Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Саакян, Сходимость двойных рядов Фурье после замены переменной, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 267–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:17:01

УДК 517.518

СХОДИМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОСЛЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

А. А. Саакян

В работе доказывается, что для любого компакта $\Omega \subset C(\mathbb{T}^2)$ существует гомеоморфизм τ отрезка $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ такой, что для произвольной функции $f \in \Omega$ ряд Фурье функции $F(x, y) = f(\tau(x), \tau(y))$ равномерно сходится на $C(\mathbb{T}^2)$ одновременно и по прямоугольникам, и по сферам, и по треугольникам.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть $C(\mathbb{T})$ (соответственно $C(\mathbb{T}^2)$) – пространство непрерывных, 2π -периодических (по каждой переменной) функций на $\mathbb{R}^1$ (соответственно $\mathbb{R}^2$). Для одномерных тригонометрических рядов Фурье хорошо известна (см. [1, с. 303])

ТЕОРЕМА А (Бор). Для $f \in C(\mathbb{T})$ существует гомеоморфизм $\tau(t)$ отрезка $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, т.е. непрерывная функция с условием

$$-\pi = \tau(-\pi) < \tau(t_1) < \tau(t_2) < \tau(\pi) = \pi, \quad \pi < t_1 < t_2 < \pi, \quad (1.1)$$

такая, что ряд Фурье суперпозиции $f \circ \tau(t)$ равномерно сходится на $\mathbb{T}$.

В работах [2], [3] были получены разные усиления этой теоремы. В частности, было доказано, что гомеоморфизм τ в теореме Бора можно построить единым для заданного компакта в $C(\mathbb{T})$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА В (Кахан, Кацнельсон [2]). Пусть

$$\omega \in C(0, \infty), \quad 0 = \omega(0) < \omega(\delta_1) < \omega(\delta_2) < \infty, \quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty. \quad (1.2)$$

Существует гомеоморфизм τ отрезка $\mathbb{T}$ такой, что для произвольной функции $f \in C(\mathbb{T})$ с модулем непрерывности $\omega(\delta, f) \leq \omega(\delta)$ ряд Фурье суперпозиции $f \circ \tau(t)$ равномерно сходится на $\mathbb{T}$.

Пусть $S_{n,m}(F, x, y)$ – прямоугольные частные суммы ряда Фурье интегрируемой на $\mathbb{T}^2$ функции F :

$$S_{n,m}(F, x, y) = \sum_{k=-n}^n \sum_{j=-m}^m c_{k,j}(F) e^{i(kx+jy)}, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$

где $c_{k,j}(F)$ – коэффициенты Фурье функции F :

$$c_{k,j}(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x,y) e^{-i(kx+jy)} dx dy, \quad k, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Напомним, что сходимость ряда Фурье функции F по прямоугольникам (по Прингсхейму) означает сходимость прямоугольных частных сумм при $n, m \rightarrow \infty$.

Для $F \in C(\mathbb{T}^2)$ обозначим

$$\omega(\delta, F) = \sup_{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 \leq \delta^2} |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)|, \quad 0 < \delta < \infty.$$

Теорема Кахана и Кацнельсона была обобщена нами на двумерный случай для сходимости по Прингсхейму:

ТЕОРЕМА С (Саакян [4]). *Для произвольной функции $\omega(\delta)$ с условиями (1.2) существует гомеоморфизм $\tau(t)$ отрезка T такой, что ряд Фурье произвольной функции F вида*

$$F(x, y) = f(\tau(x), \tau(y)), \quad f \in C(\mathbb{T}^2), \quad \omega(\delta, f) \leq \omega(\delta) \quad (1.3)$$

равномерно сходится по Прингсхейму на квадрате $\mathbb{T}^2$.

Более того, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\|S_{n,m}(F) - F\|_C \leq \varepsilon \quad \text{при } n, m > N \quad (1.4)$$

для всех функций F вида (1.3).

