Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Соколовская, О. П. Филатов, Аппроксимация сверху систем дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 5, 763–772

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:30:35

УДК 517.928

АППРОКСИМАЦИЯ СВЕРХУ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЛИПШИЦЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е. В. Соколовская, О. П. Филатов

Пусть $\mathbb{R}^n$ – p -мерное пространство с евклидовой нормой $\|\cdot\|$, $K(\mathbb{R}^p)$ – совокупность непустых компактов в $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a]$, $D_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, $F_0: D_0 \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$, со F_0 – выпуклая оболочка отображения F_0 . Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных включений

$$\dot{x} \in \mu F(t, x, y, \mu), \quad \dot{y} \in G(t, x, y, \mu), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

с медленными – x и быстрыми – y переменными; здесь $F: D \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$, $G: D \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in [0, a]$ – малый параметр. Предполагается, что эта задача имеет хотя бы одно решение на $[0, 1/\mu]$ при всех достаточно малых $\mu \in [0, a]$. При некоторых условиях на F , G и F_0 , как обычных для задач аппроксимации, так и новых (более слабых, чем липшицевость) доказывается, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \in (0, \mu_0]$ и любого решения $(x_\mu(t), y_\mu(t))$ рассматриваемой задачи найдется решение $u_\mu(t)$ задачи $\dot{u} \in \mu \text{ со } F_0(t, u)$, $u(0) = x_0$, для которого при каждом $t \in [0, 1/\mu]$ выполняется неравенство $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon$.

Библиография: 8 названий.

1. Введение и обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|$, $K(\mathbb{R}^n)$ – совокупность всех непустых компактов из $\mathbb{R}^n$, $Kv(\mathbb{R}^n)$ – совокупность всех непустых выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$, $\rho(a, B)$ – расстояние от точки $a \in \mathbb{R}^n$ до множества $B \in K(\mathbb{R}^n)$, $\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B)$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества A от множества B , $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ – расстояние по Хаусдорфу между компактами A и B , $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $LA(\mathbb{R}_+)$ – совокупность локально интегрируемых (по Лебегу) функций $\lambda: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, для которых найдутся константы c_λ и Δ_λ такие, что при $\Delta > \Delta_\lambda$ для каждого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda(t) dt < c_\lambda. \quad (1)$$

Кроме того, пусть $H[0, b]$, $b > 0$, – совокупность всех функций $l: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, непрерывных в 0, для которых $l(0) = 0$.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных включений с медленными – x и быстрыми – y переменными

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in \mu F(t, x, y, \mu), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &\in G(t, x, y, \mu), & y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $F: D \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$, $G: D \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a]$, $\mu \in [0, a]$, $a > 0$, — малый параметр.

При аппроксимации сверху задачи (2) ей сопоставляется так называемая усредненная задача Коши

$$\dot{u} \in \mu F_0(t, u), \quad u(0) = x_0, \quad (3)$$

где $F_0: D_0 \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$, $D_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, достаточно адекватно отражающая основные свойства медленных переменных системы (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Говорят, что задача (3) *аппроксимирует сверху* задачу (2), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \in (0, \mu_0]$ и любого решения $(x_\mu(t), y_\mu(t))$ задачи (2) найдется решение $u_\mu(t)$ задачи (3), для которого выполняется неравенство

$$\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right].$$

Вопрос об аппроксимации сверху задачи (2) изучен в случае, когда правые части дифференциальных включений задачи (2) и отображение F_0 являются липшицевыми отображениями. В этом случае при условии выпуклости $F_0(t, u)$ и некоторых дополнительных предположениях, естественных для задач аппроксимации, доказано [2], [3], что задача (3) аппроксимирует сверху задачу (2). Результаты по аппроксимации сверху в липшицевом случае при отсутствии быстрых переменных изложены в [4]. Однако стандартная процедура усреднения, позволяющая в ряде случаев найти вид задачи (3), может привести к усредненной задаче с нелипшицевой правой частью. Настоящая работа посвящена этому случаю. Доказывается, что при выполнении для отображений F , G и F_0 некоторых условий, как обычных для задач аппроксимации, так и новых (более слабых, чем липшицевость), задача (2) будет аппроксимироваться сверху задачей

$$\dot{u} \in \mu \operatorname{co} F_0(t, u), \quad u(0) = x_0, \quad (4)$$

где $\operatorname{co} F_0$ — выпуклая оболочка отображения F_0 . Заметим, что возможность аппроксимации сверху сингулярно возмущенных дифференциальных включений с медленными и быстрыми переменными в не липшицевом случае при других условиях доказана в [5].

