Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, О бикомпактных G -расширениях, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 5, 695–709

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2629>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:55:19

УДК 515.122.4+515.122.536

О БИКОМПАКТНЫХ G -РАСШИРЕНИЯХ

К. Л. Козлов, В. А. Чатырко

Изучается полурешетка бикомпактных G -расширений G -тихоновского пространства X . Показывается, какое множество, содержащее X и содержащееся в максимальном бикомпактном G -расширении $\beta_G X$, должно также содержаться и во всех других бикомпактных G -расширениях пространства X . Указано условие, при выполнении которого $\beta_G X$ можно получить как пополнение по естественной равномерности (близости) на G -пространстве X . Приводятся достаточные условия существования наименьшего (минимального и единственного) бикомпактного G -расширения.

Библиография: 20 названий.

1. Введение и предварительные сведения. Если на тихоновском пространстве X непрерывно действует топологическая группа G , то данное действие может быть непрерывно продолжено только на некоторые (быть может и ни на какие [1]) бикомпактные расширения X , которые называются *бикомпактными G -расширениями*. Существуют различные характеристики бикомпактных G -расширений: через инвариантные близости, согласованные с действием (Ю. М. Смирнов [2]), вполне ограниченные эквивалентности (М. Мегрелишвили [3]), кольца G -равномерных функций (Я. де Врис [4], Ю. М. Смирнов [2]). В настоящей работе рассматривается вопрос о том, какие подмножества максимального бикомпактного G -расширения $\beta_G X$, содержащие подпространство X , должны присутствовать в любом бикомпактном G -расширении X .

Поводом к постановке этого вопроса послужила статья Ю. М. Смирнова и Л. Стоянова [5], из результатов которой, в частности, вытекает, что у любой вполне ограниченной группы G , действующей самой на себе, существует единственное бикомпактное G -расширение. То есть любое инвариантное подмножество $\beta_G G$, содержащее G , является подмножеством любого (т.е. единственного) бикомпактного G -расширения. Ниже (теорема 1) показано, что любое бикомпактное G -расширение обязано содержать как “пополнение” каждой орбиты (за счет возможности пополнения действующей группы), так и орбиты, состоящие из точек почти открытости действия (см. определение 1), причем получающееся таким образом расширение исходного пространства является его G -расширением. Примеры 2 и 3 показывают независимость двух этих способов “обязательного пополнения” G -пространства в любом бикомпактном G -расширении.

Работа выполнена при поддержке Шведской Королевской академии наук.

Помимо этого дана переформулировка вопроса Я. де Вриса о том, когда $\beta_G X$ совпадает со стоун-чеховской бикомпактификацией βX (следствие 2), и показано, когда максимальное бикомпактное G -расширение можно получить как пополнение по естественной равномерности (расширение по естественной близости), определенной на G -пространстве (теорема 3). Приводятся достаточные условия существования наименьшего, минимального и единственного бикомпактного G -расширения (следствие 3, теорема 4 и следствие 4). Кроме того, сравниваются бикомпактные G -расширения пространства X при различных топологиях на действующей группе (теорема 2).

Все рассматриваемые пространства предполагаются тихоновскими, а отображения пространств непрерывными. Пространства действительных, рациональных и целых чисел обозначаются соответственно через $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$. Для множества A множества $\text{int } A$, $\text{cl } A$ являются его внутренностью и замыканием соответственно.

Если на множестве даны две топологии $\tau_2 \subset \tau_1$, то будем говорить, что топология τ_1 *сильнее* τ_2 ($\tau_1 \geq \tau_2$). Топологическое пространство X с топологией τ при необходимости будем обозначать (X, τ) .

Пусть $\omega_1 = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\omega_2 = \{V_\beta : \beta \in B\}$ – покрытия пространства X . Обозначение $\omega_1 \succ \omega_2$ означает, что покрытие ω_1 вписано в ω_2 . Звезду точки x относительно покрытия ω обозначим $\text{St}(x, \omega)$. Положим $\omega_1 \wedge \omega_2 = \{U_\alpha \cap V_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$, а $\omega_1 \wedge M = \{U_\alpha \cap M : \alpha \in A\}$, где $M \subset X$.

Понятия G -пространства, инвариантного подмножества, орбиты, G -тихоновости, G -расширения и эквивариантного отображения имеются в [6]–[8], [2]. Если в G -пространстве X дано семейство множеств $\gamma = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$, то для $g \in G$ положим $g\gamma = \{gO_\alpha : \alpha \in A\}$. В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1. Пусть X – G -пространство. Для любых множеств $S \subset G$ и $Y \subset X$ выполняются включения

$$S \text{cl } Y \subset \text{cl}(SY), \quad S \text{int } Y \subset \text{int}(SY).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in S \text{cl } Y$. Тогда $x = ht$, где $h \in S$, $t \in \text{cl } Y$. Так как действие непрерывно, для любой окрестности V_x точки x существует окрестность V_t точки t такая, что $V_x \supset hV_t$. Поэтому существует точка $t' \in V_t \cap Y$ такая, что $ht' \in V_x$. Значит, $x \in \text{cl}(SY)$. Первое включение доказано. Второе включение очевидно, так как $S \text{int } Y \subset SY$ и $S \text{int } Y$ – открытое подмножество X .

ЛЕММА 2. Пусть Y и Z – G -пространства, X – всюду плотное подмножество Y , H – всюду плотная подгруппа G и отображение $f: Y \rightarrow Z$ таково, что $f(hx) = hf(x)$ для любых $x \in X$, $h \in H$. Тогда f является эквивариантным отображением G -пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения $f(gy)$ и $gf(y)$, $g \in G$, $y \in Y$, являются непрерывными отображениями из пространства $G \times Y$ в Z , совпадающими на всюду плотном подмножестве $H \times X$. По [9, теорема 1.5.4] они совпадают. Значит, f – эквивариантное отображение.

Всю необходимую информацию о решетках можно найти, например, в [10].

Равномерные структуры на множестве вводятся через семейства покрытий. Необходимые сведения о равномерностях и близостях можно найти в [11], [9].

Равномерность (близость), заданная на топологическом пространстве, называется *согласованной* с его топологией, если она индуцирует исходную топологию пространства. Ниже, если ничего дополнительно не сказано, то термин равномерность (близость) на топологическом пространстве означает согласованность равномерности (близости) с топологией пространства. Семейство всех равномерностей (близостей) на пространстве X является полной верхней полурешеткой с частичным порядком $U_1 \geq U_2$, если $U_2 \subset U_1$ ($\delta_1 \geq \delta_2$, если из $A\delta_1 B$ следует $A\delta_2 B$).

Для топологической группы G через $\hat{G}$ будем обозначать пополнение группы по двусторонней равномерности [12].

Через $N_G(e)$ обозначим множество всех открытых окрестностей единицы e группы G , а через U_G – равномерность (не обязательно согласованную с топологией X), состоящую из всех покрытий G -пространства X , в которые можно вписать покрытия вида $\gamma_O = \{Ox : x \in X\}$, $O \in N_G(e)$.

