Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 5, 710–717

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:42:43

УДК 514.74

О ПОВЕРХНОСТИ ФАНО ВЕЩЕСТВЕННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ M -КУБИКИ

В. А. Краснов

Доказывается, что поверхность Фано, параметризующая множество прямых на вещественном трехмерном M -многообразии третьей степени, сама является M -поверхностью. Также справедливо обратное утверждение. При доказательстве используются результаты из работы Г. Клемена и Ф. Гриффитса о промежуточном якобиане трехмерной комплексной кубики.

Библиография: 8 названий.

Введение. Далее X – комплексное алгебраическое многообразие в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^4$, заданное уравнением

$$P(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (1)$$

где P – однородный многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами. Мы будем предполагать, что многообразие X неособое. Через $\mathbb{R}X$ будем обозначать множество вещественных решений уравнения (1); оно всегда непустое и состоит из одной или двух компонент связности. Через $F_X = F$ будем обозначать поверхность Фано кубики X , которая параметризует множество прямых на X . Она будет также неособым многообразием, определенным над полем вещественных точек, так как многочлен P с вещественными коэффициентами. Поэтому определено множество вещественных точек $\mathbb{R}F$ комплексной поверхности Фано F , параметризующее множество прямых на $\mathbb{R}X$. Это множество также всегда непустое, так как на вещественной кубике всегда имеются вещественные прямые. На многообразиях X, F определена инволюция комплексного сопряжения τ , причем множества вещественных точек $\mathbb{R}X, \mathbb{R}F$ совпадают со множествами неподвижных точек этой инволюции: $\mathbb{R}X = X^\tau, \mathbb{R}F = F^\tau$. Поэтому имеют место неравенства Гарнака–Тома

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(X, \mathbb{F}_2), \quad (2)$$

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(F, \mathbb{F}_2), \quad (3)$$

где $H^*(-, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H^q(-, \mathbb{F}_2)$ и $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов. Напомним, что каждое из многообразий $(X, \tau), (F, \tau)$ называется M -многообразием, если соответствующее ему неравенство (2) или (3) становится равенством. Главная задача данной заметки – показать, что справедлива следующая

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS-OPEN, грант № 2000-269.

ТЕОРЕМА 0.1. *Поверхность Фано (F, τ) будет тогда и только тогда M -поверхностью, когда кубика (X, τ) является M -многообразием.*

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо для кубической поверхности. Как известно, на ней имеется 27 прямых, причем они будут все вещественными тогда и только тогда, когда кубическая поверхность является M -поверхностью. Вполне возможно, что аналогичная теорема справедлива и для кубики размерности больше трех. Решение этой задачи для трехмерной кубики упрощается, так как в работе [1] имеются почти все необходимые результаты по топологии и геометрии поверхности Фано F . Прежде чем доказывать теорему 0.1, мы приведем без доказательства некоторые результаты из работы [1], а также дополним их уточняющими утверждениями, которые потребуются при доказательстве теоремы 0.1. Этим целям посвящен первый пункт данной статьи. В следующем пункте проводится непосредственное доказательство теоремы 0.1. Это делается с использованием эквивariantных когомологий.

1. Предварительные факты о комплексной поверхности Фано. В этом пункте мы опишем структуру кольца когомологий $H^*(F, \mathbb{Z})$. В работе [1] это кольцо почти полностью вычислено. Это делается с помощью метода Лефшеца. А именно, данная кубика X включается в линейное семейство кубик X_t , $t \in \mathbb{P}^1$, которое представляет собой пучок гиперплоских сечений четырехмерной кубики, причем особые сечения содержат только одну простую двойную точку, а других особых точек нет. Из семейства кубик X_t получается семейство поверхностей Фано F_t . В работе [1] сначала изучается поверхность Фано F_0 особой кубики X_0 , а затем поверхность Фано F_t неособой кубики X_t . Это делается с помощью деформации F_t в F_0 .