Как известно, сходимость кратных рядов можно определить разными способами. В настоящей работе мы изучим возможность распространения этой теоремы на другие способы сходимости. Для двойного числового ряда

$$\sum_{k,j=-\infty}^{\infty} a_{k,j} \quad (1.5)$$

положим

$$\begin{aligned} S_{n,m} &= \sum_{k=-n}^n \sum_{j=-m}^m a_{k,j}, \quad n, m = 0, 1, \dots, \\ S_R &= \sum_{k^2+j^2 \leq R^2} a_{k,j}, \quad R \geq 0, \\ S_n^t &= \sum_{|k|+|j| \leq n} a_{k,j}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} S_{n,m} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,n} = a, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} S_R = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^t = a,$$

то говорят, что ряд (1.5) сходится к a по прямоугольникам (по Прингсхейму), по квадратам, по сферам, по треугольникам соответственно.

В работах Арутюняна [5] и Дьяченко [6] были введены понятия u -сходимости и $u(K)$ -сходимости кратных рядов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что конечное множество $U \subset \mathbb{Z}^2$ принадлежит классу A_3 , если вместе с произвольной точкой $(k, j) \in U$ множеству U принадлежат также все целочисленные точки прямоугольника

$$[-|k|, |k|] \times [-|j|, |j|].$$

Если, кроме того, при фиксированном $K > 1$ из условий $(0, N) \in U$, $(M, 0) \in U$ следует, что множества

$$\{(k, j) \in \mathbb{Z}^2 : K|k| + |j| \leq N\}, \quad \{(k, j) \in \mathbb{Z}^2 : |k| + K|j| \leq M\}$$

лежат в U , то говорят, что U принадлежит классу $A_3(K)$.

Заметим, что если $U \in u(K)$, то $N(U)/n(U) \leq 2K$, где

$$\begin{aligned} N(U) &:= \min\{n : [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2 \supseteq U\}, \\ n(U) &:= \max\{n : [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq U\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что ряд (1.5) *u-сходится* (соответственно *u(K)-сходится*) к a , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что

$$\left| \sum_{(k,j) \in U} a_{k,j} - a \right| < \varepsilon$$

для любого $U \in A_3$ (соответственно $U \in A_3(K)$) с $n(U) > N$.

Ясно, что из $u(K)$ -сходимости ряда следует ее сходимость и по квадратам, и по сферам, и по треугольникам, но не следует сходимость по Прингсгейму.

Для конечного множества $U \subset \mathbb{Z}^2$ обозначим

$$S_U(F, x, y) = \sum_{(k,j) \in U} c_{k,j}(F) e^{i(kx+jy)}.$$

Основным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. Для произвольной функции $\omega(\delta)$ с условиями (1.2) существует гомеоморфизм $\tau(t)$ отрезка $\mathbb{T}$ такой, что ряд Фурье произвольной функции F вида (1.3) $u(K)$ -сходится для любого $K > 1$ и сходится по Прингсгейму равномерно на квадрате $\mathbb{T}^2$.

Более того, для произвольных $\varepsilon > 0$ и $K > 1$ существует номер N такой, что имеет место (1.4) и

$$\|S_U(F) - F\|_C \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad n(U) > N, \quad U \in A_3(K), \quad (1.7)$$

для всех функций F вида (1.3).

Нам понадобится ряд обозначений. Для функции $f \in C(\mathbb{T})$ и интервала $\Delta = (a, b)$ обозначим

$$f(\Delta) = f(b) - f(a), \quad f^*(\Delta) = \sup_{a \leq x < y \leq b} |f(x) - f(y)|.$$

Обозначим также

$$\Delta_k^1(x, h) = (x + (k-1)h, x + kh), \quad \Delta_k^{-1}(x, h) = (x - kh, x - (k-1)h),$$

где $x \in \mathbb{T}$, $h \in (0, \pi)$, $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь произвольную последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ с условиями

$$1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} = \infty \quad (1.8)$$

и обозначим

$$\begin{aligned} \Lambda V_h^\gamma(f, x) &:= \sum_{k=1}^{[\pi/h]} \frac{f^*(\Delta_k^\gamma(x, h))}{\lambda_k}, \quad x \in \mathbb{T}, \quad h \in (0, \pi), \quad \gamma = \pm 1, \\ \Lambda V_h(f) &:= \sup_{x \in \mathbb{T}, \gamma = \pm 1} \Lambda V_h^\gamma(f, x), \quad h \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Пусть теперь $F(x, y) \in C(\mathbb{T}^2)$. Для интервалов $\Delta_1 = (a_1, a_2)$ и $\Delta_2 = (b_1, b_2)$ положим

$$\begin{aligned} F(\Delta_1, \Delta_2) &:= F(a_1, b_1) + F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1), \\ F^*(\Delta_1, \Delta_2) &:= \sup |F(I, J)|, \end{aligned}$$

где $\sup$ берется по всем интервалам $I \subset \Delta_1$ и $J \subset \Delta_2$.