2. Основные условия. Будем считать, что имеют место следующие условия.

а) $F(t, x, y, \mu)$, $G(t, x, y, \mu)$ и $F_0(t, u)$ измеримы по t на $\mathbb{R}_+$ соответственно для любых $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a]$ и любых $u \in \mathbb{R}^m$.

б) Отображения F , G и F_0 интегрально ограничены функциями $\lambda_F, \lambda_G, \lambda_{F_0} \in LA(\mathbb{R}_+)$, т.е.

$$\begin{aligned} \|F(t, x, y, \mu)\| &\leq \lambda_F(t), \quad \|G(t, x, y, \mu)\| \leq \lambda_G(t) \quad \forall (t, x, y, \mu) \in D; \\ \|F_0(t, u)\| &\leq \lambda_{F_0}(t) \quad \forall (t, u) \in D_0. \end{aligned}$$

в) Условие близости средних для F и F_0 :

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \beta \left(\bigcup \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} F(t, \xi_0, \eta(t), 0) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} F_0(t, \xi_0) dt \right) = 0 \quad (5)$$

равномерно по начальным условиям $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^m$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ задачи

$$\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} \in \text{co } G(t, \xi, \eta, 0), \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad \eta(t_0) = \eta_0,$$

а объединение в (5) берется по всем решениям $\eta(t)$ этой задачи.

г) Для любых $r \in [0, b]$ ($b > 0$ – некоторое число), $t \in \mathbb{R}_+$ и $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ таких, что $\|x_1 - x_2\| \leq r$, $\|y_1 - y_2\| \leq r$, $\|u_1 - u_2\| \leq r$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \alpha(F(t, x_1, y_1, 0), F(t, x_2, y_2, 0)) &\leq \sigma_F(t) \cdot \omega_F(r), \\ \alpha(G(t, x_1, y, 0), G(t, x_2, y, 0)) &\leq \sigma_G(t) \cdot \omega_G(r) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha(F_0(t, u_1), F_0(t, u_2)) &\leq \sigma_{F_0}(t) \cdot \omega_{F_0}(r) \end{aligned}$$

с положительными функциями $\sigma_F, \sigma_G, \sigma_{F_0} \in LA(\mathbb{R}_+)$ и $\omega_F, \omega_G, \omega_{F_0} \in H[0, b]$.

д) Найдутся функции $\kappa_F, \kappa_G \in H[0, b]$ такие, что для любых $(t, x, y, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, b]$ выполняются неравенства

$$\beta(F(t, x, y, \mu), F(t, x, y, 0)) \leq \sigma_F(t) \cdot \kappa_F(\mu), \quad \beta(G(t, x, y, \mu), G(t, x, y, 0)) \leq \sigma_G(t) \cdot \kappa_G(\mu).$$

Следуя [6], будем называть многозначное отображение $E: D_0 \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ *односторонне липшицевым* (OSL) по x , если найдется локально интегрируемая (по Лебегу) в $\mathbb{R}_+$ функция $l_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall x, y \in \mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall v \in E(t, x)$ существует такой вектор $w \in E(t, y)$, что $\langle x - y, v - w \rangle \leq l_E(t) \|x - y\|^2$.

Для однозначных функций это условие появилось впервые, по-видимому, в [7] в связи с вопросом о единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заметим, что если отображение E липшицево по x при каждом t из $\mathbb{R}_+$ с функцией $l(t)$, локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$, то это отображение будет удовлетворять и условию OSL.

