Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Т. Садэтов, О расширениях алгебр Ли с помощью алгебры Гейзенберга, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 5, 745–747

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:30:09

УДК 512.81

О РАСШИРЕНИЯХ АЛГЕБР ЛИ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

С. Т. Садэтов

Установлено, что расширения произвольной алгебры с помощью алгебры Гейзенберга являются несущественными после факторизации по центру алгебры Гейзенберга. Для рассматриваемых расширений получено стандартное описание с помощью представления и класса когомологий.

Библиография: 1 название.

1. Пусть все объекты ниже определены над произвольным полем k .

Расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью алгебры Ли $\mathfrak{e}$ называется алгебра Ли $\mathfrak{h}$ с идеалом $\mathfrak{e}$ и факторалгеброй $\mathfrak{h}/\mathfrak{e} = \mathfrak{g}$. Алгебры Ли, являющиеся расширениями произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью абелевой алгебры Ли V , находятся во взаимно однозначном соответствии с парами: представление $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$, класс когомологий из $H^2(\mathfrak{g}, V)$, (см. [1, гл. 1, §§ 3.1, 4.5]).

2. В работе установлено аналогичное описание расширений произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью $(2n + 1)$ -мерной алгебры Гейзенберга H_n . Алгебра Гейзенберга H_n определяется порождающими $Z_1, \dots, Z_{2n}$, κ и коммутационными соотношениями

$$[Z_i, Z_{n+j}] = \kappa \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (1)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Пусть zH_n – центр H_n . Воспользуемся тем, что центр идеала является идеалом. Рассмотрим коммутативную диаграмму точных последовательностей алгебр Ли и их гомоморфизмов, в которой переход к нижней строке – факторизация π по идеалу zH_n :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \mathfrak{f} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2)$$

Пусть $j: V \rightarrow H_n$ – произвольное линейное вложение, согласованное с проекцией π . Пусть $W = j(V)$, $\text{St } W = \{A \in \mathfrak{h} \mid [A, W] \subseteq W\}$ – стабилизатор подпространства W (подалгебра Ли).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. а) Факторрасширение $\mathfrak{f}$ несущественно, т.е. является полупрямой суммой $V \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$ по некоторому представлению ρ .

б) Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ является суммой подалгебр H_n и $\text{St } W$, пересекающихся по zH_n .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 1. б) Пусть S – билинейное отображение $W \times \mathfrak{h} \rightarrow zH_n$, определяемое формулой $[W, \mathfrak{h}]/W$. Ввиду невырожденности коммутатора (1) выполнено

$$W \cap \text{St } W = 0. \quad (3)$$

Ввиду той же невырожденности, с другой стороны, выполнено $\text{St } W = \text{Right Ker } S$ и

$$\text{codim}_{\mathfrak{h}} \text{St } W = rk S = rk(S|_{W \times W}) = \text{Dim } W. \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что $\mathfrak{h} = W \oplus \text{St } W$ – прямая сумма линейных пространств.

а) Из пункта б) замечания и первой строки (2) вытекает, что $(\text{St } W)/zH_n = \mathfrak{g}$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{f}$. Кроме того, $\mathfrak{f} = V \oplus \mathfrak{g}$ – прямая сумма линейных подпространств.

4. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание V и V^* . Рассмотрим кососимметрическую 2-форму $\langle I \cdot, \cdot \rangle: \wedge^2 V \rightarrow k$, определяемую формулой $[j(\cdot), j(\cdot)]\kappa^{-1}$. Рассмотрим подалгебру Ли $\hat{sp}(V) = \{\alpha \in gl(V) \mid I\alpha + \alpha^T I = \lambda I, \lambda \in k\}$.