Для $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, $h \in (0, \pi)$, $\gamma_1, \gamma_2 = \pm 1$ определим величину

$$\Lambda V_h^{\gamma_1, \gamma_2}(F, x, y) := \sum_{k, j=1}^{[\pi/h]} \frac{F^*(\Delta_k^{\gamma_1}(x, h), \Delta_j^{\gamma_2}(y, h))}{\lambda_k \lambda_j}$$

и положим

$$\Lambda V_h(F) := \sup \Lambda V_h^{\gamma_1, \gamma_2}(F, x, y) + \sup \Lambda V_h^{\gamma_1}(F(\cdot, y), x) + \sup \Lambda V_h^{\gamma_2}(F(x, \cdot), y), \quad (1.9)$$

где $\sup$ берется по $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, $\gamma_1, \gamma_2 = \pm 1$.

Всюду ниже через C мы обозначаем абсолютные константы, которые могут быть разные в разных формулах.

Следующий признак равномерной $u(K)$ -сходимости двойных рядов Фурье, имеющий самостоятельный интерес, играет важную роль в доказательстве теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda_k = \sqrt{k}/\sqrt{\ln(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$. Если $F \in C(\mathbb{T}^2)$ и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Lambda V_h(F) = 0, \quad (1.10)$$

то ряд Фурье функции F равномерно $u(K)$ -сходится на $\mathbb{T}^2$ для любого $K > 1$.

Более того, имеет место оценка

$$\|S_U(F) - F\|_C \leq CK \{\Lambda V_{h(U)}(F) + \omega(h(U), F)\}, \quad h(U) = \frac{\pi}{n(U)}, \quad (1.11)$$

для любого множества $U \in u(K)$, $K > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Этот признак можно считать некоторым аналогом хорошо известного признака Салема. Для двойных рядов аналог признака Салема для равномерной сходимости по Прингсхейму был доказан Голубовым в [7]. Для прямоугольных частных сумм оценка, аналогичная (1.11) (с $\lambda_k \equiv k$), была доказана нами в [4].

Легко видеть, что $\omega(h, F) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно по множеству функций F вида (1.3). Это означает, что теорема 1 вытекает из теоремы 2 и из следующей леммы (см. также замечание 2).

ЛЕММА 1. Для произвольной последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ вида (1.8) и любой функции $\omega(\delta)$ вида (1.2) существует гомеоморфизм $\tau(t)$ отрезка $\mathbb{T}$ такой, что имеет место (1.10) равномерно по множеству функций F вида (1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичная лемма была доказана нами для последовательности $\lambda_k \equiv k$ и для величины $V_h(F)$, которая соответствует прямоугольным частичным суммам ряда Фурье (см. подробнее [4, лемма 5]). Нетрудно убедиться, что гомеоморфизм τ , построенный в доказательстве леммы 1, удовлетворяет также требованиям леммы 5 из работы [4].

Отметим, что величина $\Lambda V_h(F)$ имеет много общего с так называемой Λ -вариацией функции F , которая определяется следующим образом:

$$\Lambda V(F) = \sup \sum_{k,j} \frac{|F(I_k, \Delta_j)|}{\lambda_k \lambda_j} + \sup \sum_k \frac{|F(I_k, 0)|}{\lambda_k} + \sup \sum_j \frac{|F(0, \Delta_j)|}{\lambda_j},$$

где $\sup$ берется по всевозможным парам систем $\{I_k\}$ и $\{\Delta_j\}$ непересекающихся интервалов из $\mathbb{T}$. Класс измеримых на $\mathbb{T}^2$ функций F с ограниченной Λ -вариацией обозначают через $\Lambda BV(\mathbb{T}^2)$ (класс Ватермана). Свойства рядов Фурье функций из классов $\Lambda BV(\mathbb{T}^2)$ изучались во многих работах. Было доказано, в частности, что ряд Фурье функции $F \in C(\mathbb{T}^2)$:

- 1) (Саакян [8]) равномерно сходится по Прингсхейму, если $F \in \Lambda BV(\mathbb{T}^2)$ с $\lambda_k \equiv k$,
- 2) (Дьяченко [9]) равномерно сходится по сферам, если $F \in \Lambda BV(\mathbb{T}^2)$ с $\lambda_k = o(\sqrt{k})$,
- 3) (Дьяченко [6]) равномерно $u(K)$ -сходится для любого $K > 1$, если $F \in \Lambda BV(\mathbb{T}^2)$ с

$$\lambda_k = o\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\ln(k+1)}}\right). \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нетрудно проверить, что если последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ удовлетворяет условию (1.12), то из $F \in C(\mathbb{T}^2) \cap \Lambda BV(\mathbb{T}^2)$ следует, что F удовлетворяет условиям теоремы 2. Это означает, что теорема 2 усиливает вышеупомянутый результат Дьяченко (см. 3)). Для нас это усиление существенно, так как для доказательства теоремы 1 мы не можем воспользоваться результатом Дьяченко вместо теоремы 2: очевидно, что Λ -вариация функции инвариантна относительно гомеоморфизмов вида (1.3), и в лемме 1 условие (1.10) нельзя заменить на ограниченность Λ -вариации функции F .

В то же время следует отметить, что оценки и рассуждения, необходимые для получения (1.11), в основном содержатся в работе [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в приведенном ниже доказательстве теоремы 2 вместо оценок (2.2)–(2.5) воспользоваться соответствующими оценками для сферических ядер, полученными Дьяченко в работе [9] (см. лемму 5 и следствия 2 и 3), можно доказать, что для сходимости по сферам теорема 2 верна с $\lambda_k \equiv \sqrt{k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 2 перестает быть верной для последовательности вида $\Lambda_\alpha = \{\lambda_k = \sqrt{k}(\ln(k+1))^\alpha\}$ при $\alpha > 0$. Это вытекает из одного результата Бахвалова, согласно которому для любого $\alpha > 0$ существует функция $F \in \Lambda_\alpha BV(\mathbb{T}^2)$, треугольные частные суммы которой не ограничены равномерно (см. [10]).

2. Доказательства. Для произвольного конечного множества $U \subset \mathbb{Z}^2$ и интегрируемой функции F имеем

$$S_U(F, x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} F(x+t, y+s) D_U(t, s) dt ds, \quad (2.1)$$

где $D_U(t, s)$ – ядро Дирихле:

$$D_U(t, s) = \sum_{(m,n) \in U} e^{-i(mt+ns)}.$$

ЛЕММА 2 (Дьяченко [6]). Для любого множества $U \in A_3(K)$, $K > 1$, и для всех $x, y \in [0, \pi]$ справедливы следующие оценки:

$$|D_U(x, y)| \leq CK \frac{n^2(U)}{\sqrt{n(U)x+1} \sqrt{n(U)y+1}}, \quad (2.2)$$

$$\left| \int_x^\pi D_U(t, y) dt \right| \leq CK \frac{n(U) \sqrt{\ln(n(U)x+2)} \sqrt{\ln(n(U)y+2)}}{\sqrt{n(U)x+1} \sqrt{n(U)y+1}}, \quad (2.3)$$

$$\left| \int_y^\pi D_U(x, s) ds \right| \leq CK \frac{n(U) \sqrt{\ln(n(U)x+2)} \sqrt{\ln(n(U)y+2)}}{\sqrt{n(U)x+1} \sqrt{n(U)y+1}}, \quad (2.4)$$

$$\left| \int_x^\pi \int_y^\pi D_U(t, s) dt ds \right| \leq CK \frac{\sqrt{\ln(n(U)x+2)} \sqrt{\ln(n(U)y+2)}}{\sqrt{n(U)x+1} \sqrt{n(U)y+1}}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Достаточно доказать, что существует абсолютная постоянная C такая, что для любого множества $U \in u(K)$ и для произвольной точки $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ имеет место неравенство

$$|S_U(F, x, y) - F(x, y)| \leq CK \{ \Lambda V_{h(U)}(F) + \omega(h(U), F) \}. \quad (2.6)$$

Без ограничения общности можем считать, что $x = y = 0$. Обозначим

$$S_U^i(F, 0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int_{Q_i} F(t, s) D_U(t, s) dt ds,$$