В [13] на G -пространстве X определена близость δ_G (не обязательно согласованная с топологией X):

$A\delta_G B$ тогда и только тогда, когда $OA \cap OB \neq \emptyset$ для любого $O \in N_G(e)$.

ЛЕММА 3. Пусть X – G -пространство. Тогда δ_G – близость, индуцированная [9] равномерностью U_G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть δ' – близость, индуцированная равномерностью U_G . Она определяется следующим образом: $A\delta' B$ тогда и только тогда, когда для любого $O \in N_G(e)$ существует $x \in X$ такая, что $A \cap Ox \neq \emptyset$, $B \cap Ox \neq \emptyset$. Покажем, что $\delta_G \geq \delta'$. Для любого $O \in N_G(e)$ возьмем $V \in N_G(e)$ такое, что $V = V^{-1}$ и $V \subset O$. Если $A\delta_G B$, то существует $x \in X$ такая, что $x \in VA \cap VB$. Тогда очевидно, что $Vx \cap A \neq \emptyset$ и $Vx \cap B \neq \emptyset$, а значит и $A\delta' B$. Соотношение $\delta' \geq \delta_G$ доказывается столь же несложно.

2. Полурешетка бикомпактных G -расширений. Для тихоновского пространства X через $K(X)$ обозначим полную верхнюю (в дальнейшем, если этого не будет требоваться, то эти термины будем опускать) полурешетку бикомпактных расширений пространства X (см., например, [9, гл. 3, §3.5]).

Для G -тихоновского пространства X через $K_G(X)$ обозначим множество всех его бикомпактных G -расширений (мы не различаем эквивалентные бикомпактные расширения). На множестве $K_G(X)$ можно ввести частичный порядок, считая $bX \geq cX$, если существует эквивариантное отображение $f_{bc}: bX \rightarrow cX$ такое, что $c = f_{bc} \circ b$, где b, c – эквивариантные вложения X в бикомпактные расширения bX и cX соответственно.

Так же, как и в [9, теорема 3.5.9], можно показать, что $K_G(X)$ является полной верхней полурешеткой бикомпактных G -расширений. Из этого вытекает, в частности, что у G -тихоновского пространства существует максимальное бикомпактное G -расширение – наибольший элемент полурешетки, обозначаемое $\beta_G X$ [6], [14].

Так как любое бикомпактное G -расширение пространства X является его бикомпактным расширением, каждому элементу $K_G(X)$ можно поставить в соответствие элемент $K(X)$. Так определенное отображение является инъективным. Действительно, пусть не эквивалентным бикомпактным G -расширениям $b_1 X$ и $b_2 X$ ставится в соответствие одна бикомпактификация. Тогда существует гомеоморфизм $h: b_1 X \rightarrow b_2 X$ такой, что $b_2 = h \circ b_1$. При этом, так как ограничение h на $b_1(X)$ является эквивариантным

отображением, по лемме 2 с заменой f на h , X на $b_1(X)$, Y на b_1X , Z на b_2X h будет эквивариантным отображением и гомеоморфизмом. Значит бикомпактные G -расширения b_1X и b_2X эквивалентны. Поэтому множество $K_G(X)$ можно рассматривать как подмножество $K(X)$.

Покажем, что порядок, индуцируемый на $K_G(X)$ из $K(X)$, и порядок на $K_G(X)$, описанный выше, совпадают. Если существует эквивариантное отображение $h: b_1X \rightarrow b_2X$ такое, что $b_2 = h \circ b_1$ (т.е. $b_1X \geq b_2X$ в порядке на $K_G(X)$), то $b_1X \geq b_2X$ и в порядке на $K(X)$ (отображение то же самое). Обратно, если b_1X и $b_2X \in K_G(X)$ и $b_1X \geq b_2X$ в порядке $K(X)$, то существует отображение $h: b_1X \rightarrow b_2X$ такое, что $b_2 = h \circ b_1$. При этом ясно, что отображение $h|_{b_1(X)}$ является эквивариантным. Из леммы 2 с заменой f на h , X на $b_1(X)$, Y на b_1X , Z на b_2X следует, что h будет эквивариантным, т.е. $b_1X \geq b_2X$ и в порядке $K_G(X)$.

Операции взятия точной верхней грани в обеих полурешетках одинаковы. Поэтому доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Полурешетка $K_G(X)$ является подрешеткой $K(X)$.*

Рассматривая различные действующие на пространстве X группы, можно сравнивать полурешетки их бикомпактных G -расширений, как подрешетки $K(X)$.

Рассмотрим в $\beta_G X$ такое инвариантное подмножество Y , что $X \subset Y$. Так как X всюду плотно в Y , любой элемент $K_G(Y)$ является и элементом $K_G(X)$. Каждому элементу $K_G(Y)$ поставлен в соответствие элемент $K_G(X)$. Легко проверить, что так определенное отображение является инъективным. Поэтому множество $K_G(Y)$ можно рассматривать как подмножество $K_G(X)$. Покажем, что порядок, индуцируемый на $K_G(Y)$ из $K_G(X)$, и порядок на $K_G(Y)$ совпадают.

Пусть бикомпактным G -расширениям b_1Y и b_2Y поставлены в соответствие бикомпактные G -расширения c_1X и c_2X , где $c_i = b_i|_X: X \rightarrow c_iX = b_iY$, $i = 1, 2$. Ясно, что из $b_1Y \geq b_2Y$ вытекает, что $c_1X \geq c_2X$. Обратно, если $c_1X \geq c_2X$, то существует эквивариантное отображение $h: c_1X \rightarrow c_2X$ такое, что $c_2 = h \circ c_1$. Для эквивариантных отображений $b_1: Y \rightarrow b_1Y = c_1X$ и $b_2: Y \rightarrow b_2Y = c_2X$ выполнено равенство $b_2|_X = h \circ b_1|_X$, так как $b_i|_X = c_i$, $i = 1, 2$, т.е. отображения $h \circ b_1$ и b_2 совпадают на всюду плотном подмножестве X . Значит, они совпадают на Y и $b_1Y \geq b_2Y$.

Операции взятия точной верхней грани в обеих полурешетках одинаковы. Поэтому доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Полурешетка $K_G(Y)$ является подрешеткой $K_G(X)$, а значит (по предложению 1) и $K(X)$. Кроме того, $\beta_G Y = \beta_G X$.*

Рассматривая различные инвариантные подмножества $\beta_G X$, содержащие X , можно сравнивать их полурешетки, как подрешетки $K(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точку x G -пространства X назовем *точкой почти открытости действия*, если для любой окрестности $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \text{int}(\text{cl}(Ox))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если x – точка почти открытости действия, то и любая точка ее орбиты Gx является точкой почти открытости. Действительно, пусть $y = gx$. Покажем, что для любой окрестности $O \in N_G(e)$ имеем $y \in \text{int}(\text{cl}(Oy))$. Возьмем $V = g^{-1}Og$. Очевидно, что $V \in N_G(e)$. Тогда

$$y = gx \in g(\text{int}(\text{cl}(Vx))) \subset \text{int}(\text{cl}(gVx)) = \text{int}(\text{cl}(Ogx)) = \text{int}(\text{cl}(Oy))$$

по лемме 1.