Для задачи Коши

$$\dot{x} \in E(t, x), \quad x(0) \in K_0,$$

где $E: [0, 1] \times \mathbb{R}^m \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$, $K_0 \in K(\mathbb{R}^m)$ с OSL правой частью $E(t, x)$, как показано в [6], имеет место теорема о непрерывной зависимости решения от исходных данных, которая используется при доказательстве основной теоремы настоящей работы.

3. Основная теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть задача (2) имеет хотя бы одно решение на $[0, 1/\mu]$ при каждом $\mu \in [0, a]$ и выполнены условия а)–д). Предположим, кроме того, что отображение $G(t, x, y, 0)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию OSL по y с постоянной функцией $l_G = d$, а отображение $F_0(t, u)$ является OSL по u с функцией $l_{F_0}(t)$ такой, что при $\Delta \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta l_{F_0}(t) dt = O(1).$$

Тогда задача (4) аппроксимирует сверху задачу (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если наряду с условием г) от отображения $G(t, x, y, 0)$ потребовать выполнение аналогичного условия по y : $\alpha(G(t, x, y_1, 0), G(t, x, y_2, 0)) \leq \sigma_G(t) \cdot \omega_G(r)$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$, где $\sigma_G(t) \cdot \omega_G(r)$ – функция Камке [8, с. 219], то объединение в условии близости средних (5) можно брать по всем решениям порождающей задачи

$$\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} \in G(t, \xi, \eta, 0), \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad \eta(t_0) = \eta_0,$$

которая получается из задачи (2) при $\mu = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функция $\sigma_{F_0}(t) \cdot \omega_{F_0}(r)$ из условия г) для отображения $F_0(t, u)$ – функция Камке, то задача (2) аппроксимируется сверху задачей (3), так как по теореме [8, с. 219] множество решений задачи (3) плотно в множестве решений задачи (4) по норме пространства $C[0, 1/\mu]$.

4. Доказательство. Заметим сначала, что одновременное выполнение для F и G условий г) и д) равносильно выполнению условий

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mu \in [0, a] : \\ \|x_1 - x_2\| < \delta, \quad \|y_1 - y_2\| < \delta, \quad 0 \leq \mu < \delta \end{aligned} \quad (6)$$

$$\implies \beta(F(t, x_1, y_1, \mu), F(t, x_2, y_2, 0)) < \varepsilon \sigma_F(t),$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mu \in [0, a] : \\ \|x_1 - x_2\| < \delta, \quad 0 \leq \mu < \delta \implies \beta(G(t, x_1, y, \mu), G(t, x_2, y, 0)) < \varepsilon \sigma_G(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Выполнение для F_0 условия г) равносильно выполнению условия

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ : \\ \|u_1 - u_2\| < \delta \implies \alpha(F_0(t, u_1), F_0(t, u_2)) < \varepsilon \sigma_{F_0}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть c, Δ_0 – максимальные из констант, найденных из условия принадлежности функций $\lambda_F, \lambda_G, \lambda_{F_0}, \sigma_F, \sigma_G, \sigma_{F_0}$ классу $LA(\mathbb{R}_+)$, и констант $c_l(F_0), \Delta_l(F_0)$, найденных из условия

$$\int_0^\Delta l_{F_0}(t) dt \leq c_l(F_0) \cdot \Delta, \quad \text{если } \Delta \geq \Delta_l(F_0).$$