где $Q_1 = [0, \pi]^2$, $Q_2 = [-\pi, 0] \times [0, \pi]$, $Q_3 = [-\pi, 0]^2$, $Q_4 = [0, \pi] \times [-\pi, 0]$. Согласно (2.1) имеем

$$S_U(F, 0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} F(t, s) D_U(t, s) dt ds = \sum_{i=1}^4 S_U^i(F, 0, 0).$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{Q_i} D_U(t, s) dt ds = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
 S_U(F, 0, 0) - F(0, 0) &= \sum_{i=1}^4 \left[S_U^i(F, 0, 0) - \frac{1}{4} F(0, 0) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\pi^2} \int_{Q_i} [F(t, s) - F(0, 0)] D_U(t, s) dt ds \\
 &=: \sum_{i=1}^4 J_U^i(F).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Оценим величину $J_U^1(F)$. Пусть $n = n(U)$ и $t_k = \pi k/n$, $k = 0, 1, \dots, n$. Рассмотрим интервалы

$$\Delta_k = (t_{k-1}, t_k), \quad \Delta_{k,j} = \Delta_k \times \Delta_j, \quad k, j = 1, 2, \dots, n,$$

и определим функцию

$$g(x, y) = \sum_{k,j=1}^n F(x_k, y_j) \chi_{\Delta_{k,j}}(x, y), \quad g(0, 0) = F(0, 0),$$

где $x_k = y_k = t_k$, а χ_E — характеристическая функция множества E . Сначала мы оценим величину

$$\begin{aligned}
 \pi^2 J_U^1(g) &= \sum_{k,j=1}^n F(t_k, s_j) \int_{\Delta_{k,j}} D_U(t, s) dt ds - g(0, 0) \int_0^\pi \int_0^\pi D_U(x, y) dt ds \\
 &= \sum_{k,j=2}^n F(\Delta_k, \Delta_j) \int_{x_{k-1}}^\pi \int_{y_{j-1}}^\pi D_U(t, s) dt ds \\
 &\quad + \sum_{k=2}^n (F(x_k, y_1) - F(x_{k-1}, y_1)) \int_0^\pi \int_{x_{k-1}}^\pi D_U(t, s) dt ds \\
 &\quad + \sum_{j=2}^n (F(x_1, y_j) - F(x_1, y_{j-1})) \int_{y_{j-1}}^\pi \int_0^\pi D_U(t, s) dt ds \\
 &\quad + (F(x_1, y_1) - F(0, 0)) \int_0^\pi \int_0^\pi D_U(t, s) dt ds \\
 &=: F_1 + F_2 + F_3 + F_4.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Применив оценку (2.5), получим

$$|F_1| \leq CK \sum_{k,j=2}^n \frac{F(\Delta_k, \Delta_j) \sqrt{\ln(k+1)} \sqrt{\ln(j+1)}}{\sqrt{k} \sqrt{j}} \leq CK \cdot \Lambda V_{h(U)}(F), \tag{2.9}$$

$$|F_2| \leq CK \sum_{k=2}^n \frac{|F(x_k, y_1) - F(x_{k-1}, y_1)| \sqrt{\ln(k+1)}}{\sqrt{k}} \leq CK \cdot \Lambda V_{h(U)}(F). \tag{2.10}$$

Аналогичным образом находим, что

$$|F_3| \leq CK \cdot \Lambda V_h(U)(F), \quad (2.11)$$

и наконец,

$$|F_4| \leq C\omega(h(U), F). \quad (2.12)$$

Из (2.8)–(2.12) следует, что

$$J_U^1(g) \leq CK\{\Lambda V_{h(U)}(F) + \omega(h(U), F)\}. \quad (2.13)$$

Теперь мы оценим величину

$$\begin{aligned} \pi^2 J_U^1(F - g) &= \sum_{k,j=1}^n \int_{\Delta_{k,j}} (F(t, s) - F(x_k, y_j)) D_U(t, s) dt ds \\ &= \sum_{k,j=1}^n \int_{\Delta_{k,j}} F((t, x_k), (s, y_j)) D_U(t, s) dt ds \\ &\quad + \sum_{k,j=1}^n \int_{\Delta_{k,j}} (F(x_k, s) - F(x_k, y_j)) D_U(t, s) dt ds \\ &\quad + \sum_{k,j=1}^n \int_{\Delta_{k,j}} (F(t, y_j) - F(x_k, y_j)) D_U(t, s) dt ds \\ &= G_1 + G_2 + G_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Величину G_1 оценим с помощью (2.2):

$$|G_1| \leq CKn^2 \sum_{k,j=1}^n \frac{F^*(\Delta_k, \Delta_j)}{\sqrt{k}\sqrt{j}} \int_{\Delta_{k,j}} dt ds \leq CK \cdot \Lambda V_{h(U)}(F). \quad (2.15)$$

