Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. К. Демьянович, Вложенные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковое разложение, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 5, 658–675

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2630>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:59:19

УДК 518

ВЛОЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ И ИХ ВСПЛЕСКОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Ю. К. Демьянович

С каждой бесконечной сеткой $X : \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots$ связываются система тригонометрических сплайнов $\{\mathfrak{T}_j^B\}$ класса $C^1(\alpha, \beta)$, линейное пространство $\mathcal{T}^B(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{u} \mid \tilde{u} = \sum_j c_j \mathfrak{T}_j^B \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$, функционалы $g^{(i)} \in (C^1(\alpha, \beta))^*$ со свойством биортогональности: $\langle g^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = \delta_{i,j}$ (здесь $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow -\infty} x_j$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow +\infty} x_j$). Для вложенных сеток $\overline{X} \subset X$ устанавливается вложенность соответствующих пространств $\mathcal{T}^B(\overline{X}) \subset \mathcal{T}^B(X)$ и выводятся формулы декомпозиции и реконструкции для сплайн-всплескового разложения $\mathcal{T}^B(X) = \mathcal{T}^B(\overline{X}) \dot{+} W$, полученного с помощью системы упомянутых функционалов.

Библиография: 7 названий.

Известно, что на двукратно измельчающейся сетке B -сплайны образуют систему вложенных пространств, на основе которой строятся сплайн-всплесковые разложения (см. [1]–[5]). Применение неравномерной сетки позволяет улучшить приближение функций без усложнения вычислений, а для этого могут понадобиться различные степени измельчения сетки в разных частях рассматриваемого промежутка. Таким образом, рассмотрение сплайн-всплесковых разложений при произвольном измельчении сетки актуально.

Цель данной работы – получить системы вложенных пространств тригонометрических сплайнов, дать их вейвлетное разложение и вывести соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции при произвольном способе измельчения сетки.

Для построения многосеточных методов решения эллиптических задач (см. [6]) и для всплесковых разложений при обработке сигналов (см. [1]) удобны вложенные линейные пространства V_j , лежащие в том или ином функциональном пространстве: $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$. При этом строится (явно или неявно) прямое разложение $V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j$, приводящее к представлению $\bigcup_{j=0}^{+\infty} V_j = V_0 \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \dots$. Эти построения в $L_2(\mathbb{R}^1)$ (через $\mathbb{R}^1$ обозначаем вещественную ось) часто связывают с двукратным измельчением равномерной сетки в $\mathbb{R}^1$, с задачей отыскания функции $\varphi(t)$ из уравнения $\varphi(t) = \sum_j c_j \varphi(2t - j)$ (называемого масштабирующим) и с задачей построения ортогонального разложения $V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$; при решении этих задач используется преобразование Фурье (см. [1], [2]). Применение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 04-01-00692 и № 04-01-00026.

неравномерных сеток позволяет улучшить приближение функций без усложнения вычислений, но для построения сплайн-всплескового разложения масштабирующее уравнение и преобразование Фурье оказываются недостаточными. Первое заменяется соотношением $\varphi_{i(s)}(t) = \sum_j d_{i,j}^{(s)} \varphi_{j(s+1)}(t)$ (называемым калибровочным соотношением) между функциями $\varphi_{i(s)} \in V_s$, а вместо второго используется биортогональная (к системе функций $\{\varphi_{j(s+1)}\}$) система функционалов. В случае пространств B -сплайнов на последовательности неравномерных двукратно измельчающихся (произвольным образом) сеток калибровочные соотношения получаются с помощью специального дробно-рационального тождества (см. [4]), а упомянутое ортогональное разложение заменяется прямым разложением с использованием простого продолжения биортогональной системы функционалов (см. [5]). Однако для дальнейшего улучшения приближения функций (например, функций с особенностью) даже произвольное двукратное измельчение сетки недостаточно: важно иметь возможность добавлять произвольное (конечное) число новых узлов между любой парой соседних узлов исходной сетки.

В данной работе с бесконечной (вообще говоря неравномерной) сеткой X на открытом интервале (α, β) вещественной оси связываются система тригонометрических сплайнов $\{\mathfrak{T}_j^B\}$ класса $C^1(\alpha, \beta)$, линейное пространство $\mathcal{T}^B(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{u} \mid \tilde{u} = \sum_j c_j \mathfrak{T}_j^B \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$ и система функционалов, биортогональная системе $\{\mathfrak{T}_j^B\}$. Сначала рассматривается сетка $\overline{X}_1$, которая получена из исходной сетки X удалением одного узла, и устанавливаются вложенность соответствующих пространств $\mathcal{T}^B(\overline{X}_1) \subset \mathcal{T}^B(X)$, а также выводятся формулы декомпозиции и реконструкции для сплайн-всплескового разложения $\mathcal{T}^B(X) = \mathcal{T}^B(\overline{X}_1) \dot{+} W$. Отсюда получается вложенность пространств $\mathcal{T}^B(\overline{X}) \subset \mathcal{T}^B(X)$ и в том случае, когда сетка X получена добавлением конечного числа новых узлов между любыми соседними узлами исходной сетки $\overline{X}$, а упомянутая выше биортогональная система функционалов приводит к алгоритмам построения калибровочных соотношений и формул декомпозиции/реконструкции соответствующего сплайн-всплескового разложения.

Работа состоит из восьми пунктов. В первом, во втором и в третьем пунктах вводятся необходимые обозначения для сеток, рассматриваемых тригонометрических сплайнов и биортогональных систем. В четвертом пункте устанавливаются две вспомогательные леммы, а в пятом строятся калибровочные соотношения. Остальные пункты посвящены сплайн-всплесковому разложению и соответствующим формулам декомпозиции и реконструкции.

1. Некоторые обозначения. На конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad X : \cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots, \quad (1.1)$$

$$\text{где } \alpha = \lim_{j \rightarrow -\infty} x_j, \quad \beta = \lim_{j \rightarrow +\infty} x_j, \quad x_{j+1} - x_j < \frac{\pi}{2} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

а $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел. Символом $C^1(\alpha, \beta)$ обозначим линейное пространство функций, непрерывно дифференцируемых в точках открытого интервала (α, β) .

Рассмотрим тригонометрические сплайны вида

$$\mathfrak{T}_j^B(t) = \sin^2(t - x_j) \sin^{-1}(x_{j+2} - x_j) \sin^{-1}(x_{j+1} - x_j) \quad \text{для } t \in [x_j, x_{j+1}], \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_j^B(t) = & \frac{1}{2} [\sin(x_{j+2} + x_{j+3} - 2t) \cos(x_{j+1} - x_j) + \sin(2t - x_j - x_{j+1}) \\ & \times \cos(x_{j+3} - x_{j+2}) + \sin(x_{j+1} + x_j - x_{j+2} - x_{j+3})] \sin^{-1}(x_{j+2} - x_{j+1}) \\ & \times \sin^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1}) \sin^{-1}(x_{j+2} - x_j) \quad \text{для } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}], \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\mathfrak{T}_j^B(t) = \sin^2(t - x_{j+3}) \sin^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1}) \sin^{-1}(x_{j+3} - x_{j+2}) \quad \text{для } t \in [x_{j+2}, x_{j+3}], \quad (1.5)$$