Итак, через X_0 мы будем обозначать трехмерную комплексную кубику в $\mathbb{P}^4$ с одной простой двойной точкой, а других особых точек на ней нет. Будем предполагать, что особая точка p_0 имеет однородные координаты $(1 : 0 : \dots : 0)$. В аффинных координатах

$$y_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad y_3 = \frac{x_3}{x_0}, \quad y_4 = \frac{x_4}{x_0}$$

уравнение многообразия X_0 примет вид

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 4} a_{ij} y_i y_j + \sum_{1 \leq i, j, k \leq 4} b_{ijk} y_i y_j y_k = 0,$$

где матрица (a_{ij}) невырожденная, так как мы предполагали, что особая точка p_0 является простой двойной точкой. Мы можем считать, что гиперплоскость $x_0 = 0$ не касается многообразия X_0 . Проективное пространство с однородными координатами $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ будем обозначать через $\mathbb{P}^3$.

Пусть C — это кривая в $\mathbb{P}^3$, которая является пересечением квадрики $Q \subset \mathbb{P}^3$, заданной уравнением

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 4} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

и кубики S , заданной уравнением

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq 4} b_{ijk} x_i x_j x_k = 0.$$

Она является неособой кривой рода 4. Пусть F_0 – поверхность Фано кубики X_0 , которая параметризует множество прямых на этой кубике, а $C^{(2)}$ – симметрический квадрат кривой C . Тогда в [1] доказывается существование короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow H^{q-1}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(F_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(C^{(2)}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (4)$$

при каждом q .

ЛЕММА 1.1. *При каждом q группа когомологий $H^q(F_0, \mathbb{Z})$ свободная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точных последовательностей (4) вытекает, что достаточно проверить отсутствие кручения в группах $H^q(C^{(2)}, \mathbb{Z})$. Так как поверхность $C^{(2)}$ неособая, достаточно установить отсутствие кручения в группе $H^2(C^{(2)}, \mathbb{Z})$. Для этого мы будем применять эквивариантные когомологии Гротендика. Пусть $g: C^2 \rightarrow C^2$ – инволюция на декартовом квадрате, которая переставляет сомножители, а $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка, порожденная этой инволюцией. Тогда рассмотрим эквивариантные когомологии Гротендика $H^q(C^2, G; \mathbb{Z})$. Имеются две спектральные последовательности, сходящиеся к этим когомологиям (см. подробности в [2]):

$$\begin{aligned} I_2^{p,q} &= H^p(C^2/G, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(C^2, G; \mathbb{Z}), \\ II_2^{p,q} &= H^p(G, H^q(C^2, \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(C^2, G; \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Так как (см., например, [2], [3])

$$\mathcal{H}^q(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ (\mathbb{Z}/2)_{|(C^2)^G}, & q = 2k, \\ 0, & q = 2k + 1, \end{cases}$$

и $C^2/G = C^{(2)}$, $(C^2)^G = \Delta = C$ – диагональ, из первой спектральной последовательности получается точная последовательность (см., например, [7])

$$0 \rightarrow H^2(C^{(2)}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(C^2, G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(\Delta, \mathbb{Z}/2).$$

Заметим, что группа $II_2^{2,0} = H^2(G, H^0(C^2, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/2$ содержится в $H^2(C^2, G; \mathbb{Z})$ и отображается изоморфно на группу $H^0(\Delta, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ (см., например, [7]). Поэтому получаем вложение

$$H^2(C^{(2)}, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(C^2, G; \mathbb{Z})/II_2^{2,0}.$$

Заметим теперь, что

$$II_2^{1,1} = H^1(G, H^1(C^2, \mathbb{Z})) = 0.$$

Действительно, группа $H^1(C^2, \mathbb{Z})$ состоит из линейных комбинаций $n(a \otimes 1) + m(1 \otimes b)$, где $a, b \in H^1(C, \mathbb{Z})$, $n, m \in \mathbb{Z}$, а инволюция

$$g^*: H^1(C^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(C^2, \mathbb{Z})$$

действует по правилу

$$g^*(n(a \otimes 1) + m(1 \otimes b)) = n(1 \otimes a) + m(b \otimes 1).$$

Осталось увидеть, что из этой формулы следует равенство

$$\{a \in H^1(C^2, \mathbb{Z}) \mid g^*(a) = -a\} = \{b - g^*(b) \mid b \in H^1(C^2, \mathbb{Z})\},$$

поэтому

$$H^1(G, H^1(C^2, \mathbb{Z})) = \frac{\{a \in H^1(C^2, \mathbb{Z}) \mid g^*(a) = -a\}}{\{b - g^*(b) \mid b \in H^1(C^2, \mathbb{Z})\}} = 0.$$

Следовательно, группа $H^2(C^2, G; \mathbb{Z})/II_2^{2,0}$ содержится в группе $II_2^{0,2} = (H^2(C^2, \mathbb{Z}))^G$, поэтому является свободной. Лемма доказана.