Теперь проверим, что задача (4) аппроксимирует сверху задачу (2).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для него найдем число $\delta_{F_0}(\varepsilon) > 0$ из условия (8). По числу $\gamma = \min\{\delta_{F_0}(\varepsilon)/2, \varepsilon\}/(2c + 1)$ найдем число $\delta_F(\gamma) > 0$ из условия (6) и $\Delta_1(\gamma) > \Delta_0$ из условия (5), т.е. такое, что для любого $\Delta > \Delta_1(\gamma)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \beta\left(\bigcup_{\eta(t)} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F(t, \xi_0, \eta(t), 0) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F_0(t, \xi_0) dt\right) < \gamma \\ \forall(t_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Теперь зафиксируем $\Delta > \Delta_1(\gamma)$ и примем $\nu = \delta_F/c\Delta \exp(d\Delta)$. Пусть $\delta_G(\nu) > 0$ найдено по ν из условия (7). Положим $\delta = \min\{\delta_{F_0}(\varepsilon)/2, \delta_F(\gamma), \delta_G(\nu), \varepsilon\}$, а в качестве искомого $\mu_0 > 0$ возьмем такое, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu_0 c \Delta < \delta, \quad \mu_0 < \min\left\{\delta_F(\gamma), \delta_G(\nu), \frac{1}{\Delta}\right\}.$$

Пусть теперь $\mu \in (0, \mu_0]$ и $(x_\mu(t), y_\mu(t))$ – произвольное решение задачи (2), $t_j = j \cdot \Delta$, $j = 0, 1, \dots$, $x_j = x_\mu(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, k$, $k = [1/\mu\Delta]$, $[a]$ – целая часть числа a . Поскольку

$$x_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds,$$

где $v(s)$ – некоторый селектор отображения $F(s, x_\mu(s), y_\mu(s), \mu)$, для любого $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, получим

$$\|x_\mu(t) - x_j\| \leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds \leq \mu \int_{t_j}^t \lambda_F(s) ds \leq \mu \int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda_F(s) ds \leq \mu_0 c \Delta < \delta \leq \delta_F(\gamma).$$

Так как число $\delta_F(\gamma)$ выбиралось по числу γ из условия (6), то

$$\beta(F(t, x_\mu(t), y_\mu(t), \mu), F(t, x_j, y_\mu(t), 0)) < \gamma \sigma_F(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

По теореме о выборе измеримого селектора (см., например, [8, с. 206]) на $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, найдется измеримый селектор $v_j^1(t) \in F(t, x_j, y_\mu(t), 0)$ такой, что

$$\begin{aligned} \|v(t) - v_j^1(t)\| &= \rho(v(t), F(t, x_j, y_\mu(t), 0)) \\ &\leq \beta(F(t, x_\mu(t), y_\mu(t), \mu), F(t, x_j, y_\mu(t), 0)) < \gamma \sigma_F(t). \end{aligned}$$

При каждом $j = 0, 1, \dots, k-1$ рассмотрим теперь на $[t_j, t_{j+1}]$ дифференциальное включение

$$\dot{\eta} \in \text{co } G(t, x_j, \eta, 0), \quad \eta(t_j) = y_\mu(t_j). \quad (9)$$

Покажем, что найдется решение $\eta_j(t)$ этой задачи такое, что $\forall t \in [t_j, t_{j+1}]$ выполняется неравенство $\|\eta_j(t) - y_\mu(t)\| \leq \delta_F(\gamma)$. Для этого введем на $[0, 1]$ вспомогательную задачу

$$\dot{a} \in G_0(s, a), \quad a(0) = y_\mu(t_j), \quad (10)$$

где отображение $G_0(s, a)$ определяется равенством

$$G_0(s, a) = \Delta \text{co } G((1-s)t_j + st_{j+1}, x_j, a, 0), \quad s \in [0, 1].$$

Заметим, что если $a(s)$ – решение на $[0, 1]$ задачи (10), то функция $\eta_j(t) = a((t - t_j)/(t_{j+1} - t_j))$ – решение на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ задачи (9). Кроме того, заметим, что из выполнения условия OSL для $G(t, x, y, 0)$ следует, что отображение $\text{co } G(t, x, y, 0)$ тоже OSL по y с той же функцией $l_{\text{co } G}(t, x) = l_G(t, x) \equiv d$; поэтому отображение $G_0(s, a)$ также OSL по a с функцией $l_{G_0}(s) \equiv d \cdot \Delta$.