Для оценки G_2 применим преобразование Абеля и воспользуемся неравенством (2.3):

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^n \int_{\Delta_j} F((x_{k-1}, x_k), (s, y_j)) \int_{x_{k-1}}^{\pi} D_U(t, s) dt ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j} (F(x_1, s) - F(x_1, y_j)) \int_0^{\pi} D_U(t, s) dt ds \\ &\leq CKn \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^n \frac{F^*(\Delta_k, \Delta_j) \sqrt{\ln(k+1)} \sqrt{\ln(j+1)}}{\sqrt{k}\sqrt{j}} \int_{\Delta_j} ds \\ &\quad + CKn \sum_{j=1}^n F^*(x_1, \Delta_j) \frac{\sqrt{\ln(j+1)}}{\sqrt{j}} \int_{\Delta_j} ds \leq CK \cdot \Lambda V_{h(U)}(F). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Аналогичным образом можем убедиться, что $G_3 \leq CK \cdot \Lambda V_n(F)$. Отсюда и из (2.14)–(2.16) получим $J_U^1(F - g) \leq CK \cdot \Lambda V_n(F)$, что вместе с (2.13) доказывает неравенство

$$J_U^i(F) \leq CK\{\Lambda V_{h(U)}(F) + \omega(h(U), F)\} \quad (2.17)$$

при $i = 1$. При $i = 2, 3, 4$ оно доказывается аналогично. Из (2.7) и (2.17) получаем оценку (2.6) для $x = y = 0$. Нетрудно проследить, что полученная постоянная C не зависит от выбора точки (x, y) и оценка (2.7) имеет место равномерно по $(x, y) \in \mathbb{T}^2$. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Индукцией по $n = 1, 2, \dots$ построим убывающую последовательность $\{\varepsilon_n\}$ так, чтобы

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \alpha(n) := \frac{\varepsilon_{n-1}}{4\varepsilon_n} > 1, \quad \lambda_{\alpha(n)} > 16^n, \quad n = 2, 3, \dots; \quad (2.18)$$

затем выберем последовательность $\{\delta_n\}$ так, чтобы

$$0 < 4\delta_{n+1} < \delta_n < 1, \quad \omega(\delta_n) \leq 4^{-n}\varepsilon_{n+1}^2. \quad (2.19)$$

Индукцией по $n = 0, 1, \dots$ построим множества

$$T_n = \{t_n^i\}_{i=0}^{4^n}, \quad A_n = \{a_n^i\}_{i=0}^{4^n}.$$

Положим $t_0^0 = a_0^0 = -\pi$, $t_0^1 = a_0^1 = \pi$ и, предположив, что T_{n-1} и A_{n-1} уже построены, положим

$$\begin{aligned} t_n^{4^i} &= t_{n-1}^i, & a_n^{4^i} &= a_{n-1}^i, & i &= 0, \dots, 4^{n-1}, \\ t_n^{4^i-1} &= t_{n-1}^i - \varepsilon_n, & a_n^{4^i-1} &= \frac{1}{2}(a_{n-1}^{i-1} + a_{n-1}^i) + \delta_n, & i &= 1, \dots, 4^{n-1}, \\ t_n^{4^i-2} &= \frac{1}{2}(t_{n-1}^{i-1} + t_{n-1}^i), & a_n^{4^i-2} &= \frac{1}{2}(a_{n-1}^{i-1} + a_{n-1}^i), & i &= 1, \dots, 4^{n-1}, \\ t_n^{4^i-3} &= \frac{1}{2}(t_{n-1}^{i-1} + t_{n-1}^i) - \varepsilon_n, & a_n^{4^i-3} &= a_{n-1}^{i-1} + \delta_n, & i &= 1, \dots, 4^{n-1}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что множества T_n и A_n разбивают отрезок $\mathbb{T}$ на интервалы

$$d_n^i = (t_n^{i-1}, t_n^i), \quad \rho_n^i = (a_n^{i-1}, a_n^i), \quad i = 1, \dots, 4^n,$$