Для поверхности Фано F неособой кубики X в [1] доказано существование короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow H^q(F_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q-1}(C, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (5)$$

при каждом q . Из этой точной последовательности и леммы 1.1 вытекает

ЛЕММА 1.2. *При каждом q группа когомологий $H^q(F, \mathbb{Z})$ свободная.*

Из точных последовательностей (4), (5) вытекают равенства

$$H^1(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{10}, \quad H^2(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{45}. \quad (6)$$

В работе [1] выбирается специальный базис $\chi, \delta, \eta_1, \dots, \eta_8$ группы $H^1(F, \mathbb{Z})$, для которого доказываются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (\chi \cup \delta \cup \eta_k \cup \eta_{k+4}, [F]) &= 1 && \text{при } 1 \leq k \leq 4; \\ (\chi \cup \delta \cup \eta_k \cup \eta_l, [F]) &= 0 && \text{при } l > k, \quad l \neq k + 4; \\ (\chi \cup \eta_k \cup \eta_l \cup \eta_m, [F]) &= 0 && \text{для всех } k, l, m; \\ (\delta \cup \eta_k \cup \eta_l \cup \eta_m, [F]) &= 0 && \text{для всех } k, l, m; \\ (\eta_k \cup \eta_{k+4} \cup \eta_l \cup \eta_{l+4}, [F]) &= 1 && \text{при } 1 \leq k < l \leq 4; \\ (\eta_p \cup \eta_q \cup \eta_r \cup \eta_s, [F]) &= 0 && \text{для всех других } p, q, r, s. \end{aligned}$$

Кроме того доказывается, что класс когомологий

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\chi \cup \delta + \sum_1^4 \eta_k \cup \eta_{k+4} \right)$$

принадлежит группе $H^2(F, \mathbb{Z})$, т.е. является целым, причем этот класс имеет следующий геометрический смысл. Пусть l – произвольная общая прямая на X ; тогда множество прямых на X , пересекающих l , – неособая кривая D_l на F . Класс когомологий, двойственный циклу $[D_l]$, оказывается равен классу ω .

ЛЕММА 1.3. *Классы когомологий*

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega, & \omega_2 &= \eta_1 \cup \eta_5, & \omega_3 &= \eta_2 \cup \eta_6, & \omega_4 &= \eta_3 \cup \eta_7, & \omega_5 &= \eta_4 \cup \eta_8, \\ \omega_6 &= \chi \cup \eta_1, & \omega_7 &= \chi \cup \eta_2, & \dots, & \omega_{13} &= \chi \cup \eta_8, & \omega_{14} &= \delta \cup \eta_1, & \omega_{15} &= \delta \cup \eta_2, & \dots, \\ \omega_{21} &= \delta \cup \eta_8, & \omega_{22} &= \eta_1 \cup \eta_2, & \omega_{23} &= \eta_1 \cup \eta_3, & \omega_{24} &= \eta_1 \cup \eta_4, \\ \omega_{25} &= \eta_1 \cup \eta_6, & \omega_{26} &= \eta_1 \cup \eta_7, & \omega_{27} &= \eta_1 \cup \eta_8, & \omega_{28} &= \eta_2 \cup \eta_3, \\ \omega_{29} &= \eta_2 \cup \eta_4, & \omega_{30} &= \eta_2 \cup \eta_5, & \omega_{31} &= \eta_2 \cup \eta_7, & \omega_{32} &= \eta_2 \cup \eta_8, & \dots, \\ \omega_{43} &= \eta_6 \cup \eta_7, & \omega_{44} &= \eta_6 \cup \eta_8, & \omega_{45} &= \eta_7 \cup \eta_8\end{aligned}$$

образуют базис свободной группы $H^2(F, \mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим билинейную симметрическую форму на свободной группе $H^2(F, \mathbb{Z})$

$$(\alpha, \beta) = (\alpha \cup \beta, [F]).$$

Из второго равенства в (6) следует, что достаточно проверить, что определитель матрицы $\|(\omega_i, \omega_j)\|$ равен ± 1 . Эта матрица разбивается на блоки