С помощью теоремы [6] о непрерывной зависимости решения от исходных данных для OSL дифференциальных включений установим разрешимость на отрезке $[0, 1]$ задачи (10). С этой целью введем на $[0, 1]$ функцию $z(s) = y_\mu((1-s)t_j + st_{j+1})$. Для нее имеем

$$\begin{aligned} \rho(\dot{z}(s), G_0(s, z(s))) &= \rho(\Delta \dot{y}_\mu((1-s)t_j + st_{j+1}), G_0(s, y_\mu((1-s)t_j + st_{j+1}))) \\ &= \rho(\Delta \dot{y}_\mu((1-s)t_j + st_{j+1}), \Delta \text{co } G((1-s)t_j + st_{j+1}, x_j, y_\mu((1-s)t_j + st_{j+1}), 0)) \\ &= \Delta \rho(\dot{y}_\mu(t), \text{co } G(t, x_j, y_\mu(t), 0)) \leq \Delta \beta(\text{co } G(t, x_\mu(t), y_\mu(t), \mu), \text{co } G(t, x_j, y_\mu(t), 0)) \\ &\leq \Delta \beta(G(t, x_\mu(t), y_\mu(t), \mu), G(t, x_j, y_\mu(t), 0)), \end{aligned}$$

где $t = (1-s)t_j + st_{j+1} \in [t_j, t_{j+1}]$. Учитывая найденную выше оценку $\|x_\mu(t) - x_j\| < \delta$ $\forall t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, и вспоминая, что $\delta \leq \delta_G(\nu)$, а число $\delta_G(\nu)$ выбиралось по числу ν из выполнения условия (7), получим

$$\rho(\dot{z}(s), G_0(s, z(s))) \leq \nu \Delta \sigma_G((1-s)t_j + st_{j+1}) \quad \forall s \in [0, 1], \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

По теореме о непрерывной зависимости [6] на $[0, 1]$ найдется решение $a(s)$ задачи (10), для которого имеет место оценка

$$\|a(s) - z(s)\| \leq \frac{\delta_F}{c \exp(d\Delta)} \int_0^s \exp(m_0(s) - m_0(\tau)) \sigma_G((1-\tau)t_j + \tau t_{j+1}) d\tau,$$

где $s \in [0, 1]$. Поскольку

$$m_0(s) = \int_0^s l_{G_0}(\alpha) d\alpha \leq \int_0^1 l_{G_0}(\alpha) d\alpha = \int_0^1 d\Delta d\alpha = \Delta d,$$

то

$$\begin{aligned} \|a(s) - z(s)\| &\leq \frac{\delta_F}{c \exp(d\Delta)} \int_0^s \exp(m_0(s)) \sigma_G((1-\tau)t_j + \tau t_{j+1}) d\tau \\ &\leq \frac{\delta_F}{c \exp(d\Delta)} \int_0^1 \exp(d\Delta) \sigma_G((1-\tau)t_j + \tau t_{j+1}) d\tau \\ &= \frac{\delta_F}{c\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sigma_G(\beta) d\beta < \delta_F(\gamma) \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Итак, на $[0, 1]$ найдено решение $a(s)$ задачи (10), для которого $\|a(s) - z(s)\| < \delta_F(\gamma)$ $\forall s \in [0, 1]$. Отсюда следует, что

$$\left\| a\left(\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\right) - z\left(\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\right) \right\| < \delta_F(\gamma) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Как отмечалось выше, функция $\eta_j(t) = a((t-t_j)/(t_{j+1}-t_j))$ – решение на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ задачи (9), а функция $z((t-t_j)/(t_{j+1}-t_j)) = y_\mu(t)$. Таким образом, на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ найдено решение $\eta_j(t)$ задачи (9), для которого

$$\|\eta_j(t) - y_\mu(t)\| < \delta_F(\gamma) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Так как число $\delta_F(\gamma)$ выбиралось по числу γ из условия (6), то

$$\beta(F(t, x_j, y_\mu(t), 0), F(t, x_j, \eta_j(t), 0)) < \gamma \sigma_F(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