Отсюда следует, что множество X_G точек почти открытости действия группы G является инвариантным подмножеством X .

Пусть X – подмножество G -пространства Y . Положим $X^G = GX$, $X_Y^G = X^G \cup Y_G$. Легко проверить, что подмножества X^G и X_Y^G являются инвариантными подмножествами Y .

ЛЕММА 4. Пусть X является всюду плотным подмножеством G -пространства Y , Z – G' -пространство, $f: Y \rightarrow Z$ – непрерывное замкнутое отображение и его ограничение $f|_X: X \rightarrow f(X) \subset Z$ является гомеоморфизмом. Кроме того, пусть $h: G \rightarrow G'$ – гомоморфизм такой, что выполнено условие

$$f(gy) = h(g)f(y) \quad \text{для любых } y \in Y, \quad g \in G. \quad (*)$$

Тогда отображение $f' = f|_{X_Y^G}: X_Y^G \rightarrow f(X_Y^G) \subset Z$ является гомеоморфизмом, удовлетворяющим условию $(*)$ с заменой f на f' и Y на X_Y^G .

Более того, если $G = G'$ и $h = \text{id}$, то отображение f' является эквивариантным гомеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in X$, то по [9, лемма 3.5.6] $f^{-1}fx = x$. Покажем, что это условие выполняется и для $x \in X_Y^G$.

Пусть $x \in X^G \setminus X$. Предположим, что существует точка $x' \in Y$, $x' \neq x$, такая, что $x' \in f^{-1}fx$. Так как $x \in X^G$, существует $g \in G$ такое, что $gx \in X$. Тогда, так как отображение f удовлетворяет условию $(*)$, то $f(gx) = h(g)f(x) = h(g)f(x') = f(gx')$, где $gx \in X$ и $gx \neq gx'$. Но это противоречит условию, что $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X$. Значит, f взаимно однозначно на X^G .

Пусть теперь $x \in Y_G \setminus X^G$. Предположим, что существует точка $x' \in Y$, $x' \neq x$, такая, что $x' \in f^{-1}fx$. Тогда из непрерывности действия вытекает существование такой окрестности $O \in N_G(e)$, что $\text{cl}(Ox) \cap \text{cl}(Ox') = \emptyset$. При этом $x \in \text{int}(\text{cl}(Ox))$. Из условия $(*)$ и равенства $fx = fx'$ следует, что $f(Ox) = f(Ox')$, а из непрерывности и замкнутости отображения f вытекает равенство $f(\text{cl}(Ox)) = f(\text{cl}(Ox'))$.

Поэтому для любой точки $z \in \text{int}(\text{cl}(Ox)) \cap X$ (напомним, что $\text{int}(\text{cl}(Ox)) \neq \emptyset$, а X всюду плотно) существует точка $z' \in \text{cl}(Ox')$ такая, что $fz = fz'$. Но это противоречит условию, что $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X$. Значит, отображение f удовлетворяет условию $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X_Y^G$.

Отображение f' является непрерывным, взаимно однозначным и замкнутым, как ограничение замкнутого отображения на полный прообраз, поэтому f' является гомеоморфизмом. Оно удовлетворяет условию $(*)$ с заменой f на f' и Y на X_Y^G , так как подмножество X_Y^G является инвариантным.

В [15] М. Мегрелишвили привел достаточные условия для пополнения действия. Из [15, теорема 3.1 и лемма 1.3] вытекает, что действие группы G на любом бикомпактном пространстве продолжается до действия пополненной (по двусторонней равномерности) группы $\hat{G}$ на нем. Таким образом, действие группы G на любом бикомпактном G -расширении пространства X продолжается до действия группы $\hat{G}$. Положим

$$\hat{X} = X_{\beta_G X}^{\hat{G}} = X^{\hat{G}} \cup (\beta_G X)_{\hat{G}}.$$

Отметим, что $\hat{X}$ является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ как относительно действия группы $\hat{G}$, так и действия ее подгруппы G .

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – G -тихоновское пространство. Тогда $K_G(X) = K_G(\hat{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2 мы рассматриваем полурешетку $K_G(\hat{X})$ как подрешетку $K_G(X)$.

Пусть bX – произвольное бикомпактное G -расширение X и $f_{\beta_G b}: \beta_G X \rightarrow bX$ – эквивариантное отображение G -пространств. Тогда по лемме 2 оно же будет и эквивариантным отображением $\hat{G}$ -пространств $\beta_G X, bX$. Если в лемме 4 положить G и $G' = \hat{G}$, $X = X, Y = \beta_G X, Z = bX$ и $f = f_{\beta_G b}$, то $\hat{X}$ будет эквивариантно вложено в bX относительно действия группы $\hat{G}$, а значит, и ее подгруппы G . Значит, любое бикомпактное G -расширение X является бикомпактным G -расширением $\hat{X}$. Отсюда сразу вытекает равенство $K_G(X) = K_G(\hat{X})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – G -тихоновское пространство. Тогда для любого инвариантного подмножества Y такого, что $X \subset Y \subset \hat{X}$, $K_G(X) = K_G(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $\beta_G X = \beta_G Y$ (предложение 2) и $\hat{X} = \hat{Y}$. Значит, $K_G(X) = K_G(\hat{X}) = K_G(\hat{Y}) = K_G(Y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко показать, если $X \subset Y \subset \beta X$, то $K(X) = K(Y)$ тогда и только тогда, когда $X = Y$ или $Y = \beta X$ и $|\beta X \setminus X| = 1$. В эквивариантном случае это не так (см. пример 3).

В некоторых случаях множество $\hat{X}$ можно находить проще.

ЛЕММА 5. Пусть пространство X является G -тихоновским. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) если $X^{\hat{G}}$ локально бикомпактно, то $\hat{X} = X^{\hat{G}}$;
- 2) если $X_{\beta_G X}^G = X \cup (\beta_G X)_G$ локально бикомпактно, то $\hat{X} = X_{\beta_G X}^G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если подпространство $X^{\hat{G}}$ локально бикомпактно, то оно является открытым всюду плотным инвариантным относительно действия группы $\hat{G}$ подмножеством пространства $\beta_G X$. Значит, орбиты любой точки из $\beta_G X \setminus X^{\hat{G}}$ принадлежат замкнутому нигде не плотному подмножеству $\beta_G X$. Отсюда вытекает, что $(\beta_G X)_{\hat{G}} \subset X^{\hat{G}}$ и, значит, $\hat{X} = X^{\hat{G}}$.

Пример 3 показывает, что включение $(\beta_G X)_{\hat{G}} \subset X^{\hat{G}}$, вообще говоря, строгое.