причем для остальных t функция $\mathfrak{T}_j^B$ равна нулю:

$$\mathfrak{T}_j^B(t) = 0 \quad \forall t \notin [x_j, x_{j+3}], \quad \text{и значит, } \operatorname{supp} \mathfrak{T}_j^B = [x_j, x_{j+3}]. \quad (1.6)$$

Легко проверить, что функция $\mathfrak{T}_j^B(t)$, задаваемая формулами (1.3)–(1.6), непрерывно дифференцируема на вещественной оси, вогнута на интервалах (x_j, x_{j+1}) и (x_{j+2}, x_{j+3}) , выпукла на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}) , положительна на интервале (x_j, x_{j+3}) , а ее вторая производная имеет неустранимые разрывы первого рода в точках $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}$. Эти свойства аналогичны свойствам известного (см., например, [7, с. 23]) B -сплайна второй степени с носителем $[x_j, x_{j+3}]$. Сплайны $\mathfrak{T}_j^B(t)$ будем называть B_{cs} -сплайнами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем часто используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_j^B(x_i) &= \lim_{t \rightarrow x_i-0} \mathfrak{T}_j^B(t), \quad \mathfrak{T}_j^B(x_i) = \lim_{t \rightarrow x_i+0} \mathfrak{T}_j^B(t), \\ (\mathfrak{T}_j^B)'(x_i) &= \lim_{t \rightarrow x_i-0} (\mathfrak{T}_j^B)'(t), \quad (\mathfrak{T}_j^B)'(x_i) = \lim_{t \rightarrow x_i+0} (\mathfrak{T}_j^B)'(t), \\ \mathfrak{T}_j^B(x_j) &= 0, \quad (\mathfrak{T}_j^B)'(x_j) = 0, \quad \mathfrak{T}_j^B(x_{j+3}) = 0, \quad (\mathfrak{T}_j^B)'(x_{j+3}) = 0. \end{aligned}$$

Эти формулы справедливы благодаря импликации $\mathfrak{T}_j \in C^1(\alpha, \beta)$.

2. Биортогональная система функционалов. В пространстве $C^1(\alpha, \beta)$ рассмотрим линейные функционалы

$$g^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(x_{i+2} - x_{i+1}) + \frac{1}{2} \sin(x_{i+2} - x_{i+1}) \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_{i+1}}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

действующие на функции $u \in C^1(\alpha, \beta)$ по формуле

$$\langle g^{(i)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \cos(x_{i+2} - x_{i+1}) u(x_{i+1}) + \frac{1}{2} \sin(x_{i+2} - x_{i+1}) u'(x_{i+1}). \quad (2.1)$$

Из формулы (2.1) видно, что носителем функционала $g^{(i)}$ является точка x_{i+1} :

$$\operatorname{supp} g^{(i)} = x_{i+1}. \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 1. Система функционалов $\{g^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ биортогональна системе B_{cs} -сплайнов $\{\mathfrak{T}_j^B\}_{j \in \mathbb{Z}}$, т.е. $\langle g^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = \delta_{i,j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду замечания 1 при $i = j$ получаем

$$\begin{aligned}
 \langle g^{(j)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle &= \left\langle \cos(x_{j+2} - x_{j+1}) + \frac{1}{2} \sin(x_{j+2} - x_{j+1}) \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_{j+1}}, \mathfrak{T}_j^B \right\rangle \\
 &= \left\langle \cos(x_{j+2} - x_{j+1}) + \frac{1}{2} \sin(x_{j+2} - x_{j+1}) \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_{j+1}}, \sin^2(t - x_j) \right\rangle \\
 &\quad \times \sin^{-1}(x_{j+2} - x_j) \sin^{-1}(x_{j+1} - x_j) \\
 &= \sin(x_{j+1} - x_j) [\sin(x_{j+1} - x_j) \cos(x_{j+2} - x_{j+1}) \\
 &\quad + \cos(x_{j+1} - x_j) \sin(x_{j+2} - x_{j+1})] \sin^{-1}(x_{j+2} - x_j) \sin^{-1}(x_{j+1} - x_j).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Применяя очевидное равенство

$$\sin(x_{j+1} - x_j) \cos(x_{j+2} - x_{j+1}) + \cos(x_{j+1} - x_j) \sin(x_{j+2} - x_{j+1}) = \sin(x_{j+2} - x_j),$$

из (2.3) имеем

$$\langle g^{(j)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = 1. \tag{2.4}$$

При $i = j + 1$ с помощью формулы (1.5) находим

$$\begin{aligned}
 \langle g^{(j+1)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle &= \left\langle \cos(x_{j+3} - x_{j+2}) + \frac{1}{2} \sin(x_{j+3} - x_{j+2}) \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_{j+2}}, \mathfrak{T}_j^B \right\rangle \\
 &= \left\langle \cos(x_{j+3} - x_{j+2}) + \frac{1}{2} \sin(x_{j+3} - x_{j+2}) \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_{j+2}}, \sin^2(t - x_{j+3}) \right\rangle \\
 &\quad \times \sin^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1}) \sin^{-1}(x_{j+3} - x_{j+2}).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \cos(x_{j+3} - x_{j+2}) + \frac{1}{2} \sin(x_{j+3} - x_{j+2}) \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_{j+2}}, \sin^2(t - x_{j+3}) \right\rangle \\
 &= \cos(x_{j+3} - x_{j+2}) \sin^2(x_{j+2} - x_{j+3}) \\
 &\quad + \sin(x_{j+3} - x_{j+2}) \sin(x_{j+2} - x_{j+3}) \cos(x_{j+2} - x_{j+3}) = 0,
 \end{aligned}$$

из (2.5) выводим

$$\langle g^{(j+1)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = 0. \tag{2.6}$$

Для $i \leq j - 1$ и для $i \geq j + 2$ при подстановке $t = x_{i+1}$ выбираем инцидентный точке x_{i+1} промежуток, где функция $\mathfrak{T}_j^B(t)$ тождественно равна нулю, и получаем (см. замечание 1) для этих i соотношения

$$\langle g^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{j, j + 1\}. \tag{2.7}$$

Из формул (2.4), (2.6) и (2.7) видно, что теорема полностью доказана.

3. Переход к новой сетке удалением одного узла. Вводя обозначения

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} x_1, \quad \bar{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \quad \text{при } j \leq 0, \quad \text{и} \quad \bar{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \quad \text{при } j \geq 1, \quad (3.1)$$

рассмотрим новую сетку $\bar{X}_1 : \dots < \bar{x}_{-1} < \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots$, полученную из сетки X (см. (1.1), (1.2)) удалением узла x_1 . B_{cs} -сплайны $\bar{\mathfrak{X}}_j^B$, построенные с использованием новой сетки $\bar{X}_1$, представляются теми же формулами (1.3)–(1.6) с заменой узлов x_j сетки X на узлы $\bar{x}_j$ сетки $\bar{X}_1$. Для $j \notin \{-2, -1, 0\}$ сплайны $\bar{\mathfrak{X}}_j^B$ совпадают с рассмотренными ранее:

$$\bar{\mathfrak{X}}_j^B(t) \equiv \mathfrak{X}_j^B(t) \quad \forall j \leq -3, \quad \bar{\mathfrak{X}}_j^B(t) \equiv \mathfrak{X}_{j+1}^B(t) \quad \forall j \geq 1. \quad (3.2)$$

При $j \in \{-2, -1, 0\}$ сплайны $\bar{\mathfrak{X}}_j^B$ могут быть представлены в виде линейной комбинации сплайнов $\mathfrak{X}_j^B$ и $\mathfrak{X}_{j+1}^B$ (см. ниже теорему 2).