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C^t & B \end{vmatrix},$$

где

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

C – нулевая матрица размера 5×40 , а B – матрица размера 40×40 , имеющая в каждой строке и в каждом столбце по одному ненулевому элементу, причем вида ± 1 . Определитель матрицы B равен, с точностью до знака, произведению ее ненулевых элементов ± 1 , поэтому он сам равен ± 1 . Непосредственная проверка показывает, что определитель матрицы A равен 1. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. *Классы когомологий*

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \chi \cup \delta \cup \eta_1, & \alpha_2 &= \chi \cup \delta \cup \eta_5, & \alpha_3 &= \chi \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_4 &= \delta \cup \eta_1 \cup \eta_5, \\ \alpha_5 &= \eta_2 \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_6 &= \eta_3 \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_7 &= \eta_4 \cup \eta_1 \cup \eta_5, \\ \alpha_8 &= \eta_6 \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_9 &= \eta_7 \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_{10} &= \eta_8 \cup \eta_1 \cup \eta_5\end{aligned}$$

образуют базис свободной группы $H^3(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{10}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\beta_1 = \chi, \beta_2 = \delta, \beta_3 = \eta_1, \dots, \beta_{10} = \eta_8$. Это базис группы $H^1(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{10}$. Рассмотрим теперь матрицу $M = \|(\alpha_i \cup \beta_j, [F])\|$ размера 10×10 . Непосредственно проверяется с помощью соотношений выше, что эта матрица имеет в каждой строке и в каждом столбце по одному ненулевому элементу, причем вида ± 1 . Ее определитель равен, с точностью до знака, произведению ее ненулевых элементов ± 1 , поэтому он сам равен ± 1 . Так как элементы $\beta_1, \dots, \beta_{10}$ образуют базис

группы $H^1(F, \mathbb{Z})$, из этого факта про матрицу M следует, что элементы $\alpha_1 \dots, \alpha_{10}$ тоже образуют базис группы $H^3(F, \mathbb{Z})$. Лемма доказана.

В этом пункте нам остается поговорить об отображении Абеля–Якоби. Пусть P – подмногообразие произведения $F \times X$, состоящее из пар (l, x) таких, что прямая l содержит точку x . Тогда две проекции прямого произведения определяют диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow \pi & & \\ F & & \end{array}, \quad (7)$$

где $\pi: P \rightarrow F$ – локально тривиальное расслоение со слоем прямая, а $\varphi: P \rightarrow X$ – конечнолистное накрытие. Диаграмма (7) называется *семейством Фано кубики*. Она позволяет определить гомоморфизм групп гомологий

$$\Phi: H_1(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(X, \mathbb{Z}),$$

который называется *отображением цилиндра* и по определению равен композиции отображений

$$H_1(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^{-1}} H_3(P, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi_*} H_3(X, \mathbb{Z}),$$

где отображение π^{-1} сопоставляет замкнутой кривой γ на F ее прообраз $\pi^{-1}(\gamma)$, который является цилиндром. Справедлива

ЛЕММА 1.5. *Гомоморфизм цилиндра*

$$\Phi: H_1(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(X, \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение цилиндра индуцирует гомоморфизм Абеля–Якоби

$$\Phi: A(F) \rightarrow J(X)$$

многообразия Альбанезе поверхности S в промежуточный якобиан тела X . В работе [1] показано, что гомоморфизм Абеля–Якоби является изоморфизмом. Следовательно, он задает изоморфизм фундаментальных групп соответствующих комплексных торов

$$\pi_1(A(F)) \rightarrow \pi_1(J(X)).$$

Так как группы $H_1(F, \mathbb{Z})$, $H_3(X, \mathbb{Z})$ свободные, они совпадают с этими фундаментальными группами. Лемма доказана.

2. Доказательство основного результата. Прежде всего заметим, что наша кубика (X, τ) будет M -многообразием, если и только если гомоморфизм

$$\tau^*: H^3(V, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(V, \mathbb{F}_2)$$

будет тождественным отображением. Это вытекает из нечетности степени кубики (см., например, [3], [8]). Так как множество $\mathbb{R}F$ непустое, то, чтобы поверхность Фано (F, τ) была M -поверхностью, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) гомоморфизм $\tau^*: H^q(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(F, \mathbb{F}_2)$ является тождественным отображением при $q = 1, 2$;
- 2) дифференциалы $d_2^{0,2}, d_2^{0,3}, d_3^{0,3}$ в спектральной последовательности

$$II_2^{p,q} = H^p(G, H^q(F, \mathbb{F}_2)) \implies H^{p+q}(F, G; \mathbb{F}_2)$$

равны нулю (тогда все дифференциалы будут нулевыми, см., например, [3], [8]).