2) Докажем включение $\hat{X} \subset X_{\beta_G X}^G$. Так как $X_{\beta_G X}^G$ локально бикомпактно и $X \subset X_{\beta_G X}^G$, то $F = \beta_G X \setminus X_{\beta_G X}^G$ является замкнутым нигде не плотным подмножеством $\beta_G X$. Непрерывное действие $\hat{G} \times \beta_G X \rightarrow \beta_G X$ продолжается [15] до непрерывного действия $\hat{G} \times \beta_G X \rightarrow \beta_G X$. Прообраз замкнутого множества F является замкнутым подмножеством $\hat{G} \times \beta_G X$ и содержит множество $G \times F$, которое всюду плотно в $\hat{G} \times F$. Значит, прообраз F содержит $\hat{G} \times F$, т.е. $\hat{G}F \subset F$ и множество F является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ относительно действия группы $\hat{G}$. Отсюда вытекает, что множество $X_{\beta_G X}^G = \beta_G X \setminus F$ является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ относительно действия группы $\hat{G}$, и $X^{\hat{G}} \subset X_{\beta_G X}^G$, так как $X \subset X_{\beta_G X}^G$. Орбиты любой точки из F принадлежат замкнутому нигде не плотному подмножеству $\beta_G X$. Отсюда вытекает, что $(\beta_G X)_{\hat{G}} \subset X_{\beta_G X}^G$. Значит, $\hat{X} \subset X_{\beta_G X}^G$. Так как обратное включение очевидно, то требуемое равенство доказано.

Пример 2 показывает, что включение $X^{\hat{G}} \subset X_{\beta_G X}^G$, вообще говоря, строгое.

ВОПРОС 1. Пусть X – G -тихоновское пространство, Y – инвариантное подмножество $\beta_G X$ и $\hat{X} \subset Y$. Для каких Y полурешетки $K_G(X)$ и $K_G(Y)$ совпадают?

Пусть топологии $\tau, \tau', \tau' \geq \tau$, на группе G такие, что групповые операции непрерывны. Топологические группы (G, τ') и (G, τ) будем обозначать G' и G соответственно. Заметим, что при данных предположениях любое G -пространство является и G' -пространством.

ЛЕММА 6. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – совершенное эквивариантное отображение G' -пространств. Если X является также и G -пространством, то и Y – G -пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольные точку $y \in Y$ и ее окрестность O_y . Отображение f совершенно, поэтому $f^{-1}y$ – бикомпакт и $f^{-1}y \subset f^{-1}(O_y)$. Так как X является G -пространством, для любой точки $x \in f^{-1}y$ существует пара открытых множеств $U_x, x \in U_x$, и $O_x \in N_G(e)$ таких, что $O_x U_x \subset f^{-1}(O_y)$. Из покрытия $\{U_x : x \in f^{-1}y\}$ бикомпакта $f^{-1}y$ выберем конечное подпокрытие, тело объединения которого обозначим U , а пересечение соответствующих этому подпокрытию окрестностей единицы группы обозначим O . Тогда $OU \subset f^{-1}(O_y)$. Из эквивариантности отображения f вытекает, что $Of(U) = f(OU) \subset O_y$. Так как f замкнуто, то $y \in \text{int } f(U)$ и $O \text{int } f(U) \subset O_y$. Значит, Y является G -пространством.

ТЕОРЕМА 2. Пусть пространство X является G -тихоновским. Тогда $K_G(X)$ является подрешеткой полурешетки $K_{G'}(X)$.

Кроме того, $K_G(X) = K_{G'}(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta_G X = \beta_{G'} X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения вытекает из предложения 1 и того, что все бикомпактные G -расширения являются G' -расширениями.

Необходимость второй части теоремы очевидна, а достаточность следует из первой части и леммы 6.

3. Максимальные бикомпактные G -расширения. Близости и равномерности являются одним из инструментов исследования бикомпактных расширений. Работая с G -пространствами, вместо равномерностей и близостей будем использовать эквивариантности и эквиблизости (последний термин ранее не употреблялся, но авторы считают уместным его введение). Равномерность U (близость δ) на G -пространстве X называется *инвариантной* [3], [2], если для любого $\gamma \in U$ имеем $g\gamma \in U$ (из $A\delta B$ следует $gA\delta gB$) при любом $g \in G$. Действие группы G на равномерном пространстве (X, U) Я. де Врис [16] назвал U -ограниченным, если $U_G \geq U$. Ю.М. Смирнов [2] назвал близость δ согласованной с действием, если $\delta_G \geq \delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [3]. Равномерность U на G -пространстве X называется *эквивариантной*, если она согласована с топологией X , инвариантна и действие U -ограничено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Близость δ на G -пространстве X называется *эквиблизостью*, если она согласована с топологией X , инвариантна и согласована с действием. (Близости с описанными свойствами рассматривались в [2] без введения соответствующего понятия.)

Как уже было отмечено, любое G -тихоновское пространство обладает максимальным бикомпактным G -расширением. Покажем, когда оно может быть получено как пополнение (расширение) по естественным эквивалентностям (эквивалентностям), заданным на G -пространстве.

Для любого тихоновского пространства X существуют изоморфизмы между полурешетками близостей, вполне ограниченных равномерностей на нем (вполне ограниченной равномерности соответствует индуцированная близость или, что то же самое, близости соответствует индуцированная вполне ограниченная равномерность) и его бикомпактных расширений.

При этом, рассматривая пополнение пространства по вполне ограниченной равномерности и расширение пространства по близости, ей соответствующей, получим одинаковые бикомпактные расширения X (см., например, [9, гл. 8]).

В [2, теорема С4] показано, что эквивалентности при данном изоморфизме между близостями и бикомпактными расширениями соответствует бикомпактное G -расширение, а в [3, теорема 2] показано, что вполне ограниченной эквивалентности при изоморфизме между вполне ограниченными равномерностями и бикомпактными расширениями соответствует бикомпактное G -расширение. Из этих результатов Ю. М. Смирнова и М. Мегрелишвили, принимая во внимание, что если эквивалентности и вполне ограниченной эквивалентности соответствует одно и то же бикомпактное G -расширение, то эквивалентность индуцирует вполне ограниченную эквивалентность и наоборот, вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Семейства вполне ограниченных эквивалентностей (эквивалентностей) на топологическом пространстве являются полурешетками. Существуют изоморфизмы между полурешетками вполне ограниченных эквивалентностей и эквивалентностей на G -пространстве X , между бикомпактными G -расширениями X и вполне ограниченными эквивалентностями на нем и между бикомпактными G -расширениями X и эквивалентностями на нем. При этом рассматривая пополнение пространства по вполне ограниченной эквивалентности и расширение пространства по эквивалентности, ею индуцированной, получают одинаковые бикомпактные G -расширения X .