По теореме 1 система $\{\bar{g}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ функционалов

$$\langle \bar{g}^{(i)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\bar{x}_{i+2} - \bar{x}_{i+1})u(\bar{x}_{i+1}) + \frac{1}{2} \sin(\bar{x}_{i+2} - \bar{x}_{i+1})u'(\bar{x}_{i+1})$$

биортогональна системе сплайнов $\{\bar{\mathfrak{X}}_j^B\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Видно, что

$$\bar{g}^{(i)} = g^{(i)} \quad \text{при } i \leq -2, \quad \text{и} \quad \bar{g}^{(i)} = g^{(i+1)} \quad \text{при } i \geq 0. \quad (3.3)$$

4. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Для любых $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^1$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & [\sin(c+e) \cos(b-a) - \sin(a+b) \cos(e-c) + \sin(a+b-c-e)] \sin(d-b) \\ & \equiv [\sin(c+d) \cos(b-a) - \sin(a+b) \cos(d-c) + \sin(a+b-c-d)] \sin(e-b) \\ & \quad + 2 \sin(e-d) \sin^2 b \sin(c-a). \end{aligned} \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение в квадратных скобках левой части соотношения (4.1) обозначим $T(e)$,

$$T(e) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(c+e) \cos(b-a) - \sin(a+b) \cos(e-c) + \sin(a+b-c-e). \quad (4.2)$$

Используя формулу для синуса разности,

$$\sin(a+b-c-e) = \sin(a+b) \cos(c+e) - \sin(c+e) \cos(a+b),$$

получаем

$$\begin{aligned} T(e) &= \sin(c+e)[\cos(b-a) - \cos(a+b)] + \sin(a+b)[\cos(c+e) - \cos(c-e)] \\ &= \sin(c+e)2 \sin a \sin b - \sin(a+b)2 \sin c \sin e \\ &= 2[(\sin c \cos e + \sin e \cos c) \sin a \sin b - (\sin a \cos b + \sin b \cos a) \sin c \sin e], \end{aligned}$$

откуда имеем

$$T(e) = 2[\sin a \sin b \sin c \cos e + \sin a \sin b \cos c \sin e - \sin a \cos b \sin c \sin e - \cos a \sin b \sin c \sin e]. \quad (4.3)$$

Тождество (4.1) эквивалентно соотношению

$$T(e) \sin(d-b) - T(d) \sin(e-b) \stackrel{?}{=} 2 \sin(e-d) \sin^2 b \sin(c-a), \quad (4.4)$$

где символ ' $\stackrel{?}{=}$ ' означает, что тождественность левой и правой частей находится в процессе доказательства. Ввиду формулы (4.3) из (4.4) находим

$$\begin{aligned} & \sin a \sin b \sin c [\cos e \sin(d-b) - \cos d \sin(e-b)] \\ & + [\sin a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c - \cos a \sin b \sin c] \\ & \times [\sin e \sin(d-b) - \sin d \sin(e-b)] \\ & \stackrel{?}{=} \sin(e-d) \sin^2 b \sin(c-a), \end{aligned}$$

откуда, используя в первой и в последней квадратных скобках (для перехода от произведения к сумме тригонометрических функций) формулы

$$2 \sin \gamma \cos \delta = [\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta)], \quad 2 \sin \gamma \sin \delta = [\cos(\gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta)], \quad (4.5)$$

соответственно получаем

$$\begin{aligned} & [\sin(-b+d-e) + \sin(b+d-e)] \sin a \sin b \sin c + [\sin a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c \\ & - \cos a \sin b \sin c][\cos(b-d+e) - \cos(b+d-e)] \stackrel{?}{=} 2 \sin(e-d) \sin^2 b \sin(c-a). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Снова используя формулы (4.5) для перехода от суммы тригонометрических функций к произведению в первой и в последней квадратных скобках соотношения (4.6), находим очевидное тождество

$$[\sin a \cos c - \cos a \sin c] \sin^2 b \sin(d-e) \stackrel{?}{=} \sin(e-d) \sin^2 b \sin(c-a). \quad (4.7)$$

Ввиду эквивалентного характера всех переходов из справедливости тождества (4.7) вытекает справедливость тождества (4.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}^1$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & 2 \sin^2 d \sin(c-a) \sin(c-b) \equiv 2 \sin^2 c \sin(d-a) \sin(d-b) \\ & + \sin(d-c)[\sin(c+d) \cos(b-a) - \sin(a+b) \cos(d-c) + \sin(a+b-c-d)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что в квадратных скобках содержится выражение $T(d)$ (см. формулу (4.2)). Введем обозначения

$$\begin{aligned} A &= \sin a, & B &= \sin b, & C &= \sin c, & D &= \sin d, \\ \overline{A} &= \cos a, & \overline{B} &= \cos b, & \overline{C} &= \cos c, & \overline{D} &= \cos d. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Согласно формуле (4.3)

$$T(d) = 2(ABC\overline{D} + AB\overline{C}D - A\overline{B}CD - \overline{A}BCD). \quad (4.10)$$

Рассмотрим разность

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \sin^2 d \sin(c-a) \sin(c-b) - \sin^2 c \sin(d-a) \sin(d-b).$$

Используя формулу синуса разности и введенные обозначения (4.9), имеем

$$R = -A\overline{B}C\overline{C}D^2 - \overline{A}BC\overline{C}D^2 + AB\overline{C}^2D^2 + A\overline{B}C^2D\overline{D} + \overline{A}BC^2D\overline{D} - ABC^2\overline{D}^2. \quad (4.11)$$

Доказываемое тождество (4.8) эквивалентно соотношению $2R \stackrel{?}{=} \sin(d-c)T(d)$, которое благодаря формулам (4.10), (4.11) и обозначениям (4.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & -A\overline{B}C\overline{C}D^2 - \overline{A}BC\overline{C}D^2 + AB\overline{C}^2D^2 + A\overline{B}C^2D\overline{D} + \overline{A}BC^2D\overline{D} - ABC^2\overline{D}^2 \\ & \stackrel{?}{=} (\overline{C}D - C\overline{D})(ABC\overline{D} + AB\overline{C}D - A\overline{B}CD - \overline{A}BCD). \end{aligned}$$

Справедливость последнего соотношения становится очевидной после раскрытия скобок и приведения подобных членов. Рассмотренные преобразования обратимы и, значит, тождество (4.8) справедливо. Лемма доказана.

5. Калибровочные соотношения для B_{cs} -сплайнов.

ТЕОРЕМА 2. При $j = -2, -1, 0$ функции $\overline{\mathfrak{T}}_j^B$ выражаются через функции $\mathfrak{T}_i^B$ по следующим формулам:

$$\overline{\mathfrak{T}}_{-2}^B(t) = \mathfrak{T}_{-2}^B(t) + \sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \mathfrak{T}_{-1}^B(t), \quad (5.1)$$

$$\overline{\mathfrak{T}}_{-1}^B(t) = \sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \mathfrak{T}_{-1}^B(t) + \sin(\bar{x}_2 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \mathfrak{T}_0^B(t), \quad (5.2)$$

$$\overline{\mathfrak{T}}_0^B(t) = \sin(\xi - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \mathfrak{T}_0^B(t) + \mathfrak{T}_1^B(t). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общий план доказательства состоит в следующем: сначала будет доказано тождество (5.1), затем тождество (5.3) сведением его к тождеству (5.1); последним будет доказано тождество (5.2).