длины которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} |d_n^{2^i}| &= \varepsilon_n, \quad \frac{\varepsilon_{n-1}}{4} \leq |d_n^{2^i-1}| \leq 2^{-n}, \\ |\rho_n^{2^i}| &\leq 2^{-n}, \quad |\rho_n^{2^i-1}| = \delta_n, \quad i = 1, \dots, 4^{n-1/2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Положим

$$\tau(t_n^i) = a_n^i, \quad i = 0, \dots, 4^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Из (2.20) следует, что функция τ определена и возрастает на объединении множеств T_n , которое всюду плотно в $\mathbb{T}$. Так как множество ее значений также всюду плотно в $\mathbb{T}$, мы можем продолжить ее на $\mathbb{T}$ и получить непрерывную функцию вида (1.1). Ясно, что при этом будем иметь

$$\tau(d_n^i) = \rho_n^i, \quad i = 1, \dots, 4^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.21)$$

Допустим теперь, что $F(x, y) = f(\tau(x), \tau(y))$, $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $\omega(\delta, f) \leq \omega(\delta)$, и докажем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Lambda V_h(F) = 0. \quad (2.22)$$

Фиксируем $h \in (0, \pi)$ и оценим $\Lambda V_h(F)$. Выберем n так, чтобы

$$\varepsilon_{n+1} < h \leq \varepsilon_n. \quad (2.23)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (1.9) при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ (остальные случаи рассматриваются аналогично):

$$\Lambda V_h^{1,1}(F, x, y) = \sum_{k, j \in \Omega(h)} \frac{|F^*(I_k, \Delta_j)|}{\lambda_k \lambda_j}, \quad I_k = \Delta_k^1(x, h), \quad \Delta_j = \Delta_j^1(y, h),$$

где

$$\Omega(h) := \left\{ 1, \dots, \left\lceil \frac{\pi}{h} \right\rceil \right\}, \quad \#\Omega(h) \leq \frac{\pi}{\varepsilon_{n+1}}$$

(здесь и в дальнейшем $\#E$ – количество элементов конечного множества E). Положим

$$\begin{aligned} \Omega_1(x) &= \{k \in \Omega(h) : I_k \subset d_n^{2i-1} \text{ или } I_k \subset d_{n+1}^{2i-1} \text{ при некотором } i\}, \\ \Omega_2(x) &= \left\{ k \in \Omega(h) \setminus \Omega_1(x) : \text{dist}(I_k, x) > \frac{1}{4}\varepsilon_{n-1} \right\}, \\ \Omega_3(x) &= (\Omega(h) \setminus \Omega_1(x)) \setminus \Omega_2(x). \end{aligned}$$

Аналогичным образом (с Δ_k вместо I_k и y вместо x) определяются множества $\Omega_1(y)$, $\Omega_2(y)$, $\Omega_3(y)$. Из (2.20) и (2.21) следует, что

$$|F^*(I_k, \Delta_j)| \leq \begin{cases} 2\omega(\delta_n) & \text{при } k \in \Omega_1(x) \text{ или } j \in \Omega_1(y), \\ 4\omega(2^{-n}) & \text{при } k, j \in \Omega(h). \end{cases} \quad (2.24)$$

Нетрудно убедиться, что множество $\{I_k : k \notin \Omega_1(x)\}$ (соответственно множество $\{\Delta_j : j \notin \Omega_1(y)\}$) состоит из тех интервалов I_k (соответственно Δ_j), которые пересекаются с одним из интервалов d_n^{2i} ; при этом с каждым из интервалов d_n^{2i} пересекаются не более пяти интервалов (так как $|I_k| = h > \varepsilon_{n+1} = |d_{n+1}^{2l}|$, то по два интервала I_k могут пересекаться с d_{n+1}^{8i-2} и d_{n+1}^{8i} и один может содержать внутри себя левый конец интервала d_n^{2i} , т.е. точку t_n^{2i-1}). Учитывая также, что в множество $\Omega_3(x)$ (соответственно множество $\Omega_3(y)$) входят те интервалы, которые пересекаются с ближайшим к x (соответственно к y) интервалом d_n^{2i} , будем иметь, что

$$\#\Omega_2(x) \leq 5 \cdot 4^n, \quad \#\Omega_2(y) \leq 5 \cdot 4^n, \quad \#\Omega_3(x) \leq 5, \quad \#\Omega_3(y) \leq 5. \quad (2.25)$$