Пусть U^* – максимальная вполне ограниченная равномерность, а δ_β – максимальная близость на пространстве X (см., например, [9]). Из предложения 3 вытекает следствие, которое позволяет переформулировать в терминах эквивалентностей и эквивалентностей вопрос Я. де Вриса [17] о совпадении βX и $\beta_G X$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – G -пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) $\beta_G X = \beta X$;
- б) U^* – эквивалентность;
- с) δ_β – эквивалентность.

Пусть действие на G -пространстве X удовлетворяет условию:

$$\text{для любых } x \in X, O \in N_G(e) \text{ существует } y \in X \text{ такая, что } x \in \text{int}(\text{cl}(Oy)). \quad (**)$$

Тогда для любого $O \in N_G(e)$ семейство $\tilde{\gamma}_O = \{\text{int}(\text{cl}(Ox)) : x \in X\}$ является покрытием X . Положим $\tilde{U}_G$ – семейство всех покрытий, в которые можно вписать покрытие вида $\tilde{\gamma}_O, O \in N_G(e)$.

На подмножествах G -пространства X определим отношение $\tilde{\delta}_G: A\tilde{\delta}_G B$ тогда и только тогда, когда для любого $O \in N_G(e)$ существует $x \in X$ такая, что $A \cap \text{int}(\text{cl}(Ox)) \neq \emptyset$ и $B \cap \text{int}(\text{cl}(Ox)) \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – G -пространство и действие удовлетворяет условию (**). Тогда выполнены следующие эквивалентные условия:

- а) $\beta_G X$ – компактификация Самюэля G -пространства X относительно эквивариантности $\tilde{U}_G$;
- б) $\beta_G X$ – расширение G -пространства X по близости $\tilde{\delta}_G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства условия а) достаточно показать (см., например, [9, задача 8.5.7.] и [18]), что семейство $\tilde{U}_G$ – максимальная эквивариантность на X . В начале проверим, что выполняются условия (UC1)–(UC4) из [9, гл. 8, § 1], показывающие, что $\tilde{U}_G$ – равномерность. Выполнение условия (UC1) вытекает из определения семейства $\tilde{U}_G$.

Пусть $\beta_1, \beta_2 \in \tilde{U}_G$, а $V, W \in N_G(e)$ такие, что $\tilde{\gamma}_V \succ \beta_1$, $\tilde{\gamma}_W \succ \beta_2$. Тогда очевидно, что для $O = V \cap W$ выполняются условия $\tilde{\gamma}_O \succ \tilde{\gamma}_V$, $\tilde{\gamma}_O \succ \tilde{\gamma}_W$, а значит, и $\tilde{\gamma}_O \succ \beta_1$, $\tilde{\gamma}_O \succ \beta_2$. Тем самым, проверено условие (UC2).

Пусть $\beta \in \tilde{U}_G$, а V и $O \in N_G(e)$ такие, что $\tilde{\gamma}_V \succ \beta$, $O^3 \subset V$ и $O = O^{-1}$. Докажем, что $\tilde{\gamma}_O$ звездно вписано в $\tilde{\gamma}_V$.

Для любой точки $x \in X$ существует точка $z \in X$ такая, что $x \in \text{int}(\text{cl}(Oz))$. Покажем, что $\text{St}(x, \tilde{\gamma}_O) \subset \text{int}(\text{cl}(Vz))$. Если $x \in \text{int}(\text{cl}(Oy))$, то $Oy \cap \text{cl}(Oz) \neq \emptyset$, так как $x \in \text{cl}(Oy)$ и любая окрестность x , в частности, $\text{int}(\text{cl}(Oz))$, пересекается с Oy . Значит, $y \in O^{-1} \text{cl}(Oz) \subset \text{cl}(O^2z)$ по лемме 1. Очевидно, что $Oy \subset O \text{cl}(O^2z) \subset \text{cl}(O^3z) \subset \text{cl}(Vz)$. Поэтому $\text{cl}(Oy) \subset \text{cl}(Vz)$ и $\text{int}(\text{cl}(Oy)) \subset \text{int}(\text{cl}(Vz))$. Значит, покрытие $\tilde{\gamma}_O$ звездно вписано в $\tilde{\gamma}_V$.

Аналогичным образом для покрытия $\tilde{\gamma}_O$ можно найти звездно вписанное в него покрытие из $\tilde{U}_G$, которое, в свою очередь, будет (см., например, [9, лемма 5.1.15]) сильно звездно вписано в $\tilde{\gamma}_V$. Условие (UC3) выполнено.

Пусть x, y – пара различных точек пространства X . Так как действие непрерывно, существуют $O \in N_G(e)$, $O = O^{-1}$, и окрестности W_x, W_y точек x и y соответственно такие, что $\text{cl}(OW_x) \cap \text{cl}(OW_y) = \emptyset$. Покажем, что никакой элемент покрытия $\tilde{\gamma}_O$ не содержит x и y одновременно. В самом деле, если x и $y \in \text{int}(\text{cl}(Oz))$, $z \in X$, то $W_x \cap Oz \neq \emptyset$ и $W_y \cap Oz \neq \emptyset$. Поэтому $z \in OW_x$ и $z \in OW_y$ и, значит, $OW_x \cap OW_y \neq \emptyset$. Полученное противоречие показывает выполнение условия (UC4).

Так как базу равномерности $\tilde{U}_G$ составляют открытые покрытия, она согласована с топологией X .

Так как для любых $O \in N_G(e)$, $g \in G$, $x \in X$ и $U = gOg^{-1}$ выполняется равенство $g \text{int}(\text{cl}(Ox)) = \text{int}(\text{cl}(gOx)) = \text{int}(\text{cl}(Ugx))$, равномерность $\tilde{U}_G$ является инвариантной.

Наконец проверим, что $U_G \geq \tilde{U}_G$. Пусть $\beta \in \tilde{U}_G$, а $O \in N_G(e)$ такая, что $\tilde{\gamma}_O \succ \beta$. Возьмем $V \in N_G(e)$, $V^2 \subset O$. Для любой точки $x \in X$ существует точка $z \in X$ такая, что $x \in \text{int}(\text{cl}(Vz))$. Тогда $Vx \subset V \text{int}(\text{cl}(Vz)) \subset \text{int}(\text{cl}(V^2z)) \subset \text{int}(\text{cl}(Oz))$. Поэтому $\gamma_V = \{Vx : x \in X\} \succ \tilde{\gamma}_O$. Значит, $\tilde{U}_G$ является эквивариантностью.

В [18] показано, что если действие удовлетворяет условию (**), то эквивариантность $\bar{U}_G$, базой которой являются покрытия $\bar{\gamma}_O = \{\text{cl}(Ox) : x \in X\}$, $O \in N_G(e)$, является максимальной эквивариантностью. Очевидно, что $\tilde{U}_G \geq \bar{U}_G$. Значит, они совпадают и $\tilde{U}_G$ является максимальной эквивариантностью на X .