1. Начиная доказательство тождества (5.1), заметим, что его достаточно доказать на промежутках $[x_{-2}, x_{-1}]$, $[x_{-1}, x_0]$, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$. Последовательно рассмотрим каждый из этих промежутков.

1.1. Пусть $t \in [x_{-2}, x_{-1}]$. Тогда левая часть соотношения (5.1) определяется формулой (1.3), где $j = -2$, $x_i = \bar{x}_i$, $i = -2, -1, 0$:

$$\overline{\mathfrak{T}}_{-2}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_{-2}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-2}) \sin^{-1}(\bar{x}_{-1} - \bar{x}_{-2}). \quad (5.4)$$

Для первого слагаемого правой части соотношения (5.1) на промежутке $t \in [x_{-2}, x_{-1}]$ справедлива формула (1.3); ее перепишем с учетом равенств (3.1):

$$\mathfrak{T}_{-2}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_{-2}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-2}) \sin^{-1}(\bar{x}_{-1} - \bar{x}_{-2}). \quad (5.5)$$

Второе слагаемое правой части формулы (5.1) при рассматриваемых t равно нулю, а формулы (5.4), (5.5) дают тождество $\overline{\mathfrak{T}}_{-2}^B(t) \equiv \mathfrak{T}_{-2}^B(t) \quad \forall t \in [x_{-2}, x_{-1}]$; итак, соотношение (5.1) при $t \in [x_{-2}, x_{-1}]$ доказано.

1.2. Пусть $t \in [x_{-1}, x_0]$. Тогда левая часть соотношения (5.1) задается формулой (1.4), в которой $j = -2$, $x_i = \bar{x}_i$, $i = -2, -1, 0, 1$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{T}}_{-2}^B(t) = & \frac{1}{2} [\sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_{-1} - \bar{x}_{-2}) + \sin(2t - \bar{x}_{-2} - \bar{x}_{-1}) \cos(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \\ & + \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_{-2} - \bar{x}_0 - \bar{x}_1)] \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-2}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части вычисляется по формуле (1.4) при $j = -2$; перейдем в нем к обозначениям (3.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{-2}^B(t) = & \frac{1}{2} [\sin(\bar{x}_0 + \xi - 2t) \cos(\bar{x}_{-1} - \bar{x}_{-2}) + \sin(2t - \bar{x}_{-2} - \bar{x}_{-1}) \cos(\xi - \bar{x}_0) \\ & + \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_{-2} - \bar{x}_0 - \xi)] \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-2}). \end{aligned}$$

Второе слагаемое правой части соотношения (5.1) вычисляется по формуле (1.3) при $j = -1$; перейдем здесь тоже к обозначениям (3.1):

$$\mathfrak{T}_{-1}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}).$$

В соответствии с (5.1) требуется доказать тождество

$$\begin{aligned} & [\sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_{-1} - \bar{x}_{-2}) + \sin(2t - \bar{x}_{-2} - \bar{x}_{-1}) \cos(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \\ & + \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_{-2} - \bar{x}_0 - \bar{x}_1)] \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-2}) \\ & \stackrel{?}{=} [\sin(\bar{x}_0 + \xi - 2t) \cos(\bar{x}_{-1} - \bar{x}_{-2}) + \sin(2t - \bar{x}_{-2} - \bar{x}_{-1}) \cos(\xi - \bar{x}_0) \\ & + \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_{-2} - \bar{x}_0 - \xi)] \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-2}) \\ & + 2 \sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^2(t - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}). \end{aligned}$$

Освобождаясь от знаменателей, видим, что достаточно доказать соотношение

$$\begin{aligned} & [\sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_{-1} - \bar{x}_{-2}) + \sin(2t - \bar{x}_{-2} - \bar{x}_{-1}) \cos(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \\ & + \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_{-2} - \bar{x}_0 - \bar{x}_1)] \sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \stackrel{?}{=} [\sin(\bar{x}_0 + \xi - 2t) \cos(\bar{x}_{-1} - \bar{x}_{-2}) \\ & + \sin(2t - \bar{x}_{-2} - \bar{x}_{-1}) \cos(\xi - \bar{x}_0) + \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_{-2} - \bar{x}_0 - \xi)] \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \\ & + 2 \sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^2(t - \bar{x}_{-1}) \sin(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-2}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Полагая в доказанном ранее тождестве (4.1) (см. лемму 1) $a \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_{-2} - t$, $b \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_{-1} - t$, $c \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_0 - t$, $d \stackrel{\text{def}}{=} \xi - t$, $e \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_1 - t$, приходим к соотношению (5.6). Ввиду обратимости проделанных преобразований заключаем, что тождество (5.1) доказано для $t \in [x_{-1}, x_0]$.

1.3. Рассмотрим теперь промежуток $[x_0, x_1]$. На этом промежутке левая часть соотношения (5.1) получается из формулы (1.5) заменами $j = -2$, $x_i = \bar{x}_i$ при $i = -1, 0, 1$:

$$\overline{\mathfrak{T}}_{-2}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_1) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \quad \text{для } t \in [\bar{x}_0, \bar{x}_1].$$

Ту же формулу (1.5) используем и для функции $\mathfrak{T}_{-2}^B$, а затем произведем замены обозначений согласно формулам (3.1):

$$\mathfrak{T}_{-2}^B(t) = \sin^2(t - \xi) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0).$$

Наконец, для функции $\mathfrak{T}_{-1}^B$ используем формулу (1.4) при $j = -1$ и сделаем замены по формулам (3.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{-1}^B(t) &= \frac{1}{2} [\sin(\xi + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_1 - \xi) \\ &+ \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_0 - \xi - \bar{x}_1)] \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, требуется установить тождество

$$\begin{aligned} & 2 \sin^2(t - \bar{x}_1) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \\ & \stackrel{?}{=} 2 \sin^2(t - \xi) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0) \\ & + \sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) [\sin(\xi + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) \\ & + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_1 - \xi) + \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_0 - \xi - \bar{x}_1)] \\ & \times \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}). \end{aligned}$$

Умножая последнее соотношение на произведение

$$\sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin(\xi - \bar{x}_0),$$

получим

$$\begin{aligned} & 2 \sin^2(t - \bar{x}_1) \sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin(\xi - \bar{x}_0) \stackrel{?}{=} 2 \sin^2(t - \xi) \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \\ & + \sin(\bar{x}_1 - \xi) [\sin(\xi + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_1 - \xi) \\ & + \sin(\bar{x}_{-1} + \bar{x}_0 - \xi - \bar{x}_1)]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Производя замены $a \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_{-1} - t$, $b \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_0 - t$, $c \stackrel{\text{def}}{=} \xi - t$, $d \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_1 - t$ в тождестве (4.8), доказанном в лемме 2, приходим к соотношению (5.7). Итак, тождество (5.7) установлено, а ввиду эквивалентности проводимых преобразований убеждаемся в справедливости тождества (5.1) на промежутке $[x_0, x_1]$.