По теореме о выборе измеримого селектора на $[t_j, t_{j+1}]$ найдется селектор $v_j^2(t) \in F(t, x_j, \eta_j(t), 0)$ такой, что

$$\begin{aligned} \|v_j^1(t) - v_j^2(t)\| &= \rho(v_j^1(t), F(t, x_j, \eta_j(t), 0)) \\ &\leq \beta(F(t, x_j, y_\mu(t), 0), F(t, x_j, \eta_j(t), 0)) < \gamma \sigma_F(t) \\ &\forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(t) dt \in \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, x_j, \eta_j(t), 0) dt \subset \bigcup_{\eta} \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, x_j, \eta(t), 0) dt,$$

где объединение берется по всем решениям $\eta(t)$ задачи (9), опять по упомянутой теореме о выборе измеримого селектора на $[t_j, t_{j+1}]$ найдется измеримый селектор $v_j^3(t) \in F_0(t, x_j)$ такой, что

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(t) dt - \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^3(t) dt \right\| &= \rho \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(t) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt \right) \\ &\leq \beta \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, x_j, \eta_j(t), 0) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt \right) \\ &\leq \beta \left(\bigcup_{\eta(t)} \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, x_j, \eta(t), 0) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt \right) < \gamma, \\ j &= 0, 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Теперь на $[0, 1/\mu]$ введем функцию

$$v^3(t) = \begin{cases} v_j^3(t), & \text{если } t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \\ 0, & \text{если } t \in [t_k, 1/\mu]. \end{cases}$$

И пусть $\omega_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v^3(s) ds$. Оценим, на сколько $x_\mu(t)$ отличается от $\omega_\mu(t)$ в узлах $t_1, \dots, t_k$. Имеем

$$\begin{aligned} \|x_\mu(t_j) - \omega_\mu(t_j)\| &= \left\| x_0 + \mu \int_0^{t_j} v(s) ds - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v^3(s) ds \right\| \\ &\leq \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^1(t) dt \right\| \\ &\quad + \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^1(t) dt - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(t) dt \right\| \\ &\quad + \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(t) dt - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^3(t) dt \right\| \\ &\leq \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|v(t) - v_i^1(t)\| dt + \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|v_i^1(t) - v_i^2(t)\| dt \\ &\quad + \mu \sum_{i=0}^{j-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v_i^2(t) - v_i^3(t)) dt \right\| \\ &\leq \mu \gamma \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_F(t) dt + \mu \gamma \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_F(t) dt + \mu \gamma \Delta j \\ &\leq 2\mu \gamma c \Delta j + \mu \gamma \Delta j \leq 2\mu \gamma \frac{c}{\mu} + \mu \frac{\gamma}{\mu} = \gamma(2c+1) \leq \varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Отметим отдельно неравенство

$$\|x_\mu(t_j) - \omega_\mu(t_j)\| \leq \gamma(2c + 1), \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (11)$$

Покажем теперь, что на $[0, 1/\mu]$ найдется решение $u_\mu(t)$ задачи (4), близкое к функции $\omega_\mu(t)$. Для этого введем на $[0, 1]$ вспомогательную задачу

$$\dot{b} \in F_0^1(s, b, \mu), \quad b(0) = x_0, \quad s \in [0, 1], \quad (12)$$

где отображение $F_0^1: [0, 1] \times \mathbb{R}^m \times (0, \mu_0] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$ задается равенством $F_0^1(s, b, \mu) = \text{co } F_0(s/\mu, b)$. Заметим, что если функция $b(s)$ – решение на $[0, 1]$ задачи (12), то функция $u_\mu(t) = b(\mu t)$ – решение на $[0, 1/\mu]$ задачи (4). К задаче (12) применим теорему [6]. С этой целью оценим сначала расстояние $\rho(\dot{z}^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu))$ для почти всех $s \in [0, 1]$, взяв

$$z^*(s) = \omega_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right) = x_0 + \mu \int_0^{s/\mu} v^3(\alpha) d\alpha = x_0 + \int_0^s v^3\left(\frac{\beta}{\mu}\right) d\beta, \quad s \in [0, 1].$$