Эквивалентность условий а) $\iff$ б) вытекает из предложения 3 и того, что эквивалентность $\tilde{U}_G$ индуцирует эквивалентность $\tilde{\delta}_G$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пример 1 из [18] показывает, что, вообще говоря, равномерность U_G может и не быть эквивалентностью, а близость δ_G – эквивалентностью, в то время как $\tilde{U}_G$ – эквивалентность, а $\tilde{\delta}_G$ – эквивалентность.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если действие на G -пространстве X удовлетворяет условию

$$x \in \text{int}(Ox) \quad \text{для любых } O \in N_G(e) \text{ и } x \in X, \quad (***)$$

то $\tilde{U}_G = U_G$ [18] и $\tilde{\delta}_G = \delta_G$ по лемме 3.

4. Наименьшие (минимальные, единственные) бикомпактные G -расширения. Наименьший (минимальный) элемент полурешетки бикомпактных G -расширений G -пространства X называется *наименьшим (минимальным) бикомпактным G -расширением X* . Легко показать, что полурешетка бикомпактных G -расширений G -пространства X является полной решеткой тогда и только тогда, когда у X существует наименьшее бикомпактное G -расширение.

Если полурешетка бикомпактных расширений тихоновского пространства является решеткой тогда и только тогда, когда пространство локально бикомпактно, то в случае G -тихоновских пространств это не так [5]. Ниже приводятся достаточные условия существования наименьшего (минимального и единственного) бикомпактного G -расширения.

Из теоремы 1 и существования наименьшего бикомпактного G -расширения у локально бикомпактного G -пространства [6] следует.

СЛЕДСТВИЕ 3. 1) Если $\hat{X}$ локально бикомпактно, то у X существует наименьшее бикомпактное G -расширение.

2) Если $|\beta_G X \setminus \hat{X}| \leq 1$, то у X существует единственное бикомпактное G -расширение.

Из леммы 6 и теоремы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 4. Пусть пространство X является G' -тихоновским. Если на действующей группе существует более слабая групповая топология (G – та же самая группа в более слабой топологии) такая, что X – G -тихоновское пространство с полной решеткой бикомпактных G -расширений, то у G' -пространства X существует минимальное бикомпактное G' -расширение – наименьшее бикомпактное G -расширение.

Более того, если $\beta_G X = \beta_{G'} X$, то минимальное бикомпактное G' -расширение пространства X будет наименьшим.

ВОПРОС 2. Можно ли привести пример G -тихоновского пространства у которого существует минимальное, но не наименьшее бикомпактное G -расширение? Сколько может быть минимальных бикомпактных G -расширений у G -тихоновского пространства? (Заметим, что у тихоновского пространства наименьшее и минимальное бикомпактные расширения совпадают.)

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть пространство X является G' -тихоновским. Если на действующей группе существует более слабая групповая топология (G – та же самая группа в более слабой топологии) такая, что для G -пространства X выполнено условие $\beta_G X = \beta_{G'} X$, и у G -пространства X существует единственное бикомпактное G -расширение, то у G' -пространства X существует единственное бикомпактное G' -расширение.

ВОПРОС 3. Какие условия являются необходимыми и достаточными (необходимыми, достаточными) для существования наименьшего (минимального, единственного) бикомпактного G -расширения?

5. Примеры.

ПРИМЕР 1. Если H – замкнутая подгруппа G , то G действует на пространстве левых смежных классов $\mathcal{X} = G/H$ посредством левых сдвигов. Очевидно, что действие G на $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию (***) . Значит, по замечанию 4 U_G – максимальная эквивариантность на $\mathcal{X}$, которая, тем самым, является G -тихоновским пространством.

Для применения результатов пунктов 2–4 к изучению полурешетки бикомпактных G -расширений пространства $\mathcal{X}$ выясним, чему гомеоморфно подмножество $\mathcal{X}^{\hat{G}}$ максимального бикомпактного G -расширения $\beta_G \mathcal{X}$.

Пусть $\pi: G \rightarrow \mathcal{X}$, $f_\beta: \mathcal{X} \rightarrow \beta_G \mathcal{X}$ – естественные отображения, U_{LR} – двусторонняя равномерность на G , V – единственная равномерность (она же и эквивариантность [15]) на $\beta_G \mathcal{X}$, а

$$f = f_\beta \circ \pi: G \rightarrow \beta_G \mathcal{X}. \quad (1)$$

Отображение π является эквивариантным и равномерно непрерывным относительно пары равномерностей U_R (правая равномерность на G) и U_G [12, гл. 3]. Так как $U_{LR} \geq U_R$, то π равномерно непрерывно и относительно U_{LR} и U_G . Из теоремы 3 и замечания 4 следует, что отображение f_β эквивариантно и равномерно непрерывно относительно пары равномерностей U_G и V . Тогда отображение f является эквивариантным и равномерно непрерывным относительно пары равномерностей U_{LR} и V , как композиция эквивариантных и равномерно непрерывных отображений.

Согласно [9, теорема 8.3.10] существует равномерно непрерывное отображение $F: \hat{G} \rightarrow \beta_G \mathcal{X}$ и

$$f = F \circ j, \quad (2)$$

где $j: G \rightarrow \hat{G}$ – естественное вложение. Действие группы G на $\beta_G \mathcal{X}$ продолжается [15] до действия группы $\hat{G}$. Группа $\hat{G}$ является $\hat{G}$ -пространством. По лемме 2 отображение F является эквивариантным отображением $\hat{G}$ -пространств $\hat{G}$ и $\beta_G \mathcal{X}$.

Так как $f(H)$ – одноточечное множество, то и $F(\text{cl } H)$ (замыкание берется в $\hat{G}$) одноточечно. Поэтому определено отображение $h: \mathcal{Y} = \hat{G}/\text{cl } H \rightarrow \beta_G \mathcal{X}$ такое, что

$$F = h \circ \hat{\pi}, \quad (3)$$

где $\hat{\pi}: \hat{G} \rightarrow \mathcal{Y}$ – естественное отображение $\hat{G}$ -пространств. Отображение h , очевидно, непрерывно. Принимая во внимание (3) легко показать, что оно является эквивариантным отображением $\hat{G}$ -пространств.

Определено вложение $i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $i(gH) = g \operatorname{cl} H$ (см. [5] и [12, гл. 3, § 2, предложение 21]), где $gH, g \operatorname{cl} H$ – левые смежные классы в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно. Очевидно, что оно является эквивариантным относительно действия группы G . Покажем, что

$$h \circ i = f_\beta. \quad (4)$$

Произведение в группах (чтобы не путать с обозначением смежных классов) будем, где это необходимо, обозначать через ‘ $\cdot$ ’. Пусть $gH \in \mathcal{X}$; тогда $i(gH) = g \operatorname{cl} H$ и $h(g \operatorname{cl} H) =$ (по (3)) $= F(g \cdot \operatorname{cl} H) =$ (по (2) и так как $g \in G$) $= f(g \cdot H) =$ (по (1)) $= f_\beta(gH)$.