1.4. Перейдем к последнему промежутку $[x_1, x_2]$. На этом промежутке для левой части соотношения (5.1) используем формулу (1.5) при $j = -2$, $x_i = \bar{x}_i$, $i = -1, 0, 1$:

$$\overline{\mathfrak{T}}_{-2}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_1) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0), \quad (5.8)$$

и ту же формулу при $j = -1$:

$$\mathfrak{T}_{-1}^B(t) = \sin^2(t - x_2) \sin^{-1}(x_2 - x_0) \sin^{-1}(x_2 - x_1),$$

откуда, используя обозначения (3.1), находим

$$\mathfrak{T}_{-1}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_1) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \xi). \quad (5.9)$$

Для доказательства формулы (5.1) на промежутке $[x_1, x_2]$ осталось заметить, что на упомянутом промежутке первое слагаемое правой части равно нулю, а второе слагаемое представляется произведением выражения $\sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1})$ на функцию (5.9), что ведет к выражению (5.8). Тождество (5.1) на промежутке $[x_1, x_2]$ доказано. На этом заканчивается доказательство тождества (5.1) для всех $t \in (\alpha, \beta)$.

2. Начиная доказательство тождества (5.3), заметим, что (5.3) отличается от (5.1) лишь обозначениями. Действительно, обозначим $\alpha' \stackrel{\text{def}}{=} -\beta$, $\beta' \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha$ и введем сетку $X' \stackrel{\text{def}}{=} \{x'_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ с узлами

$$x'_p \stackrel{\text{def}}{=} -x_{-p+2}; \quad (5.10)$$

на этой сетке рассмотрим функции $\mathfrak{T}_j^B(t')$, $t' \in (\alpha', \beta')$, построенные согласно соотношениям (1.3)–(1.6) с формальной заменой узлов x_j на x'_j . Очевидно, эти функции связаны с функциями, ранее построенными на сетке X , соотношениями

$$\mathfrak{T}_p^B(t') = \mathfrak{T}_{-p-1}^B(-t') \quad \forall t' \in (\alpha', \beta') \quad \forall p \in \mathbb{Z}. \quad (5.11)$$

Рассмотрим еще сетку $\overline{X}' \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}'_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ с узлами

$$\bar{x}'_q \stackrel{\text{def}}{=} -\bar{x}_{-q+1}, \quad (5.12)$$

представляющую собой укрупнение сетки X' за счет выбрасывания узла $\xi' \stackrel{\text{def}}{=} x'_1$; в соответствии с формулой (5.10) имеем

$$\xi' = x'_1 = -x_1 = -\xi. \quad (5.13)$$

Теперь введем функции $\overline{\mathfrak{T}}_j^B(t')$, построенные согласно соотношениям (1.3)–(1.5) с формальной заменой узлов x_j на $\bar{x}'_j$; ясно, что для таких функций справедливы тождества

$$\overline{\mathfrak{T}}_q^B(t') = \overline{\mathfrak{T}}_{-q-2}^B(-t') \quad \forall t' \in (\alpha', \beta') \quad \forall q \in \mathbb{Z}. \quad (5.14)$$

Поскольку из соотношений (5.11)–(5.14) вытекают формулы

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{T}}_{-2}^B(-t') &= \overline{\mathfrak{T}}_0'^B(t'), & \mathfrak{T}_{-2}^B(-t') &= \mathfrak{T}_1'^B(t'), & \mathfrak{T}_{-1}^B(-t') &= \mathfrak{T}_0'^B(t'), \\ \bar{x}_1 &= -\bar{x}'_0, & \bar{x}_{-1} &= -\bar{x}'_2, & \xi &= -\xi',\end{aligned}$$

из уже доказанного соотношения (5.1),

$$\overline{\mathfrak{T}}_{-2}^B(-t') = \mathfrak{T}_{-2}^B(-t') + \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \mathfrak{T}_{-1}^B(-t') \quad \forall t' \in (\alpha', \beta'),$$

легко получаем тождество

$$\overline{\mathfrak{T}}_0'^B(t') = \mathfrak{T}_1'^B(t') + \sin(\bar{x}'_0 - \xi') \sin^{-1}(\bar{x}'_0 - \bar{x}'_2) \mathfrak{T}_0'^B(t') \quad \forall t' \in (\alpha', \beta');$$

последнее с точностью до обозначений совпадает с тождеством (5.3), что и требовалось.

3. Для доказательства теоремы осталось установить справедливость тождества (5.2), для чего достаточно доказать его на отрезках $[x_{-1}, x_0]$, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$. Поскольку здесь рассуждения аналогичны первому пункту доказательства теоремы, то подробности будем опускать.

3.1. При $t \in [x_{-1}, x_0]$ согласно формуле (1.3) левая часть в (5.2) имеет вид

$$\overline{\mathfrak{T}}_{-1}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1})$$

и получается из первого слагаемого правой части

$$\mathfrak{T}_{-1}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1})$$

умножением на выражение $\sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1})$. Поскольку второе слагаемое на рассматриваемом промежутке равно нулю, то при $t \in [x_{-1}, x_0]$ тождество (5.2) доказано.

3.2. При $t \in [x_0, x_1]$ левая часть соотношения (5.2) принимает вид

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{T}}_{-1}^B(t) &= \frac{1}{2} [\sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\ &\quad + \sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_{-1} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}),\end{aligned}\tag{5.15}$$

а функции $\mathfrak{T}_{-1}^B$ и $\mathfrak{T}_0^B$ в правой части (согласно формулам (1.4) и (1.3) соответственно и с учетом обозначений (3.1)) могут быть записаны в форме:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{-1}^B(t) &= \frac{1}{2} [\sin(\xi + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_1 - \xi) \\ &\quad + \sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_{-1} - \xi - \bar{x}_1)] \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1})\end{aligned}$$

и

$$\mathfrak{T}_0^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0).$$

Таким образом, требуется установить тождество

$$\begin{aligned}
 & [\sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\
 & + \sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_{-1} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \\
 & \stackrel{?}{=} \sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) [\sin(\xi + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) \\
 & + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_1 - \xi) + \sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_{-1} - \xi - \bar{x}_1)] \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0) \\
 & \times \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \\
 & + 2 \sin(\bar{x}_2 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin^2(t - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0),
 \end{aligned}$$

которое после умножения на произведение $\sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin(\xi - \bar{x}_0)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 & \sin(\xi - \bar{x}_0) [\sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\
 & + \sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_{-1} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \stackrel{?}{=} \sin(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) [\sin(\xi + \bar{x}_1 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) \\
 & + \cos(\bar{x}_1 - \xi) \times \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) + \sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_{-1} - \xi - \bar{x}_1)] \\
 & + 2 \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^2(t - \bar{x}_0) \sin(\bar{x}_2 - \xi).
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Полагая $a \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_{-1} - t$, $b \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_0 - t$, $c \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_1 - t$, $d \stackrel{\text{def}}{=} \xi - t$, $e \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_2 - t$ в тождестве (4.1), приходим к соотношению (5.16). Таким образом, на промежутке $[x_0, x_1]$ тождество (5.2) справедливо.