Построение отображения цилиндра

$$\Phi: H_1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(X, \mathbb{F}_2)$$

показывает, что оно коммутирует с комплексным сопряжением. Поэтому из леммы 1.5 следует, что гомоморфизм

$$\tau^*: H^3(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X, \mathbb{F}_2)$$

будет тождественным отображением тогда и только тогда, когда гомоморфизм

$$\tau^*: H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(F, \mathbb{F}_2)$$

тождественный. Следовательно, если поверхность Фано F является M -поверхностью, то кубика X будет M -многообразием. Переходим к доказательству обратного утверждения. Для этого нужно проверить выполнение условий 1), 2).

Если кубика является M -многообразием, то на группе $H^3(X, \mathbb{F}_2)$ инволюция τ^* действует тривиально, поэтому в силу леммы 1.5 она действует тривиально и на группе $H^1(F, \mathbb{F}_2)$. Применим лемму 1.3; тогда получим, что инволюция τ^* действует тривиально на базисных элементах $\omega_2 \pmod{2}, \dots, \omega_{45} \pmod{2}$ группы $H^2(F, \mathbb{F}_2)$. Заметим, что инволюция действует тривиально и на элементе $\omega_1 \pmod{2} = [D_1]^* \pmod{2}$. Действительно, если взять вещественную прямую l на кубике, то дивизор D_l инвариантен относительно инволюции τ . Таким образом, первое условие проверено; переходим к проверке второго.

Прежде всего заметим, что дифференциалы $d_2^{p,1}$ равны нулю, так как множество $\mathbb{R}F$ непустое (см., например, [3]), а дифференциалы $d_3^{p,1}$ всегда равны нулю по соображениям размерности. Далее введем следующее обозначение. Если $a \in H^q(F, \mathbb{Z})$, то элемент $a \pmod{2} \in H^q(F, \mathbb{F}_2)$ будем обозначать через a' . Так как инволюция τ^* действует на $H^q(F, \mathbb{F}_2)$ тривиально, то выполняется равенство $II_2^{p,q} = H^q(F, \mathbb{F}_2)$. Прежде всего нужно показать, что $d_2(\omega'_i) = 0$ при $i = 1, \dots, 45$. Элемент ω'_1 получается из дивизора, инвариантного относительно инволюции τ , поэтому $d_2(\omega'_1) = 0$ (см., например, [4]–[6]). Каждый элемент ω'_i при $i = 2, \dots, 45$ равен произведению элементов из $H^1(F, \mathbb{F}_2)$, поэтому $d_2(\omega'_i) = 0$ согласно правилу Лейбница. Например, имеем равенства

$$d_2(\omega'_2) = d_2(\eta'_1 \cup \eta'_5) = d_2(\eta'_1) \cup \eta'_5 + \eta'_1 \cup d_2(\eta'_5) = 0,$$

так как $d_2(\eta'_1) = 0$, $d_2(\eta'_5) = 0$. Из лемм 1.2, 1.3 следует, что элементы $\omega'_1, \dots, \omega'_{45}$ образуют базис пространства $H^2(F, \mathbb{F}_2)$, поэтому дифференциал

$$d_2^{0,2}: II_2^{0,2} \rightarrow II_2^{2,1}$$

равен нулю. Равенство нулю дифференциалов

$$d_2^{0,3}: II_2^{0,3} \rightarrow II_2^{2,2}, \quad d_3^{0,3}: II_3^{0,3} \rightarrow II_3^{3,1}$$

доказывается аналогично, а именно, с помощью леммы 1.4 и правила Лейбница. Таким образом, проверено второе условие максимальности поверхности Фано. Следовательно, теорема 0.1 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Clemens С. Н., Griffiths Р. А. The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. Math. 1972. V. 95. P. 281–356.
- [2] Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
- [3] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [4] Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
- [5] Краснов В. А. Алгебраические циклы на вещественном алгебраическом GM -многообразии и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 153–173.
- [6] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
- [7] Краснов В. А. Эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 101–126.
- [8] Краснов В. А. Вещественные алгебраические GM -многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 39–66.

Ярославский государственный университет
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило
25.08.2004