Условия (1)–(4) доказывают коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{X} \\ j \downarrow & \searrow f & \swarrow f_\beta \\ & \beta_G \mathcal{X} & \\ \uparrow F & \nwarrow h & \downarrow i \\ \hat{G} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \mathcal{Y} \end{array} ,$$

где j, π, f, i, f_β – эквивариантные отображения G -пространств, а $F, h, \hat{\pi}$ – эквивариантные отображения $\hat{G}$ -пространств.

Из свойства максимальности бикompактного G -расширения вытекает существование эквивариантных отображений $H: \beta_{\hat{G}} \mathcal{Y} \rightarrow \beta_G \mathcal{X}$ и $h_\beta: \mathcal{Y} \rightarrow \beta_{\hat{G}} \mathcal{Y}$ $\hat{G}$ -пространств таких, что

$$H \circ h_\beta = h. \quad (5)$$

Показана коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f_\beta} & \beta_G \mathcal{X} \\ i \downarrow & \nearrow h & \uparrow H \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{h_\beta} & \beta_{\hat{G}} \mathcal{Y} \end{array} ,$$

где i, f_β – эквивариантные отображения G -пространств, а h_β, h, H – эквивариантные отображения $\hat{G}$ -пространств.

Из леммы 4, если положить $G, G' = \hat{G}$, $X = h_\beta \circ i(\mathcal{X})$, $Y = \beta_{\hat{G}} \mathcal{Y}$, $Z = \beta_G \mathcal{X}$ и $f = H$, и, так как $X^{\hat{G}} = \hat{G} \cdot (h_\beta \circ i(\mathcal{X})) = h_\beta(\hat{G} \cdot i(\mathcal{X})) =$ (так как действие группы $\hat{G}$ на $\mathcal{Y}$ транзитивно) $= h_\beta(\mathcal{Y})$, вытекает, что отображение $H|_{h_\beta(\mathcal{Y})}$ является гомеоморфизмом. Значит, h – вложение, как композиция (по (5)) гомеоморфизмов, и $\mathcal{X}^{\hat{G}} = \hat{G} \cdot f_\beta(\mathcal{X}) =$ (по (4)) $= \hat{G} \cdot (h \circ i(\mathcal{X})) = h(\hat{G} \cdot i(\mathcal{X})) = h(\mathcal{Y})$. Тем самым, показано, что $\mathcal{X}^{\hat{G}}$ гомеоморфно $\mathcal{Y}$.

Из примера 1, леммы 5 и следствия 3 вытекают следствия.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если пространство $\widehat{G}/\text{cl } H$ является локально бикомпактным, то у пространства G/H будет наименьшее бикомпактное G -расширение – одноточечная бикомпактификация Александрова пространства $\widehat{G}/\text{cl } H$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если пространство $\widehat{G}/\text{cl } H$ является бикомпактным, то у пространства G/H будет единственное бикомпактное G -расширение [5, теорема 3].

СЛЕДСТВИЕ 7. Если G – локально вполне ограниченная группа [19] или [12, гл. 3, § 3] (в частности, локально псевдокомпактная группа), действующая сама на себе, то она обладает наименьшим бикомпактным G -расширением – одноточечной бикомпактификацией ее пополнения по правой равномерности.

СЛЕДСТВИЕ 8. Если G – вполне ограниченная группа [19] или [12, гл. 3, § 3] (в частности, псевдокомпактная группа), действующая сама на себе, то она обладает единственным бикомпактным G -расширением – пополнением по правой равномерности.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть топологии $\tau, \tau', \tau' \geq \tau$, на группе G такие, что групповые операции непрерывны, $G' = (G, \tau')$, $G = (G, \tau)$. Тогда для любой замкнутой подгруппы $H \subset G$ пространство G/H является как G -, так и G' -пространством. Из теоремы 4 и примера 1 следует, что если G -пространство G/H имеет наименьшее бикомпактное G -расширение, то G' -пространство G/H имеет минимальное бикомпактное G' -расширение. В частности, если $\widehat{G}/\text{cl } H$ локально бикомпактно, то с учетом леммы 5 G' -пространство G/H имеет минимальное бикомпактное G' -расширение. Это обобщение теоремы 2 из [5].

ПРИМЕР 2. Пусть $\beta\mathbb{Q}$ – бикомпактификация Стоуна–Чеха пространства рациональных чисел. В качестве действующей группы G рассмотрим группу всех гомеоморфизмов $\beta\mathbb{Q}$ в компактно-открытой топологии. Заметим, что, так как характер точек из $\mathbb{Q}$ счетен, а из нароста $\beta\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ несчетен, то ни при каком $g \in G$ точка из $\mathbb{Q}$ не может отображаться в точку из нароста. Значит, $\mathbb{Q}$ – всюду плотное инвариантное подмножество, которое можно рассматривать как G -пространство, а $\beta\mathbb{Q}$ – его максимальное бикомпактное G -расширение.

Из [20, теорема 6] следует, что группа G полна относительно двусторонней равномерности. Поэтому $\mathbb{Q}^{\widehat{G}} = \mathbb{Q}^G = \mathbb{Q} \subset \beta\mathbb{Q}$. Покажем, что $\beta\mathbb{Q}_G = \beta\mathbb{Q}$.

На группе G систему открытых окрестностей единицы образуют конечные пересечения множеств вида $M(K, V) = \{g \in G : g(K) \subset V\}$, где K – бикомпактное, а V – открытое подмножество $\beta\mathbb{Q}$ и $K \subset V$ [20]. Пусть $\omega = \{V_i : i = 1, \dots, k\}$ – конечное дизъюнктивное покрытие $\beta\mathbb{Q}$, состоящее из открыто-замкнутых множеств. Положим $M(\omega) = \{g \in G : g(V_i) \subset V_i, i = 1, \dots, k\}$.

ЛЕММА 7. Множества $M(\omega)$, где ω – всевозможные конечные дизъюнктивные покрытия $\beta\mathbb{Q}$, состоящие из открыто-замкнутых множеств, образуют базу окрестностей единицы группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\cap \{M(K_i, V_i) : i = 1, \dots, k\}$ – произвольная окрестность единицы e группы G .

Так как пространство $\beta\mathbb{Q}$ сильно нульмерно, то для бикompактного множества K , содержащегося в открытом множестве V , существует открыто-замкнутое (а значит, и бикompактное) подмножество B такое, что $K \subset B \subset V$. Очевидно, что

$$M(B, B) \subset M(K, V).$$

Поэтому имеем $e \in \cap \{M(B_i, B_i) : i = 1, \dots, k\} \subset \cap \{M(K_i, V_i) : i = 1, \dots, k\}$, где $K_i \subset B_i \subset V_i$, B_i – открыто-замкнутое подмножество, $i = 1, \dots, k$.

Для любого $i = 1, \dots, k$ рассмотрим бинарное покрытие $\omega_i = \{B_i, \beta\mathbb{Q} \setminus B_i\}$. Очевидно, что $M(\omega_i) \subset M(B_i, B_i)$.