3.3. При $t \in [x_1, x_2]$ в левой части соотношения (5.2) воспользуемся формулой (5.15), а в правой части функции $\mathfrak{T}_{-1}^B$ и $\mathfrak{T}_0^B$ (в силу формул (1.5) и (1.4) соответственно с учетом обозначений (3.1)) запишем в виде

$$\mathfrak{T}_{-1}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_1) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \xi)$$

и

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}_0^B(t) &= \frac{1}{2} [\sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2t) \cos(\xi - \bar{x}_0) + \sin(2t - \bar{x}_0 - \xi) \cos(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\
 &+ \sin(\xi + \bar{x}_0 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0).
 \end{aligned}$$

Итак, требуется доказать тождество

$$\begin{aligned}
 & [\sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\
 & + \sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_{-1} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \\
 & \stackrel{?}{=} 2 \sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^2(t - \bar{x}_1) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \xi) \\
 & + \sin(\bar{x}_2 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) [\sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2t) \cos(\xi - \bar{x}_0) \\
 & + \sin(2t - \bar{x}_0 - \xi) \cos(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \sin(\xi + \bar{x}_0 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \\
 & \times \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0),
 \end{aligned}$$

которому умножением на произведение $\sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \sin(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin(\bar{x}_1 - \xi)$ легко придать вид

$$\begin{aligned} & \sin(\bar{x}_1 - \xi) [\sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2t) \cos(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) + \sin(2t - \bar{x}_{-1} - \bar{x}_0) \cos(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\ & + \sin(\bar{x}_0 + \bar{x}_{-1} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \stackrel{?}{=} 2 \sin(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^2(t - \bar{x}_1) \\ & + \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) [\sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2t) \cos(\xi - \bar{x}_0) + \sin(2t - \bar{x}_0 - \xi) \cos(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\ & + \sin(\xi + \bar{x}_0 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Снова воспользуемся леммой 1: полагая в тождестве (4.1) $a \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_2 - t$, $b \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_1 - t$, $c \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_0 - t$, $d \stackrel{\text{def}}{=} \xi - t$, $e \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_{-1} - t$, придем к соотношению (5.17). Ввиду эквивалентности проведенных преобразований ясно, что тождество (5.2) справедливо на отрезке $t \in [x_1, x_2]$.

3.4. Обратимся, наконец, к случаю $t \in [x_2, x_3]$. Здесь левая часть в (5.2) равна

$$\overline{\mathfrak{T}}_{-1}^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_2) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1).$$

Она получается из функции

$$\mathfrak{T}_0^B(t) = \sin^2(t - \bar{x}_2) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$$

умножением на выражение $\sin(\bar{x}_2 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)$; последнее с учетом равенства нулю первого слагаемого правой части (5.2) на рассматриваемом промежутке доказывает тождество (5.2) для $t \in [x_2, x_3]$.

На этом заканчивается рассмотрение третьего завершающего пункта доказательства. Теорема полностью доказана.

В дальнейшем рассматриваются бесконечные ряды вида $\sum_j c_j \mathfrak{T}_j^B$, $c_j \in \mathbb{R}^1$, где суммирование по j распространено на все целые числа, $j \in \mathbb{Z}$. Заметим, что при каждом фиксированном $t \in (\alpha, \beta)$ такой ряд содержит не более трех ненулевых слагаемых; поэтому при любой последовательности $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ коэффициентов $c_j \in \mathbb{R}^1$ упомянутый ряд сходится (в смысле поточечной сходимости).

Обозначим $\mathcal{T}^B(X)$ линейное пространство, являющееся линейной оболочкой функций $\mathfrak{T}_j^B$, $\mathcal{T}^B(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{u} \mid \tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j c_j \mathfrak{T}_j^B \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$; пространство $\mathcal{T}^B(X)$ будем называть *пространством B_{cs} -сплайнов на сетке X* , а функции $\mathfrak{T}_j^B$ — *образующими B_{cs} -сплайнами* (или просто — *образующими*) этого пространства.

В соответствии с этим определением $\mathcal{T}^B(\overline{X}_1)$ является пространством B_{cs} -сплайнов на сетке $\overline{X}_1$,

$$\mathcal{T}^B(\overline{X}_1) = \{\tilde{u} \mid \tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \bar{c}_j \overline{\mathfrak{T}}_j^B \forall \bar{c}_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо соотношение*

$$\overline{\mathfrak{T}}_i^B = \sum_j d_{i,j} \mathfrak{T}_j^B, \quad (5.18)$$

где при $i, j \in \mathbb{Z}$ коэффициенты $d_{i,j}$ определяются равенствами

$$d_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \leq -3, \quad (5.19)$$

$$d_{-2,-2} = 1, \quad d_{-2,-1} = \frac{\sin(\bar{x}_1 - \xi)}{\sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1})}, \quad d_{-2,j} = 0 \quad \text{при } j \notin \{-2, -1\}, \quad (5.20)$$

$$d_{-1,-1} = \frac{\sin(\xi - \bar{x}_{-1})}{\sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1})}, \quad d_{-1,0} = \frac{\sin(\bar{x}_2 - \xi)}{\sin(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)}, \quad d_{-1,j} = 0 \quad \text{при } j \notin \{-1, 0\}, \quad (5.21)$$

$$d_{0,0} = \frac{\sin(\xi - \bar{x}_0)}{\sin(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)}, \quad d_{0,1} = 1, \quad d_{0,j} = 0 \quad \text{при } j \notin \{0, 1\}, \quad (5.22)$$

$$d_{i,j} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } i \geq 1. \quad (5.23)$$

Доказательство непосредственно вытекает из формул (5.1)–(5.3) теоремы 2.

Следствие 1. Пространство $\mathcal{T}^B(\bar{X}_1)$ содержится в пространстве $\mathcal{T}^B(X)$.

Соотношения (5.18) называются калибровочными соотношениями, функции $\mathfrak{T}_j^B$ называются калибрующими, а функции $\bar{\mathfrak{T}}_i^B$ – калибруемыми функциями (см. [5]).

6. Всплесковое разложение. Формулы реконструкции. Рассмотрим оператор P проектирования пространства $\mathcal{T}^B(X)$ на подпространство $\mathcal{T}^B(\bar{X}_1)$, задаваемый формулой $P\tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \langle \bar{g}^{(j)}, \tilde{u} \rangle \bar{\mathfrak{T}}_j^B \quad \forall \tilde{u} \in \mathcal{T}^B(X)$, и введем оператор $Q = I - P$, где I – тождественный оператор.

В результате получаем пространство всплесков (вейвлетов) $W \stackrel{\text{def}}{=} Q\mathcal{T}^B(X)$ и прямое разложение

$$\mathcal{T}^B(X) = \mathcal{T}^B(\bar{X}) \dot{+} W, \quad (6.1)$$

которое называется *сплайн-всплесковым разложением* пространства $\mathcal{T}^B(X)$.

Пусть известны коэффициенты a_i и $b_{i'}$ в разложениях проекций элемента $\tilde{u} \in \mathcal{T}^B(X)$ на пространства $\mathcal{T}^B(\bar{X})$ и W : $P\tilde{u} = \sum_i a_i \bar{\mathfrak{T}}_i^B$, $Q\tilde{u} = \sum_{i'} b_{i'} \mathfrak{T}_{i'}^B$, где $a_i = \langle \bar{g}^{(i)}, \tilde{u} \rangle$, $b_{i'} = \langle g^{(i')}, \tilde{u} \rangle$. В соответствии с формулой (5.18) имеем

$$\tilde{u} = \sum_i a_i \bar{\mathfrak{T}}_i^B + \sum_{i'} b_{i'} \mathfrak{T}_{i'}^B = \sum_{i'} \left(\sum_j a_j d_{j,i'} + b_{i'} \right) \mathfrak{T}_{i'}^B,$$

так что для чисел $c_j = \langle g^{(j)}, \tilde{u} \rangle$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_i a_i d_{i,j} + b_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (6.2)$$

