе не более k_{r+j+1} рациональных чисел вида a/t_n , $a \in \mathbb{Z}$, $n_{r+j} \leq n < n_{r+j+1}$. В [2] (см. лемма 1B на с. 44) доказано, что если в (α, β) -игре встретился черный отрезок B_q с центром b , то белые могут играть так, что (не зависимо от того, как играют черные) отрезок W_{q+d} будет лежать по заданную сторону от точки b и, кроме того, расстояние от отрезка W_{q+d} до точки b будет $\geq \gamma|B_q|/4$. За $d\kappa_{r+j+1}$ шагов игры белые, применяя эту лемму Шмидта и процесс дихотомии, могут добиться того, чтобы отрезок $B_{m_r+d\kappa_{r+j+1}}$ не только не содержал отмеченные рациональные числа, но и было бы выполнено

$$x \in B_{m_r+d\kappa_{r+j+1}} \implies \left|x - \frac{a}{t_n}\right| \geq \frac{\gamma|B_{m_r+d(\kappa_{r+j+1}-1)}|}{4}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad n_{r+j} \leq n < n_{r+j+1}.$$

Это значит, что для $x \in B_{m_r+d\kappa_{r+j+1}}$ для $n_{r+j} \leq n < n_{r+j+1}$ выполняется

$$\left|x - \frac{a}{t_n}\right| > \frac{\gamma\rho}{2} \cdot (\alpha\beta)^{m_r-1} \cdot (\alpha\beta)^{d\kappa_{r+j+1}-1} \geq \frac{\gamma}{4} \Delta_{r+j} (\alpha\beta)^{d\kappa_{r+j+1}} \geq \frac{\alpha\beta\gamma}{4} \cdot \frac{(\alpha\beta)^{2d(\kappa_{r+j}+\kappa_{r+j+1})}}{t_{n_{r+j+1}-1}}$$

(в последней выкладке использована нижняя оценка из (8) и неравенство (6)). Таким образом, при $n_{r+j} \leq n < n_{r+j+1}$ имеем

$$\|t_n x\| \geq \frac{\alpha\beta\gamma\rho}{2} (\alpha\beta)^{2d(\kappa_{r+j}+\kappa_{r+j+1})} \frac{t_{n_{r+j}}}{t_{n_{r+j+1}-1}}.$$

Но из определения величины n_{r+j+1} следует, что

$$\frac{t_{n_{r+j}}}{t_{n_{r+j+1}-1}} \geq (16k_{r+j}k_{r+j+1})^{-\tau}.$$

Теперь, в силу выбора параметров ε, τ по формулам из (3) и в силу (4), (5) получаем

$$\|t_n x\| \geq \frac{\alpha\beta\gamma}{4} \cdot \frac{(\alpha\beta)^{2d(\kappa_{r+j}+\kappa_{r+j+1})}}{(16k_{r+j}k_{r+j+1})^\tau} \geq \frac{C(\alpha, \beta)}{n^\delta}, \quad C(\alpha, \beta) > 0, \quad n_{r+j} \leq n < n_{r+j+1}.$$

Таким образом, если оказалось, что

$$m_{r+1} \geq m_r + d\kappa_{r+j+1}, \quad (9)$$

то мы построили индуктивный процесс, обеспечивающий для белых в (α, β) -игре возможность добиться того, чтобы для $x = \bigcap_m B_m$ было бы выполнено

$$\|t_n x\| \geq \frac{C(\alpha, \beta)}{n^\delta} \quad \forall n > n_{j+1}. \quad (10)$$

Убедимся, что неравенство (9) справедливо. Действительно из (8) получаем

$$(\alpha\beta)^{m_{r+1}-m_r} \leq \frac{2\rho(\alpha\beta)^{m_{r+1}-1}}{2\rho(\alpha\beta)^{m_r-1}} \leq \frac{\Delta_{r+j+1}}{\alpha\beta\Delta_{r+j}}.$$

Подставим сюда неравенство (7) с заменой r на $r+j$ и убедимся, что

$$m_{r+1} - m_r \geq 2d\kappa_{r+j+1} > d\kappa_{r+j+1}. \quad (11)$$

Итак, мы показали, что в (α, β) -игре белые могут добиться от точки $x = \bigcap_m B_m$ выполнения условия (10). Чтобы неравенство из (10) выполнялось не только для $n > n_{j+1}$, но и для всех натуральных n (возможно, с заменой константы $C(\alpha, \beta)$ на меньшую величину $C'(\alpha, \beta, \rho, \delta)$), нам надо проследить за конечным (зависящим от $\alpha, \beta, \delta, \rho$) количеством точек вида

$$\frac{a}{t_n}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad n \leq n_{j+1},$$

попавших в самом начале игры в отрезок B_1 . Но, если сравнить (9) и (11), то видно, что на каждом промежутке игры между моментами m_r и m_{r+1} остается запас в $d\kappa_i$ шагов, который, в частности, позволяет оторваться от любого конечного набора точек и обеспечить для точки $x = \bigcup_m B_m$ неравенство

$$\|t_n x\| \geq \psi_n \quad \forall n \leq n_{j+1}$$

с некоторыми положительными ψ_n , зависящими от α, β, δ .

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmidt W. M. // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 623. P. 178–199.
2. Шмидт В. М. Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983.
3. Pollington A. D. // Illinois J. Math. 1979. V. 23. P. 511–702.
4. de Mathan D. // Acta Math. Hungar. 1980. V. 36. P. 237–241.
5. Erdős P. Repartition Modulo 1. Lecture Notes in Math. V. 475. New York: Springer-Verlag, 1975.
6. Ахунжанов Р. К., Мошевитин Н. Г. // Матем. заметки. 2005. Т. 77. № 6. С. 803–813.