Пусть $\omega = \wedge \{\omega_i : i = 1, \dots, k\}$ – дизъюнктивное конечное открыто-замкнутое покрытие. Так как $\omega \succ \omega_i$, $i = 1, \dots, k$, то

$$\begin{aligned} M(\omega) &\subset \cap \{M(\omega_i) : i = 1, \dots, k\} \\ &\subset \cap \{M(B_i, B_i) : i = 1, \dots, k\} \subset \cap \{M(K_i, V_i) : i = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

В любой окрестности e группы G содержится окрестность вида $M(\omega)$. Значит, множества вида $M(\omega)$ образуют базу окрестностей e группы G .

Пусть B_1, B_2 – дизъюнктивные открыто-замкнутые подмножества $\beta\mathbb{Q}$. Тогда $C_i = B_i \cap \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$, – счетные плотные в себе метрические пространства. Они гомеоморфны (см., например, [9, упражнение 6.2.A.(d)]).

Этот гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма их стоун-чеховских бикompактификаций, совпадающих с их замыканиями B_i , $i = 1, 2$, в $\beta\mathbb{Q}$. Так как множества B_i , $i = 1, 2$, дизъюнктивны и открыто-замкнуты, существует гомеоморфизм $\beta\mathbb{Q}$ на себя, при котором B_1 отображается на B_2 , B_2 на B_1 , и являющийся тождественным на $\beta\mathbb{Q} \setminus (B_1 \cup B_2)$. Доказана следующая лемма.

ЛЕММА 8. *Для любых двух дизъюнктивных открыто-замкнутых подмножеств $B_i \in \beta\mathbb{Q}$, $i = 1, 2$, существует гомеоморфизм пространства $\beta\mathbb{Q}$, отображающий B_1 на B_2 , B_2 на B_1 и тождественный на дополнении до $B_1 \cup B_2$.*

Пусть $O \in N_G(e)$, $x \in \beta\mathbb{Q}$. По лемме 7 можно считать, что множество $O = M(\omega)$, $x \in V \in \omega$. Покажем, что множество Ox всюду плотно в открыто-замкнутом подмножестве V . Пусть W – произвольное открыто-замкнутое подмножество $\beta\mathbb{Q}$, $W \subset V$ и $x \notin W$ (иначе $ex = \text{id}(x) \in W$). Существует открыто-замкнутая окрестность W_x точки x такая, что $W_x \subset V$ и $W \cap W_x = \emptyset$. По лемме 8 существует гомеоморфизм h пространства $\beta\mathbb{Q}$ на себя такой, что $hW_x = h(W_x) = W$, $hW = h(W) = W_x$ и тождественный на $\beta\mathbb{Q} \setminus (W_x \cup W)$. Очевидно, что $h \in O$ и $hx = h(x) \in W$. Значит, $\text{cl}(Ox) = V$ и $x \in \text{int}(\text{cl}(Ox)) = V$. Отсюда следует, что все точки из $\beta\mathbb{Q}$ являются точками почти открытости действия.

Из следствия 3 вытекает, что у G -пространства $\mathbb{Q}$ существует единственное бикompактное G -расширение.

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – счетная всюду плотная подгруппа абелевой группы $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $I = [0, 1]$. Действие G на $X = I \times G$ определяется следующим образом: $g(x, t) = (x, gt)$. Легко проверить, что X – G -пространство и бикompакт $bX = I \times S^1$ с аналогично определенным действием является G -расширением X . Пополнение $\hat{G} = S^1$ и $S^1 b(X) = bX$, где $b: X \rightarrow bX$.

Покажем, что $\beta_G X = bX$. Пусть $\beta_G: X \rightarrow \beta_G X$, $f_{\beta_G b}: \beta_G X \rightarrow bX$. Тогда

$$f_{\beta_G b}(S^1 \cdot \beta_G(X)) = S^1 \cdot b(X) = bX$$

и по лемме 4 $f_{\beta_G b}|_{S^1 \cdot \beta_G(X)}$ является гомеоморфизмом. Значит, $\beta_G X = bX$ и bX – единственное бикомпактное G -расширение X . Для любой точки $(x, t) \in bX$ ее орбита $\{x\} \times S^1$ – слой произведения $I \times S^1$. Поэтому она нигде не плотна и $(\beta_G X)_{S^1} = \emptyset$.

Легко показать, что множество $Y = X \cup \{0\} \times S^1 \subset bX$ является инвариантным относительно действия группы G и $X \subset Y$. Имеем $|Y \setminus X| = \mathfrak{c}$, но $K_G(X) = K_G(Y)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мегрелишвили М. Г. Тихоновское G -пространство, не обладающее бикомпактным G -расширением и G -линеаризацией // УМН. 1988. Т. 43. № 2. С. 145–146.
- [2] Антонян С. А., Смирнов Ю. М. Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 3. С. 521–525.
- [3] Мегрелишвили М. Г. Эквивариантные пополнения и бикомпактные расширения // Сообщения АН ГССР. 1984. Т. 115. № 1. С. 21–24.
- [4] de Vries J. Equivariant embeddings of G -spaces // General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV. Part B. Prague, 1977. P. 485–493.
- [5] Smirnov J. M., Stoyanov L. N. On minimal equivariant compact extensions // Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences. 1983. V. 36. № 6. P. 733–736.
- [6] Palais R. The classification of G -spaces // Memoir. Amer. Math. Soc. 1960. V. 36. № 2. P. 1–72.
- [7] de Vries J. Topological transformation groups I // Math. Centre Tracts. № 65. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1975.
- [8] de Vries J. On the existence of G -compactifications // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1978. V. 26. № 3. P. 275–280.
- [9] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [10] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1983.
- [11] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
- [12] Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.
- [13] Мегрелишвили М. Г. Об эквивариантной нормальности // Сообщения АН ГССР. 1983. Т. 111. № 1. С. 17–19.
- [14] de Vries J. On the G -compactification of products // Pacif. J. Math. 1983. V. 110. № 1. P. 447–470.
- [15] Megrelishvili M. Equivariant completions // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1994. V. 35. № 3. P. 539–547.
- [16] de Vries J. Universal topological transformation groups // Gen. Topology and Appl. 1975. V. 5. № 2. P. 107–122.
- [17] de Vries J. G -spaces: compactifications and pseudocompactness // Proceedings of the Colloquium on Topology. Eger. (August 8–12). 1983. P. 655–666.
- [18] Chatyrko V. A., Kozlov K. L. The maximal G -compactifications of G -spaces with special actions // Proceedings of the 9th Prague Topological Symposium (Prague 2001). North Bay, ON: Topol. Atlas, 2002. P. 15–21.
- [19] Weil A. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. V. 551. Paris: Actualités Sci. Industr., 1938.
- [20] Arens R. Topologies for homeomorphism groups // Amer. J. Math. 1946. V. 68. № 4. P. 593–610.

(К. Л. Козлов) Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

(В. А. Чатырко) Университет г. Линчёпинг, Швеция

E-mail: kkozlov@mech.math.msu.su, vitja@mai.liu.se

Поступило

09.04.2004

Исправленный вариант

21.03.2005