ТЕОРЕМА 4. Для рассматриваемого сплайн-всплескового разложения (6.1) пространства $\mathcal{T}^B(X)$ формулы реконструкции (6.2) имеют вид

$$c_j = a_j + b_j \quad \text{при } j \leq -2, \quad (6.3)$$

$$c_{-1} = a_{-2} \frac{\sin(\bar{x}_1 - \xi)}{\sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1})} + a_{-1} \frac{\sin(\xi - \bar{x}_{-1})}{\sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1})} + b_{-1}, \quad (6.4)$$

$$c_0 = a_{-1} \frac{\sin(\bar{x}_2 - \xi)}{\sin(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)} + a_0 \frac{\sin(\xi - \bar{x}_0)}{\sin(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)} + b_0, \quad (6.5)$$

$$c_j = a_{j-1} + b_j \quad \text{при } j \geq 1. \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду равенств (5.19), (5.20) при $j \leq -2$ имеем $c_j = a_j d_{j,j} + b_j$, $d_{j,j} = 1$, а это эквивалентно формуле (6.3). При $j = -1$ находим $c_{-1} = a_{-2} d_{-2,-1} + a_{-1} d_{-1,-1} + b_{-1}$ и из формул (5.20), (5.21) получаем (6.4). При $j = -1$ имеем $c_0 = a_{-1} d_{-1,0} + a_0 d_{0,0} + b_0$, откуда с помощью соотношений (5.21), (5.22) выводим (6.5). Наконец, при $j \geq 1$ пишем $c_j = a_{j-1} d_{j-1,j} + b_j$, $d_{j-1,j} = 1$, так что с учетом формул (5.22), (5.23) получаем соотношение (6.6). Теорема доказана.

7. Формулы декомпозиции. Пусть теперь известны коэффициенты c_k в разложении элемента $\tilde{u} \in \mathcal{S}^B(X)$ по элементам базиса $\mathfrak{T}_{i'}^B$, а именно, $\tilde{u} = \sum_k c_k \mathfrak{T}_k^B$. Используя равенство $a_i = \langle \bar{g}^{(i)}, \tilde{u} \rangle$, последовательно имеем

$$b_j = c_j - \sum_i d_{i,j} a_i = c_j - \sum_i d_{i,j} \left\langle \bar{g}^{(i)}, \sum_k c_k \mathfrak{T}_k^B \right\rangle = c_j - \sum_i d_{i,j} \sum_k c_k \langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_k^B \rangle.$$

Отсюда получаются *формулы декомпозиции*

$$a_i = \sum_k c_k \langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_k^B \rangle, \quad (7.1)$$

$$b_j = c_j - \sum_i d_{i,j} \sum_k c_k \langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_k^B \rangle. \quad (7.2)$$

ТЕОРЕМА 5. *Выражения $\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle$, $i, j \in \mathbb{Z}$, отличны от нуля только в следующих случаях:*

$$\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_i^B \rangle = 1 \quad \text{при } i \leq -2, \quad (7.3)$$

$$\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_{i+1}^B \rangle = 1 \quad \text{при } i \geq 0, \quad (7.4)$$

$$\langle \bar{g}^{(-1)}, \mathfrak{T}_{-2}^B \rangle = -\frac{\sin(\bar{x}_1 - \xi)}{\sin(\xi - \bar{x}_{-1})}, \quad (7.5)$$

$$\langle \bar{g}^{(-1)}, \mathfrak{T}_{-1}^B \rangle = \frac{\sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1})}{\sin(\xi - \bar{x}_{-1})}; \quad (7.6)$$

в остальных случаях выражение $\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle$ равно нулю, т.е.

$$\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = 0 \quad (7.7)$$

$$\text{при } (i, j) \notin \{(i, i) \mid i \leq -2\} \cup \{(i, i+1) \mid i \geq 0\} \cup \{(-1, -2), (-1, -1)\}. \quad (7.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (3.2) с учетом свойства биортогональности (см. теорему 1) следует, что

$$\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = \langle \bar{g}^{(i)}, \overline{\mathfrak{T}}_j^B \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{при } j \leq -3, \quad (7.9)$$

$$\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = \langle \bar{g}^{(i)}, \overline{\mathfrak{T}}_{j-1}^B \rangle = \delta_{i,j-1} \quad \text{при } j \geq 1, \quad (7.10)$$

а из формул (3.3) аналогично вытекает, что

$$\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = \langle g^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \leq -2, \quad (7.11)$$

$$\langle \bar{g}^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = \langle g^{(i+1)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } i \geq 0. \quad (7.12)$$

Осталось найти лишь три величины $\langle \bar{g}^{(-1)}, \mathfrak{T}_0^B \rangle$, $\langle \bar{g}^{(-1)}, \mathfrak{T}_{-1}^B \rangle$ и $\langle \bar{g}^{(-1)}, \mathfrak{T}_{-2}^B \rangle$. Поскольку $\text{supp } \bar{g}^{(-1)} = \bar{x}_0$, первая величина равна нулю, $\langle \bar{g}^{(-1)}, \mathfrak{T}_0^B \rangle = 0$; отсюда, учитывая формулы (7.9)–(7.12), заключаем, что соотношения (7.3), (7.4) и (7.7), (7.8) доказаны. Для второй величины имеем

$$\begin{aligned} \langle \bar{g}^{(-1)}, \mathfrak{T}_{-1}^B \rangle &= \left\langle \cos(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) + \frac{1}{2} \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=\bar{x}_1}, \sin^2(t - \bar{x}_{-1}) \right\rangle \\ &\quad \times \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{x}_{-1}) \\ &= \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}); \end{aligned} \quad (7.13)$$

отсюда следует соотношение (7.6).

Аналогично устанавливается формула (7.5):

$$\begin{aligned} \langle \bar{g}^{(-1)}, \mathfrak{T}_{-2}^B \rangle &= \left\langle \cos(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) + \frac{1}{2} \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=\bar{x}_1}, \sin^2(t - \xi) \right\rangle \\ &\quad \times \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_0) = -\sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 6. Для сплайн-всплескового разложения (6.1) пространства $\mathcal{T}^B(X)$ формулы декомпозиции (7.1) имеют форму

$$a_i = c_i \quad \text{при } i \leq -2, \quad (7.15)$$

$$a_{-1} = -\sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) c_{-2} + \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) c_{-1}, \quad (7.16)$$

$$a_i = c_{i+1} \quad \text{при } i \geq 0, \quad (7.17)$$

а формулы (7.2) принимают вид

$$b_j = 0 \quad \text{при } j \neq 0, \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= c_0 + [\sin(\bar{x}_2 - \xi) \sin(\bar{x}_1 - \xi) c_{-2} - (\sin(\bar{x}_2 - \xi) \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \\ &\quad + \sin(\xi - \bar{x}_0) \sin(\xi - \bar{x}_{-1})) c_1] \sin^{-1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_0) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}). \end{aligned} \quad (7.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с доказательства формул (7.15)–(7.17). Если $i \neq -1$, то согласно теореме 5 в соотношении (7.1) отлично от нуля разве лишь одно слагаемое: при $i \leq -2$ это слагаемое имеет индекс $k = i$, а при $i \geq 0$ это слагаемое с индексом $k = i + 1$. Принимая во внимание равенства (7.3) и (7.4) соответственно, приходим к формулам (7.15) и (7.17). Обращаясь к доказательству формулы (7.16) возьмем $i = -1$ в соотношении (7.1) и воспользуемся теоремой 5; используя равенства (7.5)–(7.8) получаем формулу (7.16).