Рассмотрим два случая: $s \in [\mu t_j, \mu t_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, и $s \in [\mu t_k, 1]$. В первом случае

$$\begin{aligned} \rho(\dot{z}^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu)) &= \rho\left(v^3\left(\frac{s}{\mu}\right), \text{co } F_0\left(\frac{s}{\mu}, \omega_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right)\right)\right) = \rho(v_j^3(t), \text{co } F_0(t, \omega_\mu(t))) \\ &\leq \rho(v_j^3(t), F_0(t, \omega_\mu(t))) \leq \beta(F_0(t, x_j), F_0(t, \omega_\mu(t))) \\ &\leq \alpha(F_0(t, x_j), F_0(t, \omega_\mu(t))), \quad \text{где } t = \frac{s}{\mu} \in [t_j, t_{j+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Для того, чтобы теперь использовать условие (8) для F_0 , оценим сначала $\|x_j - \omega_\mu(t)\|$ на $[t_j, t_{j+1})$. Учитывая (11), имеем

$$\begin{aligned} \|x_j - \omega_\mu(t)\| &\leq \|x_j - \omega_\mu(t_j)\| + \|\omega_\mu(t_j) - \omega_\mu(t)\| \leq \gamma(2c + 1) + \mu \int_{t_j}^t \lambda_{F_0}(s) ds \\ &\leq \gamma(2c + 1) + \mu \int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda_{F_0}(s) ds \leq \gamma(2c + 1) + \mu c \Delta < \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2} + \delta \leq \delta_{F_0}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha(F_0(t, x_j), F_0(t, \omega_\mu(t))) < \varepsilon \sigma_{F_0}(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}).$$

Из (13) теперь следует, что

$$\rho(\dot{z}^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu)) < \varepsilon \sigma_{F_0}\left(\frac{s}{\mu}\right) \quad \forall s \in [0, \mu t_k].$$

Во втором случае, когда $s \in [\mu t_k, 1]$,

$$\begin{aligned} \rho(\dot{z}^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu)) &= \rho\left(v^3\left(\frac{s}{\mu}\right), \text{co } F_0\left(\frac{s}{\mu}, \omega_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right)\right)\right) \\ &\leq \rho\left(v^3\left(\frac{s}{\mu}\right), F_0\left(\frac{s}{\mu}, \omega_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right)\right)\right) \\ &= \rho\left(0, F_0\left(\frac{s}{\mu}, \omega_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right)\right)\right) = \left\|F_0\left(\frac{s}{\mu}, \omega_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right)\right)\right\| \leq \lambda_{F_0}\left(\frac{s}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Если теперь ввести на $[0, 1]$ функцию

$$g(s) = \begin{cases} \varepsilon \sigma_{F_0}(s/\mu), & \text{если } s \in [0, \mu t_k), \\ \lambda_{F_0}(s/\mu), & \text{если } s \in [\mu t_k, 1], \end{cases}$$

то $\forall s \in [0, 1]$ будет выполняться неравенство

$$\rho(z^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu)) \leq g(s).$$

Заметим также, что эта функция $g(s)$ интегрируема на $[0, 1]$. Поскольку отображение $F_0(t, u) - \text{OSL}$ по u с функцией $l_{F_0}(t)$, отображение со $F_0(t, u)$ также удовлетворяет условию OSL по u с той же функцией $l_{F_0}(t)$. Поэтому отображение $F_0^1(s, b, \mu)$ является OSL по b с функцией $l_1(s) = l_{F_0}(s/\mu)$. В таком случае по теореме [6] найдется на $[0, 1]$ решение $b(s)$ задачи (12), для которого при всех $s \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\|b(s) - z^*(s)\| \leq \int_0^s \exp[m_1(s) - m_1(\tau)] g(\tau) d\tau \leq \int_0^1 \exp[m_1(s)] g(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Учитывая, что

$$m_1(s) = \int_0^s l_1(\tau) d\tau = \int_0^s l_{F_0}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) d\tau = \mu \int_0^{s/\mu} l_{F_0}(\alpha) d\alpha \leq \mu \int_0^{1/\mu} l_{F_0}(\alpha) d\alpha \leq c,$$