Для оценки величины $\Lambda V_h^{1,1}(F, x, y)$ разобьем ее на суммы следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda V_h^{1,1}(F, x, y) &= \sum_{k \in \Omega_1(x), j \in \Omega(h)} + \sum_{k \in \Omega_2(x) \cup \Omega_3(x), j \in \Omega_1(y)} + \sum_{k \in \Omega_2(x), j \in \Omega_2(x) \cup \Omega_3(y)} \\ &+ \sum_{k \in \Omega_3(x), j \in \Omega_2(y)} + \sum_{k \in \Omega_3(x), j \in \Omega_3(y)} =: A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5. \end{aligned}$$

Из (2.19), (2.23)–(2.25) получим

$$A_1 + A_2 \leq C\omega(\delta_n)(\#\Omega_1(h))(\#\Omega(h)) \leq C\omega(\delta_n) \frac{1}{\varepsilon_{n+1}^2} \leq C4^{-n}.$$

Далее, в силу (2.23) будем иметь, что

$$k > \alpha(n) \quad \text{при } k \in \Omega_2(x), \quad j > \alpha(n) \quad \text{при } j \in \Omega_2(y).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_3 &\leq C\omega(2^{-n}) \frac{1}{\lambda_{\alpha(n)}} (\#\Omega_2(x)) (\#\Omega_2(y) \cup \Omega_3(y)) \\ &\leq C16^{-n}\omega(2^{-n})16^n \leq C\omega(2^{-n}), \\ A_4 &\leq 5\omega(2^{-n}) \frac{1}{\lambda_{\alpha(n)}} (\#\Omega_2(y)) \leq C\omega(2^{-n})16^{-n}4^n \leq C\omega((2^{-n})). \end{aligned}$$

Наконец, в силу (2.24) и (2.25) имеем $A_5 \leq 25\omega(2^{-n})$. Из этих оценок находим, что

$$\Lambda V_h^{1,1}(F, x, y) \leq C(4^{-n} + \omega(2^{-n})), \quad \text{если } \varepsilon_{n+1} < h \leq \varepsilon_n.$$

Оценивая аналогичным образом остальные два слагаемых в правой части (1.9), получим, что

$$\Lambda V_h(F) \leq C(4^{-n} + \omega(2^{-n})), \quad \text{если } \varepsilon_{n+1} < h \leq \varepsilon_n.$$

Так как $n \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$, отсюда вытекает (2.22) (равномерно по F вида (1.3)). Лемма 1 доказана.

Как было отмечено выше, теорема 1 вытекает непосредственно из теоремы 2 и леммы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Kahane J.-P., Katznelson Y. *Séries de Fourier des fonctions bornées* // Stud. Pure Math. à la Mémoire de P. Turan. Budapest: Acad. Kiado, 1983. P. 395–410.
- [3] Саакян А. А. О свойствах коэффициентов Фурье суперпозиции функций // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 2. С. 302–306.
- [4] Саакян А. А. О теореме Бора для кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 913–924.
- [5] Арутюнян Ф. Г. Представление функций кратными рядами // Докл. АН АрмССР. 1977. Т. 64. № 2. С. 72–76.
- [6] Дьяченко М. И. Двумерные классы Ватермана и u -сходимость рядов Фурье // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 7. С. 955–972.
- [7] Голубов Б. И. Двойные ряды Фурье и функции ограниченной вариации // Изв. вузов. Сер. матем. 1972. № 12(127). С. 55–68.
- [8] Саакян А. А. О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1986. Т. 21. № 6. С. 517–529.
- [9] Dyachenko M. I. Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series // Analysis Math. 1995. V. 21. № 1. P. 3–21.
- [10] Бахвалов А. Н. Классы Ватермана и треугольные частичные суммы двойных рядов Фурье // Analysis Math. 2001. Т. 27. № 1. С. 3–36.

Институт математики НАН Армении
E-mail: sart@instmath.sci.am

Поступило
08.04.2002
Исправленный вариант
17.10.2002