ЛЕММА. *Линейное отображение $\tau: \hat{sp}(V) \rightarrow k$, $\alpha \rightarrow \lambda$ является гомоморфизмом алгебр Ли.*

ТЕОРЕМА. *Алгебра Ли, являющаяся расширением $\mathfrak{g}$ с помощью H_n , определяется парой и определяет ее: представление $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \hat{sp}(V)$, класс когомологий $\omega \in H^2(\mathfrak{g}, zH_n)$ относительно структуры $\mathfrak{g}$ -модуля на zH_n , определяемой представлением $\chi = \tau \circ \rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(zH_n)$.*

При $1/2 \in k$ подалгебра Ли $\hat{sp}(V)$ является прямой суммой подалгебры Ли $sp(2n)$ и подалгебры Ли k скалярных матриц, поэтому представление τ совпадает со взятием удвоенной скалярной компоненты оператора α .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Представление χ и класс когомологий ω могут быть определены из точной подстроки

$$0 \rightarrow zH_n \rightarrow \text{St } W \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

в первой строке диаграммы (2).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1. Построим по алгебре Ли $\mathfrak{h}$ требуемые в теореме представление ρ и класс 2-когомологий ω . Продолжим вложение $j: V \rightarrow H_n$ до линейного вложения $j: \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{h}$ такого, что $j(\mathfrak{g}) \subset \text{St } W$. Для $a \in \mathfrak{f}$, $z, w \in V$ выполнено

$$\begin{aligned} \langle I \text{ad}_a z, w \rangle + \langle Iz, \text{ad}_a w \rangle &= \kappa^{-1}([j(\text{ad}_a z), j(w)] + [j(z), j(\text{ad}_a w)]) \\ &= \kappa^{-1}([\text{ad}_{j(a)} j(z), j(w)] + [j(z), \text{ad}_{j(a)} j(w)]) = \kappa^{-1} \text{ad}_{j(a)} [j(z), j(w)] \\ &= \kappa^{-1} \langle Iz, w \rangle \text{ad}_{j(a)} \kappa. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь предпоследнее равенство вытекает из того, что $\text{ad}_{\mathfrak{h}}|_{H_n}$ является дифференцированием алгебры Ли H_n . Из (5) следует, что при представлении $\text{ad}_a|_V$, $a \in \mathfrak{f}$ форма $\langle I \cdot, \cdot \rangle$ умножается на элемент $\lambda = \kappa^{-1} \text{ad}_{j(a)} \kappa \in k$ и $\alpha = \text{ad}_a|_V \in \hat{sp}(V)$. Ввиду $\text{ad}_V|_V = 0$ это определяет представление факторалгебры $\rho: \mathfrak{g} = \mathfrak{f}/V \rightarrow \hat{sp}(V)$. Последнее определено независимо от вложения j . Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ определяет представление $\chi: \mathfrak{f} \rightarrow \text{End } zH_n$ по формуле $a \rightarrow \text{ad}_{j(a)}|_{zH_n}$. (Это представление совпадает с умножением на λ . Ниже линейное пространство zH_n рассматривается с этой структурой $\mathfrak{f}$ -модуля.) Так как $\text{ad}_{H_n}|_{zH_n} = 0$, по алгебре Ли $\mathfrak{h}$ представление χ определено инвариантно, независимо от выбора вложения j . По той же причине $V \subseteq \text{Ker } \chi$ и

определено требуемое представление $\chi: \mathfrak{g} = \mathfrak{f}/V \rightarrow \text{End } zH_n$. Так как подалгебра Ли $\text{St } W = zH_n \oplus j(\mathfrak{g})$ – прямая сумма линейных подпространств, представление χ может быть определено из точной подстроки замечания 2.

Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ определяет замкнутую кососимметрическую 2-форму $\omega: \wedge^2 \mathfrak{f} \rightarrow zH_n$ по формуле $a \wedge b \rightarrow [j(a), j(b)]/j(\mathfrak{f})$. Здесь факторизация производится по прямому слагаемому в разложении в прямую сумму линейных подпространств $\mathfrak{h} = j(\mathfrak{f}) \oplus zH_n$. При другом выборе вложения j замкнутая кососимметрическая 2-форма $\omega: \wedge^2 \mathfrak{f} \rightarrow zH_n$ приобретает слагаемое, являющееся кограницей. Поэтому ограничение на подалгебру Ли $\omega|_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}$ определяет требуемый в теореме класс 2-когомологий. Ввиду $[W, \text{St } W] \subseteq W$ выполнено $\omega(V, \mathfrak{g}) = 0$. Кроме того, $\omega|_{V \times V} = \langle I \cdot, \cdot \rangle \kappa$.

2. Однозначно восстановим по $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \widehat{sp}(V)$ и $\omega \in H^2(\mathfrak{g}, zH_n)$ алгебру Ли $\mathfrak{h}$, имеющую эти инварианты. По представлению ρ нижняя строка диаграммы (2) определяет алгебру Ли $\mathfrak{f}$. Продолжим представление $\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(zH_n)$ тривиально по V до представления $\chi: \mathfrak{f} \rightarrow \text{End}(zH_n)$. Продолжим замкнутую кососимметрическую 2-форму $\wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow zH_n$ до кососимметрической 2-формы $\wedge^2 \mathfrak{f} \rightarrow zH_n$, полагая $\omega(V, \mathfrak{g}) = 0, \omega|_{V \times V} = \langle I \cdot, \cdot \rangle \kappa$.

Согласно [1, гл. 1, § 3] ее дифференциал определяется формулой

$$(d\omega)(x_1, x_2, x_3) = \omega([x_1, x_2], x_3) - x_1(\omega(x_2, x_3)) + \dots, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{f},$$

где многоточие обозначает циклические перестановки индексов.

Пусть $g_1, g_2, g_3 \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2, v_3 \in V$. Согласно этой формуле

- α) $(d\omega)(g_1, g_2, g_3) = (d\omega)(v_1, v_2, v_3) = 0$ в силу замкнутости кососимметрических форм $\omega: \wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow zH_n, \wedge^2 V \rightarrow zH_n$; замкнутость последней вытекает из того, что H_n – подалгебра Ли;
- β) $(d\omega)(v_1, g_1, g_2) = [v_1, \omega(g_1, g_2)] = 0$, ввиду $\omega(V, \mathfrak{g}) = 0$ и $V \subseteq \text{Ker } \chi$;
- γ) $(d\omega)(g_1, v_1, v_2) = \omega([g_1, v_1], v_2) + \omega(v_1, [g_1, v_2]) - [g_1, \omega(v_1, v_2)] = (\langle I \text{ad}_{g_1} v_1, v_2 \rangle + \langle I v_1, \text{ad}_{g_1} v_2 \rangle) \kappa - \langle I v_1, v_2 \rangle \text{ad}_{j(g_1)} \kappa = 0$ в силу $\text{ad}_{g_1}|_V \in \widehat{sp}(V)$.

Следовательно, форма $\omega: \wedge^2 \mathfrak{f} \rightarrow zH_n$ замкнута. Представление $\chi: \mathfrak{f} \rightarrow \text{End}(zH_n)$ и замкнутая кососимметрическая 2-форма $\omega: \wedge^2 \mathfrak{f} \rightarrow zH_n$ определяют алгебру Ли $\mathfrak{h}$. Диаграмма (2) восстанавливается по нижней строке и средней колонке. Следовательно, для полученной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ построение пункта 1 доказательства теоремы приводит к исходным инвариантам: представлению $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \widehat{sp}(V)$ и коциклу $\omega \in H^2(\mathfrak{g}, zH_n)$.

Автор благодарит А. Л. Онищика за обсуждения. Автор благодарит Математический институт университета г. Бонна за гостеприимство и Немечскую службу академических обменов за финансовую поддержку (DAAD-стипендия А/96/28670).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фукс Д. В. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.