Для доказательства соотношений (7.18), (7.19) воспользуемся равенствами (6.3)–(6.6): с помощью (7.15) и (6.3) находим $b_j = 0$ при $j \leq -2$, и благодаря (7.17) и (6.6) получаем $b_j = 0$ при $j \geq 1$, а учитывая еще формулу (6.4), выводим равенство

$$b_{-1} = c_{-1} - c_{-2} \sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) - [-\sin(\bar{x}_1 - \xi) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) c_{-2} + \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) \sin^{-1}(\xi - \bar{x}_{-1}) c_{-1}] \sin(\xi - \bar{x}_{-1}) \sin(\bar{x}_1 - \bar{x}_{-1}) = 0;$$

все только что полученные равенства приводят к формуле (7.18).

Подставляя в равенство (6.5) величины a_{-1} и a_0 из формул (7.16) и (7.17), находим соотношение (7.19).

Теорема доказана.

8. О добавлении произвольного числа узлов. Пусть X_0 – сетка вида (1.1) со свойством (1.2). Рассмотрим бесконечную расширяющуюся последовательность сеток $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$, каждая из которых отличается от предыдущей добавлением одного узла, не совпадающего с узлами расширяемой сетки. Соответствующая последовательность пространств $\mathcal{T}^B(X_s)$ B_{cs} -сплайнов обладает свойством вложенности $\mathcal{T}^B(X_s) \subset \mathcal{T}^B(X_{s+1})$, $s = 0, 1, 2, \dots$ (см. следствие 1 при $\bar{X}_1 = X_s$, $X = X_{s+1}$), так что $\mathcal{T}^B(X_0) \subset \mathcal{T}^B(X_1) \subset \mathcal{T}^B(X_2) \subset \dots$. Обозначая через $\mathfrak{T}_{i(s)}^B$, $i \in \mathbb{Z}$, образующие B_{cs} -сплайны пространства $\mathcal{T}^B(X_s)$, видим, что справедливы калибровочные соотношения

$$\mathfrak{T}_{i(s)}^B = \sum_j d_{i,j}^{(s)} \mathfrak{T}_{i(s+1)}^B, \quad (8.1)$$

где коэффициенты $d_{i,j}^{(s)}$ определяются согласно теореме 3 (в которой следует взять $\bar{X}_1 = X_s$, $X = X_{s+1}$ и произвести подходящую перенумерацию узлов). Заметим, что ввиду упомянутой теоремы в каждом из соотношений (8.1) имеется не более двух ненулевых слагаемых. Применяя к системе вложенных пространств предыдущие построения, получаем сплайн-всплесковое разложение вида $\mathcal{T}^B(X_{s+1}) = \mathcal{T}^B(X_s) \dot{+} W_s$, последовательное применение которого приводит к прямому разложению пространства $\mathcal{T}_*^B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_s \mathcal{T}^B(X_s)$ в виде прямой суммы $\mathcal{T}_*^B = \mathcal{T}^B(X_0) \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} W_2 \dots$ и к формулам реконструкции и декомпозиции (см. формулы (6.2), (7.1), (7.2) и теоремы 4, 5).

Из последовательности $0, 1, 2, 3, \dots$ выделим подпоследовательность $s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_p < \dots < s_q < \dots$ и рассмотрим соответствующую последовательность сеток $X_{s_0} \subset X_{s_1} \subset X_{s_2} \subset \dots$. Сетка X_{s_q} получается из сетки X_{s_p} добавлением $s_q - s_p$ узлов, и потому $\mathcal{T}^B(X_{s_p}) \subset \mathcal{T}^B(X_{s_p+1}) \subset \mathcal{T}^B(X_{s_p+2}) \subset \dots \subset \mathcal{T}^B(X_{s_q})$. Рекуррентно применяя соотношение (8.1) при $s = s_p, s_p + 1, \dots, s_q - 1$, находим калибровочные соотношения

$$\mathfrak{T}_{i(s_p)}^B = \sum_j d_{i,j}^{(s_p, s_q)} \mathfrak{T}_{j(s_q)}^B, \quad (8.2)$$

где функции $\mathfrak{T}_{i(s_p)}^B$ и $\mathfrak{T}_{j(s_q)}^B$ строятся по формулам (1.3)–(1.6) при $X = X_{s_p}$ и при $X = X_{s_q}$ соответственно. Нетрудно видеть, что число ненулевых слагаемых в соотношении (8.2) не превосходит числа $s_q - s_p$. При вычислении коэффициентов $d_{i,j}^{(s_p, s_q)}$ нет необходимости в упомянутом рекуррентном процессе: можно лишь применить систему функционалов, биортогональную к системе $\{\mathfrak{T}_{j(s_q)}^B\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Упомянутая система функционалов $\{g^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ определяется формулами (2.1) при $X = X_{s_q}$. Очевидно, что $d_{i,j}^{(s_p, s_q)} =$

$\langle g^{(i)}, \mathfrak{T}_{j(s_p)}^B \rangle$; с помощью биортогональных систем в этом случае легко получаются формулы реконструкции и декомпозиции.

Предположим теперь, что объединение $\tilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=0}^{+\infty} X_s$ представляет собой сетку вида (1.1) со свойством (1.2), так что между любыми двумя соседними узлами сетки X_0 имеется лишь конечное число узлов сетки $\tilde{X}$; при этом $X_0 \subset \tilde{X}$ и $\mathcal{T}^B(X_0) \subset \mathcal{T}^B(\tilde{X})$. Отсюда следует, что справедливы калибровочные соотношения $\mathfrak{T}_i^B = \sum_j \tilde{d}_{i,j} \tilde{\mathfrak{T}}_j^B$ между образующими $\mathfrak{T}_i^B$ и $\tilde{\mathfrak{T}}_j^B$ пространств $\mathcal{T}^B(X_0)$ и $\mathcal{T}^B(\tilde{X})$ соответственно, причем число ненулевых слагаемых в каждом из них конечно. Как и прежде, биортогональные системы к упомянутым образующим определяются теми же формулами (2.1) при $X = X_0$ и при $X = \tilde{X}$ соответственно. В частности, если $\{g^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – биортогональная система функционалов к системе сплайнов $\{\tilde{\mathfrak{T}}_j^B\}_{j \in \mathbb{Z}}$, то $\tilde{d}_{i,j} = \langle g^{(i)}, \mathfrak{T}_j^B \rangle$. Упомянутые биортогональные системы стандартным способом приводят к формулам реконструкции и декомпозиции (см. формулы (6.2) и (7.1), (7.2)).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. CMBS-NSR Regional Conference Series in Appl. Math. V. 61. Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
- [2] Jawerth B., Sweldens W. An overview of wavelet based multiresolution analyses // SIAM Rev. 1994. V. 36. P. 377–412.
- [3] Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53. № 6. С. 53–128.
- [4] Демьянович Ю. К. Калибровочное соотношение для B -сплайнов на неравномерной сетке // Матем. моделирование. 2001. Т. 13. № 9. С. 98–100.
- [5] Демьянович Ю. К. Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 3. С. 313–316.
- [6] Бахвалов Н. С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМиМФ. 1966. Т. 6. № 5. С. 861–883.
- [7] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: Yuri.Demjanovich@paloma.spbu.ru

Поступило
25.08.2004