из (14) находим

$$\begin{aligned} \|b(s) - z^*(s)\| &\leq \int_0^1 \exp(c) g(\tau) d\tau = \exp(c) \left(\int_0^{\mu t_k} \varepsilon \sigma_{F_0}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) d\tau + \int_{\mu t_k}^1 \lambda_{F_0}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) d\tau \right) \\ &= \exp(c) \left(\varepsilon \mu \int_0^{t_k} \sigma_{F_0}(\alpha) d\alpha + \mu \int_{t_k}^{1/\mu} \lambda_{F_0}(\alpha) d\alpha \right) \\ &\leq \exp(c) \left(\varepsilon \mu \int_0^{1/\mu} \sigma_{F_0}(\alpha) d\alpha + \mu \int_{t_k}^{t_k + \Delta} \lambda_{F_0}(\alpha) d\alpha \right) \\ &\leq \exp(c) \left(\frac{\varepsilon \mu c}{\mu} + \mu c \Delta \right) \leq \exp(c) (\varepsilon c + \delta) \leq \varepsilon (c + 1) \exp(c) \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall t \in [0, 1/\mu]$ выполняется неравенство $\|b(\mu t) - z^*(\mu t)\| \leq \varepsilon (c + 1) \exp(c)$. Как отмечалось выше, $b(\mu t) = u_\mu(t)$ – решение на $[0, 1/\mu]$ задачи (4), а $z^*(\mu t) = \omega_\mu(t)$. Поэтому

$$\|u_\mu(t) - \omega_\mu(t)\| \leq \varepsilon (c + 1) \exp(c) \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right]. \quad (15)$$

Таким образом, на $[0, 1/\mu]$ найдено решение $u_\mu(t)$ задачи (4), для которого выполняется (15).

Оценим, на сколько найденное решение $u_\mu(t)$ отличается от $x_\mu(t)$. Возьмем произвольное $t \in (0, 1/\mu]$ и t_j – ближайший к точке t слева узел сетки $t_0, t_1, \dots, t_k$. Имеем

$$\begin{aligned} \|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| &\leq \|x_\mu(t) - x_\mu(t_j)\| + \|x_\mu(t_j) - \omega_\mu(t_j)\| \\ &\quad + \|\omega_\mu(t_j) - u_\mu(t_j)\| + \|u_\mu(t_j) - u_\mu(t)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds + \varepsilon + \varepsilon(c+1) \exp(c) + \int_{t_j}^t \|\dot{u}_\mu(s)\| ds \\
&\leq \mu \int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda_F(s) ds + \varepsilon(1 + (c+1) \exp(c)) + \mu \int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda_{F_0}(s) ds \\
&\leq 2\mu c \Delta + \varepsilon(1 + (c+1) \exp(c)) \\
&\leq 2\delta + \varepsilon(1 + (c+1) \exp(c)) \leq \varepsilon(3 + (c+1) \exp(c)) \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right].
\end{aligned}$$

В силу произвольности ε это означает, что задача (4) аппроксимирует сверху задачу (2). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филатов О. П., Хапаев М. М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998.
- [2] Филатов О. П., Хапаев М. М. Усреднение дифференциальных включений с “быстрыми” и “медленными” переменными // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 6. С. 102–109.
- [3] Филатов О. П., Хапаев М. М. О взаимной ε -аппроксимации решений системы дифференциальных включений и усредненного включения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 5. С. 127–134.
- [4] Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999.
- [5] Donchev T., Slavov I. Averaging method for one-sided Lipschitz differential inclusions with generalized solutions // SIAM J. Control Optimization. 1999. V. 37. № 5. P. 1600–1613.
- [6] Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SIAM J. Control Optimization. 1998. V. 36. № 2. P. 780–796.
- [7] Красносельский М. А., Крейн С. Г. Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 1. С. 13–16.
- [8] Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.

Самарский государственный университет

E-mail: solena@ssu.samara.ru, elsolona@list.ru, filt@ssu.samara.ru

Поступило

04.06.2004